

Elliptic fibrations over Surfaces

東大・理 中山 昇

序。3次元代数多様体の分類論は Minimal Model 予想が解決されたので、それぞれの minimal model の構造を解明することの課題だが、まだあまりよく調べられていないと思う。2次元では、小平先生の楕円曲面論のように、手にとるようにその曲面の性質がわかる理論がある。だからといって3次元でも楕円曲線をファイバーにもつ多様体を調べるのがいいかどうかかわからないが、飯高先生のカテゴリカル分類論にあるように、小平次元0のファイバーをもつファイバー空間の構造を決めることは大事だと思う。小平次元 ≤ 2 の 3-fold が手にとるようにわかるまでには程遠いが、局所的な構造について少し解ってきた。

§1. $f: X \longrightarrow \Delta^2$ を 3次元 normal complex variety X から 2次元 unit polydisc Δ^2 への projective surjective

morphism, $(t_1, t_2) \in \Delta^2$ の座標として、

$$\mathcal{L}_1 := \{t_1 = 0\} \subseteq \Delta^2$$

$$\mathcal{L}_2 := \{t_2 = 0\} \subseteq \Delta^2$$

とおく。次の (i) ~ (v) を仮定する。

(i) f の制限 $X \setminus f^{-1}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \rightarrow \Delta^2 \setminus (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$
は smooth morphism で fiber は elliptic curve.

(ii) X は高々 terminal sing. のみしかもたない。

(iii) X は $\mathbb{Q}$ -factorial over $0 \in \Delta^2$, つまり、 $f^{-1}(0)$ の近傍で定義された Weil divisor D に対してある正の数 m があって mD は $f^{-1}(0)$ のまわりでは Cartier divisor になる。

(iv) X は f -nef, つまり f のファイバーに含まれる curve Γ に対して、 $(K_X, \Gamma) \geq 0$.

(v) $\mathcal{L}_1$ 上の general singular fiber は I_a 型、 $\mathcal{L}_2$ 上の general singular fiber は I_b 型、 a, b は非負整数。

このとき次のことがいえる:

定理 1. X は非特異、 f は flat、 $f^{-1}(0)$ は I_{a+b} 型。

系 1. Δ^2 内の一般の曲線 C で $C \cap (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \emptyset$ と

なるものについて、 $f^{-1}(C)$ は nonsingular で $f^{-1}(C) \rightarrow C$ は $0 \in C$ で I_{a+b} 型の singular fiber をとる minimal elliptic surface.

系2. $X' \rightarrow \Delta^2$ ~~で~~ 前述の仮定 (i)~(v) をみたし、
 $X \rightarrow \Delta^2$ と双有理的同値なものは、 $0 \in \Delta^2$ 上の germ
 としては同型を除いて有限個しかない。

定理1, 系1, 系2 の証明は次のようになる。

まず $K_X = 0$ を示す。次に系1にあるような曲線 C をとって fiber product $f^{-1}(C)$ が rational double points しかないことも、variation of Hodge structures の canonical extensions と relative dualizing sheaf の higher direct images の関係を使って示す。すると $f^{-1}(0)$ が reduced curve であることがわかり、 $0 \in \Delta^2$ 上局所的には section をつくることができる。従って [Na2] にあるように、 X は ~~ある~~ Weierstrass model の minimal resolution (partial) となる。
 $a=b=0$ のときは、 X 自身が Weierstrass model で $X \rightarrow \Delta^2$ は smooth morphism. a または b が ± 1 の時は Weierstrass model は $0 \in \Delta^2$ の germ としては同型を除いて唯一つしかないことがわかる。よって X は Weierstrass model の1つの

minimal partial resolution と flop でつながる ことがわかる。
 (かも 実際、Weierstrass model の resolution を行うと 非特異な
 minimal resolution がでてくるので、定理 1 が示される。系 2
 は [KM] を適用して示される。

§2. §1 の minimal elliptic fibration $X \rightarrow \Delta^2$
 で a と b が $\mathbb{Z}$ のものは $0 \in \Delta^2$ の germ としては、
 toric geometry により 構成 できる。

$$\delta: \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2\} \quad \text{で、}$$

$$\begin{cases} \delta(m+a+b) = \delta(m) & \forall m \in \mathbb{Z} \\ \#\{0 \leq m < a+b \mid \delta(m)=1\} = a \\ \#\{0 \leq m < a+b \mid \delta(m)=2\} = b \end{cases}$$

とある 函数 δ を 1 と 2 取る。これに対し、函数 $i', j:$
 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 を次のように inductive に 定義 する。

$$i'(0) = j(0) = 0$$

$$\begin{cases} i'(m+1) = i'(m) + 1 \\ j(m+1) = j(m) \end{cases}, \text{ if } \delta(m) = 1$$

$$\begin{cases} i'(m+1) = i'(m) \\ j(m+1) = j(m) + 1 \end{cases}, \text{ if } \delta(m) = 2$$

==> $k \in \mathbb{Z}$ 1 = 2 + 1

$$\mathcal{X}_k := \text{Spec} \mathbb{C}[t_1, t_2, st_1^{-i(k)} t_2^{-j(k)}, s^{-1} t_1^{i(k+1)} t_2^{j(k+1)}] \times_{\text{Spec} \mathbb{C}[t_1, t_2]} \Delta^2$$

とある。 $\mathcal{X}_k$ は自然にありあって $\mathcal{X}_\delta = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}_k$ は 3次元 complex manifold. $\mathcal{X}_\delta \rightarrow \Delta^2$ の一般ファイバーは $\mathbb{C}^*$, 0 上の fiber は $\mathbb{P}^1$ の無限個 (可算) の chain となる。 $\mathcal{X}_\delta$ の自己同型 $g: \mathcal{X}_\delta \rightarrow \mathcal{X}_\delta$ を $g^*(t_1) = t_1, g^*(t_2) = t_2, g^*(s) = st_1^a t_2^b$ で定義すると、 g の $\mathcal{X}_\delta$ への作用が properly discontinuously free となることを $[N]$ にあるようにわかる。 ==> 得られる商空間 $\mathcal{X}_\delta / \langle g \rangle$ を X_δ とかくと、 $X_\delta \rightarrow \Delta^2$ は §1 の仮定 (i) ~ (v) をみたす。 ==> 次のようにする。

定理2. 定理1の X は $0 \in \Delta^2$ 上の germ としては上の X_δ のどれかに同型。

証明は X_δ が flop してまた X_δ とあることを示す。

§3. 次に §1 の singular fiber の type の時を扱う。

$g: Y \longrightarrow \Delta^2_{(\tau_1, \tau_2)}$ は 3次元 normal complex variety
 Y から 2次元 unit polydisc Δ^2 への projective surjective
 morphism で、 (τ_1, τ_2) が Δ^2 の座標、とする。次の (i)(ii)
 を仮定する。

(i) f は $\{\tau_1=0\} \cup \{\tau_2=0\}$ の外側で smooth で、

fiber は elliptic curve

(ii) ℓ_1 上の general singular fiber は mI_a 型、 ℓ_2 上の
 general singular fiber は nI_b 型、 a と b は正整数と
 する。

この時 bicyclic covering $\Delta^2_{(t_1, t_2)} \longrightarrow \Delta^2_{(\tau_1, \tau_2)}$ は

$$\tau_1 = t_1^m, \quad \tau_2 = t_2^n$$

で定義すると fiber product $Y \times_{\Delta^2_{(\tau_1, \tau_2)}} \Delta^2_{(t_1, t_2)} \longrightarrow \Delta^2_{(t_1, t_2)}$

は §2 でつけた X_δ (ただし a, b のかわりに ma, nb に
 した) と $0 \in \Delta^2_{(t_1, t_2)}$ 上の germ ϵ (これは 2次元有理同値
 になる) による Galois group $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が有理
 的に作用している。次のことをいえた。

定理3. a) ある正の整数 p, q が存在して、

$$\gcd(p, m) = 1 \quad \gcd(q, n) = 1$$

$$qma \equiv pnb \pmod{m \cdot n}$$

b)

$$\delta\left(k + \frac{ma + nb}{\text{lcm}(m, n)}\right) = \delta(k) \quad \text{for } \forall k \in \mathbb{Z}$$

つまり、 χ_δ は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上で holomorphic に 1 になる。

c) χ_δ の 1 になるのは次のように $\frac{1}{m}$ になる。

$$(t_1, t_2, s) \mapsto (\mu t_1, t_2, s \cdot \varepsilon_1 (t_1^{ma} t_2^{nb})^{\frac{1}{m}})$$

$$(t_1, t_2, s) \mapsto (t_1, \nu t_2, s \cdot \varepsilon_2 (t_1^{ma} t_2^{nb})^{\frac{1}{n}})$$

$$\text{つまり } \mu = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}\right) \quad \nu = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right),$$

$$\varepsilon_1 = \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{m} \cdot (m-1)ap\right), \quad \varepsilon_2 = \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{n} \cdot (n-1)bq\right).$$

よって Y は χ_δ をこの作用で割ったものに双有理同値。
 (これは商空間) は cyclic quotient sing. (これは方角、
 non-canonical singularity をとる case もある。

References

[KM] Y. Kawamata and K. Matsuki, The number

of the minimal models for a 3-fold of general type is finite, *Math. Ann.*, 276 (1987), 595-598.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to the minimal model problem, in Algebraic Geometry Sendai 1985, *Adv. Stud. in Pure Math.* 10 (1987) Kinokuniya and North-Holland, 283-360.

[N] J. Nakamura, Relative compactification of the Néron model and its application, in Complex Analysis and Algebraic Geometry, (1977) Iwanami and Cambridge Univ. Press, 207-225.

[Na1] N. Nakayama, The lower semi-continuity of the plurigenra of complex varieties, in the same book as [KMM], pp. 551-590.

[Na2] —, On Weierstrass models, in Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata vol II (1987) Kinokuniya and North-Holland, 405-431.