

トレンド再生過程に基づく周期的取替え問題

海上保安大学校海上安全学講座 齋藤 靖洋 (Yasuhiro Saito)

Department of Maritime Safety Technology, Japan Coast Guard Academy

広島大学大学院工学研究科 土肥 正 (Tadashi Dohi)

Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

信頼性工学におけるシステムは、故障状態に陥った場合に修理が可能か否かという観点から見れば、非修理系システム及び修理系システムに大別することが出来る。非修理系システムとは、故障発生時に修理を施して正常状態に戻すことが難しく、一般的にシステムやコンポーネントを新品に取替えることによって復旧が為されるシステムを指す。取替え時間がシステムの稼働時間と比較して無視できるほど小さいと仮定すれば、非修理系システムにおける累積故障発生数のふるまいは、故障時間間隔が独立で同一に分布する (i.i.d.) 再生過程 (RP) によって記述出来る [7]。本稿では、再生過程の時間間隔が従う分布を再生分布と呼ぶ。一方の修理系システムは、各故障が発生した場合に、修理を行うことによりコンポーネントを正常状態に戻すことが可能なシステムを指す。故障に対する修理がコンポーネントを新品同様へ戻す効果を持つとすると、そのような修理行動は大修理 (major repair) と呼ばれ、大修理を実施した際の累積故障発生数のふるまいは非修理系システムと同様に再生過程で記述出来る。これに対して、故障したコンポーネントを故障直前の状態に復旧する修理を小修理 (minimal repair) と呼び、小修理を実施した際の累積故障過程は非同次ポアソン過程 (NHPP) で表すことが出来る [2]。このように、システムの故障発生事象は故障に対する保全行動により分類され、一般的に確率点過程を用いてモデル化することが出来る [1, 2]。

しかしながら、実世界におけるシステムへの修理行動は複雑であり、効果も様々であると考えられることから、大修理や小修理のような単純なケースだけで全ての修理行動が記述出来るとは限らない。Brown and Proschan [6] は、ある一定の確率に従って大修理若しくは小修理の効果が発生する不完全修理を行う場合、累積故障発生数は結果として NHPP で表されることを示した。Block ら [5] は、文献 [6] で一定とされた確率をコンポーネントの年齢に依存するよう拡張したモデルを提案し、コンポーネントの年齢 y によって定まる確率 $p(y)$ で大修理が実施され、確率 $1 - p(y)$ で小修理が実施される問題を考えた。一方、Kijima [12] は、これら不完全修理モデルの概念を大きく拡張した一般修理 (general repair) モデルを提案し、その確率論的性質について調べている。

一般修理モデルは、大修理や小修理といった2つの代表的な修理形態を特別な場合として含む一般的な修理行動を表現することが出来、新品同様の状態と故障直前の状態との間に存在するはずの中間的な状態に復旧する修理行動を表すことが出来る。この場合の累積故障発生数のふるまいを記述する確率過程は一般化再生過程と呼ばれる。具体的には、仮想年齢と呼ばれる概念が導入され、コンポーネントの修理により仮想年齢が若返ると仮定した上で、仮想年齢を用いて次の故障時間間隔が従う確率分布の変化を記述している。また、Kijima ら [11] は一般修理の下での周期的取替え問題を定式化し、一般化再生関数を近似的に求めることで最適周期的取替え間隔を導出した。このように解析的に関数が求められない場合、近似手法が有効となる場合は多く、一般的な通常の再生関数に関しても多くの近似手法が提案されている。また、一般修理モデルの提案後、その拡張は多くの文献において議論されることとなった [15]。例えば、Fuqing and Kumar [9] では文献 [12] において一定とされた修理による仮想年齢の減少割合を時間に依存する関数へと拡張し、仮想年齢の変化が時間に依存するモデルを提案している。

一方、Lindqvist ら [13] によって提案されたトレンド再生過程 (TRP) もまた、RP や NHPP を包括的に取り扱うことが出来る一般的な確率点過程として知られている。TRP は NHPP と RP の要素を併せ持つこ

とから、従前までに提案されてきた一般修理モデルと同様に、一般修理下における故障発生事象を記述することが出来る。本稿では、TRP を用いて故障発生事象をモデル化した上で、一般修理の下でのシステムに対する最適な周期的取替え方策を導出するための周期的取替え問題を定式化する。TRP に基づく累積故障発生数の期待値の性質についてはあまり知られておらず、RP と同様に再生関数を用いて表現することが出来る。したがって以下では、周期的取替え問題を解く上で必要なトレンド再生過程の期待値と定常状態における単位時間当たりの期待費用を求めた上で、最適な周期的取替え間隔を解析的に導出する。しかしながら不運にも、一般的な再生分布に対して常に再生関数が陽関数として求められるとは限らない。本稿では Kijima ら [11] が用いたものも含む均衡分布に基づく再生関数の近似手法を導入する。最終的に、シミュレーション実験を通じて、再生関数の近似手法に基づく近似解と真の再生関数に基づく最適解を比較することで、近似手法の適用可能性について考察する。

2 トレンド再生過程モデル

時刻 $t = 0$ から稼働開始した修理系システムに対して、 n 個の故障時刻データ t_i ($t_1 < t_2 < \dots < t_n$) が観測されているとする。 $i - 1$ 番目と i 番目の故障の間の時間間隔を x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) で表すとすると、 $x_i = t_i - t_{i-1}$ となる。ここで、 $t_0 = 0$ かつ $t_1 = x_1$ とする。システムに故障が発生する度に、システムを正常状態へ復旧するための修理行動が行われるが、各修理に掛かる時間はシステムの稼働時間と比べて無視出来るほど小さいと仮定する。

今、時刻 t までに発生した累積故障発生数を $\{N(t), t \geq 0\}$ とおき、 $\lambda(t)$ 及び $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ をそれぞれ確率点過程の強度関数及び累積強度関数と定義する。累積強度関数を用いて時間スケール変換した時刻列 $\Lambda(t_1), \Lambda(t_2), \dots, \Lambda(t_n)$ が任意の故障時間間隔分布 $F(x)$ を持つ再生過程、 $RP(F(x))$ 、に従う場合、元の確率点過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ をトレンド再生過程、 $TRP(F(x), \lambda(t))$ 、と呼ぶ。本稿では、確率分布関数 $F(x)$ を TRP の再生分布と呼び、 $\lambda(t)$ をトレンド関数と呼ぶ。この場合、 $TRP(1 - \exp\{-x\}, \lambda(t))$ 及び $TRP(F(x), 1)$ はそれぞれ非同次ポアソン過程 $NHPP(\lambda(t))$ 及び再生過程 $RP(F(x))$ を表すことから、TRP は NHPP 及び RP の一般化となっていることが分かる。更に、 $TRP(F(x), \lambda(t))$ の表記方法は一意ではなく、任意の定数 $c > 0$ に対して、 $TRP(F(x), \lambda(t))$ と $TRP(F(cx), \lambda(t)/c)$ は同じトレンド再生過程を表す [13]。

任意の確率点過程に対する条件付き強度関数は

$$\zeta(t | H_{t-}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\text{failure in } [t, t + \Delta t) | H_{t-})}{\Delta t} \quad (1)$$

で定義される [1]。ここで、 H_{t-} は時刻 t より以前の確率点過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ の履歴を表し、一般的に、条件付き強度関数は過去の履歴に依存する。例えば、 $RP(F(x))$ の条件付き強度関数は $\zeta(t | H_{t-}) = z(t - T_{N(t-)})$ によって与えられる。ここで、 $z(x)$ は再生分布 $F(x)$ に対応する故障率関数を表し、 $z(x) = (dF(x)/dx)/(1 - F(x)) = f(x)/(1 - F(x))$ によって定義される。一方、 $NHPP(\lambda(t))$ の場合、条件付き強度関数は確率的ではなく、 $\zeta(t | H_{t-}) = \lambda(t)$ で表される。これに対して、 $TRP(F(x), \lambda(t))$ の条件付き強度関数は

$$\zeta(t | H_{t-}) = z(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)}))\lambda(t) \quad (2)$$

で与えられる [13]。条件付き強度関数 $\zeta(t | H_{t-})$ を持つ確率点過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ において、対数尤度関数は次のように与えられる。

$$LLF = \sum_{i=1}^n \left\{ \log(z(\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))) + \log(\lambda(t_i)) - \int_0^{\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})} z(v) dv \right\}. \quad (3)$$

3 周期的取替え問題

2節で述べたトレンド再生過程に従って故障が発生する修理系システムに対して、ある周期的時刻 $K\tau$ ($K = 1, 2, \dots$) 毎に取り替えを実施する予防的な修理方策を考える。上述したように、周期的な取替え間隔の合間に故障が発生した場合、修理を施すことによりシステムを正常状態へ復旧出来るものとする。今、修理に掛かる費用を c_1 、周期的な取り替えに掛かる費用を c_2 とすると、定常状態における単位時間あたりの総期待費用は

$$C(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{E[\text{total cost on } [0, \tau]]}{\tau} = \frac{c_1 E[N(t)] + c_2}{t} \quad (4)$$

で与えられる。ここで、 $N(t)$ は時刻 t までに発生する累積故障数を表し、 $E[N(t)]$ はその期待値を意味する。本研究ではこれを最小にする最適な周期的取り替え間隔 $t = \tau^*$ および対応する最小総期待費用 $C(\tau^*)$ を導出することを目的とするが、この問題を解くには、2節で述べたトレンド再生過程における期待値が必要となる。非同次ポアソン過程 (NHPP) においては、条件付き強度関数を時刻 0 から t まで積分することにより期待値を求めることが出来、再生過程 (RP) においては再生分布の畳み込みの無限級数和 (再生関数) を求めればよい。ここでは時間スケール変換後の故障時刻列が再生過程に従うという性質を用いて、トレンド再生過程の期待値を導出する。図 1 は TRP における故障時刻列及び累積故障数と、時間スケール変換後の RP における故障時刻列及び累積故障数の関係を表したものである。それぞれの時間軸において、時刻 t までに発生する累積故障発生数を $N_{TRP}(t)$ 及び $N_{RP}(\Lambda(t))$ で表す。図から明らかなように、TRP の時刻 t における累積故障発生数と、RP の時刻 $\Lambda(t)$ における累積故障発生数は必ず一致する。一方、RP の期待値に関しては、再生関数 ($M(\cdot)$) によって表されることから、最終的に

$$E[N_{TRP}(t)] = E[N_{RP}(\Lambda(t))] = M(\Lambda(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} F^{(i)}(\Lambda(t)) \quad (5)$$

が成り立つ。ここで、 $F^{(i)}(x)$ は再生分布の i 重畳み込みを表す。したがって、本研究で提案する TRP に基づく周期的取替え問題は

$$\tau^* = \arg \min_t C(t) = \arg \min_t \frac{c_1 M(\Lambda(t)) + c_2}{t} \quad (6)$$

及び対応する最小総期待費用 $C(\tau^*)$ を求める問題であると言える。

単位時間当たりの総期待費用 $C(t)$ を t に関して微分し、分子を $h(t)$ とおけば

$$h(t) = c_1 \left\{ t \lambda(t) m(\Lambda(t)) - M(\Lambda(t)) \right\} - c_2 \quad (7)$$

となる。ここで、 $m(t)$ は時間スケール変換後の RP の再生密度 $m(t) = dM(t)/dt$ を表す。したがって、TRP に基づく周期的取替え問題において、 $\lambda(t)$ 及び $m(t)$ が単調増加関数であり、かつ $h(\infty) > 0$ である場合、 $t \in (0, \infty)$ において $h(t) = 0$ を満たす解が唯一存在する。

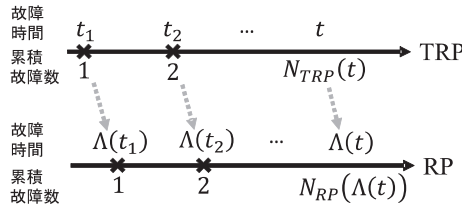


図 1: トレンド関数過程及び再生過程.

一般修理下における故障発生事象においては、時間の経過と共に故障は起こりやすくなるものと考えられる。この場合、条件付き強度関数は時間に対して増加傾向を持ち、これを確保するため、トレンド関数及び故障率関数については単調増加であることが望ましい。本研究では具体的に、単調増加となるトレンド関数として以下の式で定義されるベキ法則トレンド関数及び Cox-Levis トレンド関数を用いる。

$$\lambda_{PL}(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad (8)$$

$$\lambda_{CL}(t) = \exp(\alpha t + \beta). \quad (9)$$

また再生関数として、以下の確率分布関数を持つガンマ分布及び超指数分布を仮定する。

$$F_G(x) = \int_0^x \frac{a^b t^{b-1} \exp(-at)}{\Gamma(b)} dt, \quad (10)$$

$$F_H(x) = p_1(1 - \exp(a_1 x)) + p_2(1 - \exp(a_2 x)). \quad (11)$$

ここで、TRP の非唯一性よりガンマ分布の尺度パラメータ a は常に 1 と考えることが出来る。一方、超指数分布についても同様に $a_1 = 1$ と考えることが出来る。

2 つの再生分布に対する再生関数を求める。ガンマ分布の i 重畳み込みは、それ自体もガンマ分布となることが知られており、

$$F^{(i)}(x) = \int_0^x \frac{a^{ib} t^{ib-1} \exp(-at)}{\Gamma(ib)} dt \quad (12)$$

によって与えられる [3]。したがって、ガンマ分布に対しては形状パラメータ b が整数の場合、再生関数 $M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F^{(i)}(x)$ が以下の式で求められる。

$$M(t) = \frac{at}{b} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{b-1} \frac{\epsilon_r}{1 - \epsilon_r} \left[1 - \exp(-at(1 - \epsilon_r)) \right]. \quad (13)$$

ここで、 $\epsilon_r = \exp(2\pi r i/b)$ ($r = 0, 1, \dots, b-1$) は $s^b = 1$ の異なる根を表す。一方、超指数分布に対する再生関数は、

$$M(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} - 1 \right) \left[1 - \exp(-(p_1 a_2 + p_2 a_1)t) \right] \quad (14)$$

で与えられる。また、超指数分布の期待値 μ 及び分散 σ^2 はそれぞれ

$$\mu = \left(\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} \right), \quad (15)$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{p_1}{a_1^2} + \frac{p_2}{a_2^2} \right) - \left(\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} \right)^2 \quad (16)$$

で求められる。式 (8) 若しくは式 (9) 及び式 (13) 若しくは式 (14) を式 (6) に代入することで最適解を求めることが出来る。

4 再生関数の近似手法

再生分布が任意の一般分布である場合、上述したガンマ分布や超指数分布の場合と異なり、容易に再生関数が得られるとは限らない。この場合、周期的取替え問題の最適解を導出するための最も単純な方法として、近似的に再生関数を求めることが挙げられる。本稿では特に、均衡分布を用いた 3 つの近似再生関数

を導入する．均衡分布は，再生分布 $F(t)$ に従い故障が発生する状況において，任意の時刻における次の故障が発生するまでの時間が従う確率分布して知られており，

$$F_e(t) = \frac{1}{E[T]} \int_0^t \bar{F}(\tau) d\tau \quad (17)$$

で表される．ここで， $E[T]$ は元の再生分布 $F(t)$ の期待値を表す．再生密度に関する積分方程式から

$$m(t) = f(t) + F(t) \frac{\int_0^t m(t-\tau) dF(\tau)}{\int_0^t m(t-\tau) \bar{F}(\tau) d\tau} \quad (18)$$

が与えられることから，右辺第二項の分数部分を $\int_0^t dF(\tau) / \int_0^t \bar{F}(\tau) d\tau$ で置き換え，両辺を積分することによって，

$$M(t) = F(t) + \frac{1}{E[T]} \int_0^t \frac{F^2(\tau)}{F_e(\tau)} d\tau \quad (19)$$

が得られる [4]．本稿ではこれを近似手法 1 と呼ぶ．

一方，再生関数に関しては，

$$M(t) = \frac{t}{E[T]} - F_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(t-\tau) dM(\tau) \quad (20)$$

が成り立つことも知られている [10]．今， $dM(t) = dt/E[t]$ であると仮定して整理すれば，

$$M(t) = \frac{t}{E[T]} - F_e(t) + \frac{1}{E[T]} \int_0^t \bar{F}_e(t-\tau) d\tau \quad (21)$$

が得られ，これを近似手法 2 と呼ぶ [14]．

また，式 (20) に対して，式 (18) を代入し整理する．その上で，式 (18) の分数部分を $\int_0^t dF(\tau) / \int_0^t \bar{F}(\tau) d\tau$ で置き換えられると仮定すれば，

$$M(t) = \frac{t}{E[T]} - F_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(t-\tau) \left\{ f(\tau) + \frac{F^2(\tau)}{E[X]F_e(\tau)} \right\} d\tau \quad (22)$$

と表せ，近似手法 3 を得る [8]．

5 シミュレーション実験

本節では，3 つの近似手法を用いた場合の最適予防保全間隔及び最小総期待費用の精度を検証する．具体的には，上述したベキ法則トレンド関数及び Cox-Levis トレンド関数とガンマ再生分布及び超指数再生分布を組み合わせた 4 つのトレンド再生過程モデルに対しての周期的取替え問題を考える．トレンド関数を持つモデルパラメータについては $(\alpha, \beta) = (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)$ の 4 つの組み合わせを仮定する．一方で，ガンマ分布の形状パラメータについては $b = 2$ とし，超指数分布の各パラメータは $p_1 = 0.3, p_2 = 0.7, a_2 = 2$ とする．故障発生時の費用を $c_1 = 1$ で固定した上で，予防保全時の費用 c_2 を様々に変化させ，真の最適予防保全間隔 τ^* と近似手法 i ($i = 1, 2, 3$) を用いた場合の最適予防保全間隔 $\tau_{app_i}^*$ との相対誤差を以下の式で求める．

$$RE(\%) = \frac{\tau_{app_i}^* - \tau^*}{\tau^*} \times 100. \quad (23)$$

図 2 及び図 3 は，モデルパラメータ $(\alpha, \beta) = (1, 3)$ を持つベキ法則トレンド関数及び超指数再生分布を仮定した上で，費用係数をそれぞれ $c_2 = 5$ 及び $c_2 = 100$ とした場合の費用関数の変化を示している．いずれ

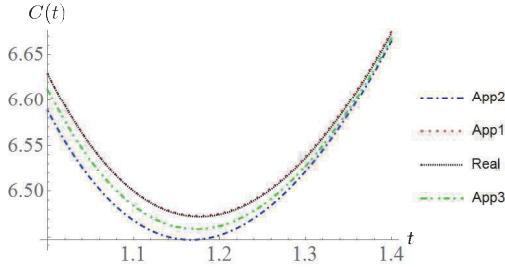


図 2: 近似手法の変化による費用関数の変化 ($c_2 = 5$).

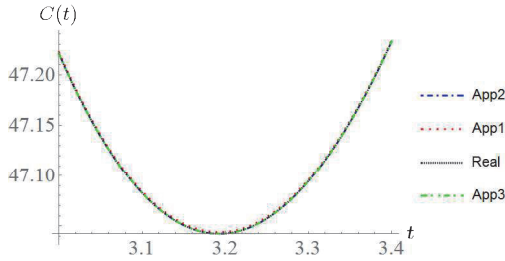


図 3: 近似手法の変化による費用関数の変化 ($c_2 = 100$).

の図も横軸が周期的取替え間隔 t を、縦軸が単位時間あたりの総期待費用 $C(t)$ を表す。これらの図を比較してみれば、費用係数が小さい場合については近似手法によっては多少の差が確認できるが、費用関数が多い場合についてはほとんど差が見られないことが分かる。図 2 については近似手法 1 が最も真の最適解に近く、近似手法 3 及び近似手法 2 の順で最適解が左下にずれていく様子が見て取れる。

表 1 から表 4 はそれぞれ 4 つのトレンド再生過程モデルに対して費用係数 c_2 を 10 から 50 まで設定した上で、3 つの近似手法を適用した場合の最適周期的取替え間隔 τ^* の精度を比較した結果を表す。それぞれの値は最適周期的取替え間隔を表し、括弧内の数値は相対誤差 (RE) を表している。これらの結果から、単純に真の最適周期的取替え間隔のみに着目すれば、費用係数 c_2 が大きくなるにつれて最適予防保全間隔が長くなっていることが確認できる。これは、予防保全の費用 c_2 が増加した場合、費用の高い予防保全を出来る限り避ける傾向が表れることを意味する。一方でトレンド関数のパラメータに着目すれば、 α と β の増加はトレンド関数の増加傾向に影響を与える。それぞれの結果から、トレンド関数の増加傾向が大きくなるパラメータ設定 (α 若しくは β が大きい) ほど、より最適周期的取替え間隔が短くなる傾向にあることが読み取れる。これは、トレンド関数の増加傾向の大小はそのまま故障数の増減に直結することから、増加傾向が大きいたことが故障数の増加を招き、結果として早めの周期的取替えを促す結果に繋がったものと考えられる。

続いて、3 つの近似手法を用いた場合の精度に関して考察する。表 1 と表 2 若しくは表 3 と表 4 に着目すれば、近似手法 1 に関しては、超指数再生分布を仮定した場合がガンマ再生分布を仮定した場合と比較して、精度が良くなっていることが見て取れる。一方で近似手法 2 及び 3 の結果を見れば、基本的には 2 つの再生分布を仮定したことでの大きな差は見られないが、ベキ法則トレンド関数かつ費用係数 c_2 が小さな一部の場合において、超指数分布の精度が悪くなる結果が得られた。精度の観点から言えば、4 つの中でも特に Cox-Levis トレンド関数及び超指数再生分布を持つトレンド再生過程モデルに対する最適周期的取替え間隔の精度が非常に良いことが確認でき、その相対誤差は最大でも 0.02% となっている。またいずれの

表 1: ベキ法則トレンド関数及びガンマ再生分布の精度比較（最適取替え間隔）.

	(α, β)	$c_2 = 10$	$c_2 = 20$	$c_2 = 30$	$c_2 = 40$	$c_2 = 50$
τ^*	(1, 2)	4.42	6.28	7.71	8.92	9.97
τ^*	(1, 3)	2.14	2.70	3.10	3.41	3.68
τ^*	(2, 2)	3.12	4.44	5.45	6.30	7.05
τ^*	(2, 3)	1.70	2.15	2.46	2.71	2.92
τ_{app1}^*	(1, 2)	4.43 (0.37)	6.30 (0.18)	7.72 (0.12)	8.92 (0.09)	9.98 (0.07)
τ_{app1}^*	(1, 3)	2.14 (0.23)	2.71 (0.12)	3.10 (0.08)	3.41 (0.06)	3.68 (0.05)
τ_{app1}^*	(2, 2)	3.13 (0.37)	4.45 (0.18)	5.46 (0.12)	6.31 (0.09)	7.06 (0.07)
τ_{app1}^*	(2, 3)	1.70 (0.23)	2.15 (0.12)	2.46 (0.08)	2.71 (0.06)	2.92 (0.05)
τ_{app2}^*	(1, 2)	4.42 (0.00)	6.28 (0.00)	7.71 (0.00)	8.92 (0.00)	9.97 (0.00)
τ_{app2}^*	(1, 3)	2.14 (0.01)	2.70 (0.00)	3.10 (0.00)	3.41 (0.00)	3.68 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 2)	3.12 (0.00)	4.44 (0.00)	5.45 (0.00)	6.30 (0.00)	7.05 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 3)	1.70 (0.01)	2.15 (0.00)	2.46 (0.00)	2.71 (0.00)	2.92 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 2)	4.42 (0.00)	6.28 (0.00)	7.71 (0.00)	8.92 (0.00)	9.97 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 3)	2.14 (0.03)	2.70 (0.00)	3.10 (0.00)	3.41 (0.00)	3.68 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 2)	3.12 (0.00)	4.44 (0.00)	5.45 (0.00)	6.30 (0.00)	7.05 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 3)	1.70 (0.03)	2.15 (0.00)	2.46 (0.00)	2.71 (0.00)	2.92 (0.00)

表 2: ベキ法則トレンド関数及び超指数再生分布の精度比較（最適取替え間隔）.

	(α, β)	$c_2 = 10$	$c_2 = 20$	$c_2 = 30$	$c_2 = 40$	$c_2 = 50$
τ^*	(1, 2)	2.57	3.62	4.43	5.11	5.71
τ^*	(1, 3)	1.49	1.87	2.14	2.35	2.53
τ^*	(2, 2)	1.81	2.56	3.13	3.61	4.04
τ^*	(2, 3)	1.18	1.48	1.70	1.87	2.01
τ_{app1}^*	(1, 2)	2.57 (0.02)	3.62 (0.01)	4.43 (0.01)	5.11 (0.01)	5.71 (0.01)
τ_{app1}^*	(1, 3)	1.49 (-0.03)	1.87 (0.01)	2.14 (0.01)	2.35 (0.00)	2.54 (0.00)
τ_{app1}^*	(2, 2)	1.81 (0.02)	2.56 (0.01)	3.13 (0.01)	3.61 (0.01)	4.04 (0.01)
τ_{app1}^*	(2, 3)	1.18 (-0.03)	1.48 (0.01)	1.70 (0.01)	1.87 (0.00)	2.01 (0.00)
τ_{app2}^*	(1, 2)	2.56 (-0.02)	3.62 (0.00)	4.43 (0.00)	5.11 (0.00)	5.71 (0.00)
τ_{app2}^*	(1, 3)	1.48 (-0.25)	1.87 (-0.01)	2.14 (0.00)	2.35 (0.00)	2.53 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 2)	1.81 (-0.02)	2.56 (0.00)	3.13 (0.00)	3.61 (0.00)	4.04 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 3)	1.18 (-0.25)	1.48 (-0.01)	1.70 (0.00)	1.87 (0.00)	2.01 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 2)	2.56 (-0.02)	3.62 (0.00)	4.43 (0.00)	5.11 (0.00)	5.71 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 3)	1.48 (-0.16)	1.87 (-0.01)	2.14 (0.00)	2.35 (0.00)	2.53 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 2)	1.81 (-0.02)	2.56 (0.00)	3.13 (0.00)	3.61 (0.00)	4.04 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 3)	1.18 (-0.16)	1.48 (-0.01)	1.70 (0.00)	1.87 (0.00)	2.01 (0.00)

表 3: Cox-Levis トレンド関数及びガンマ再生分布の精度比較（最適取替え間隔）.

	(α, β)	$c_2 = 10$	$c_2 = 20$	$c_2 = 30$	$c_2 = 40$	$c_2 = 50$
τ^*	(1, 2)	1.40	1.75	1.98	2.14	2.28
τ^*	(1, 3)	0.99	1.27	1.46	1.60	1.71
τ^*	(2, 2)	0.87	1.07	1.19	1.29	1.36
τ^*	(2, 3)	0.63	0.80	0.90	0.98	1.05
τ_{app1}^*	(1, 2)	1.41 (0.24)	1.75 (0.11)	1.98 (0.07)	2.14 (0.05)	2.28 (0.04)
τ_{app1}^*	(1, 3)	0.99 (0.27)	1.27 (0.12)	1.46 (0.08)	1.60 (0.06)	1.71 (0.04)
τ_{app1}^*	(2, 2)	0.88 (0.22)	1.07 (0.10)	1.19 (0.06)	1.29 (0.04)	1.36 (0.03)
τ_{app1}^*	(2, 3)	0.63 (0.25)	0.80 (0.11)	0.90 (0.07)	0.98 (0.05)	1.05 (0.04)
τ_{app2}^*	(1, 2)	1.40 (0.00)	1.75 (0.00)	1.98 (0.00)	2.14 (0.00)	2.28 (0.00)
τ_{app2}^*	(1, 3)	0.99 (0.00)	1.27 (0.00)	1.46 (0.00)	1.60 (0.00)	1.71 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 2)	0.87 (0.00)	1.07 (0.00)	1.19 (0.00)	1.29 (0.00)	1.36 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 3)	0.63 (0.00)	0.80 (0.00)	0.90 (0.00)	0.98 (0.00)	1.05 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 2)	1.40 (0.00)	1.75 (0.00)	1.98 (0.00)	2.14 (0.00)	2.28 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 3)	0.99 (0.00)	1.27 (0.00)	1.46 (0.00)	1.60 (0.00)	1.71 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 2)	0.87 (0.00)	1.07 (0.00)	1.19 (0.00)	1.29 (0.00)	1.36 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 3)	0.63 (0.00)	0.80 (0.00)	0.90 (0.00)	0.98 (0.00)	1.05 (0.00)

表 4: Cox-Levis トレンド関数及び超指数再生分布の精度比較（最適取替え間隔）.

	(α, β)	$c_2 = 10$	$c_2 = 20$	$c_2 = 30$	$c_2 = 40$	$c_2 = 50$
τ^*	(1, 2)	0.96	1.23	1.40	1.54	1.65
τ^*	(1, 3)	0.65	0.85	0.99	1.10	1.19
τ^*	(2, 2)	0.61	0.77	0.87	0.95	1.01
τ^*	(2, 3)	0.43	0.55	0.63	0.70	0.75
τ_{app1}^*	(1, 2)	0.96 (0.02)	1.23 (0.01)	1.40 (0.01)	1.54 (0.00)	1.65 (0.00)
τ_{app1}^*	(1, 3)	0.65 (0.02)	0.85 (0.01)	0.99 (0.01)	1.10 (0.00)	1.19 (0.00)
τ_{app1}^*	(2, 2)	0.61 (0.02)	0.77 (0.01)	0.87 (0.01)	0.95 (0.00)	1.01 (0.00)
τ_{app1}^*	(2, 3)	0.43 (0.02)	0.55 (0.01)	0.63 (0.01)	0.70 (0.00)	0.75 (0.00)
τ_{app2}^*	(1, 2)	0.96 (0.00)	1.23 (0.00)	1.40 (0.00)	1.54 (0.00)	1.65 (0.00)
τ_{app2}^*	(1, 3)	0.65 (0.00)	0.85 (0.00)	0.99 (0.00)	1.10 (0.00)	1.19 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 2)	0.61 (0.00)	0.77 (0.00)	0.87 (0.00)	0.95 (0.00)	1.01 (0.00)
τ_{app2}^*	(2, 3)	0.43 (0.00)	0.55 (0.00)	0.63 (0.00)	0.70 (0.00)	0.75 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 2)	0.96 (0.00)	1.23 (0.00)	1.40 (0.00)	1.54 (0.00)	1.65 (0.00)
τ_{app3}^*	(1, 3)	0.65 (0.00)	0.85 (0.00)	0.99 (0.00)	1.10 (0.00)	1.19 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 2)	0.61 (0.00)	0.77 (0.00)	0.87 (0.00)	0.95 (0.00)	1.01 (0.00)
τ_{app3}^*	(2, 3)	0.43 (0.00)	0.55 (0.00)	0.63 (0.00)	0.70 (0.00)	0.75 (0.00)

場合についても、費用係数 c_2 が大きくなるほど最適周期的取替え間隔の相対誤差は 0 に近づく傾向にあることが分かる。このことから c_2 がある程度の大きさである場合には、3 つの近似手法はいずれも周期的取替え問題に対して実用上問題ないほどの精度を有していることが確認できる。

一方、最小総期待費用に関しては、紙面の関係上表 5 の結果のみ表示するが、概ね最適周期的取替え間隔と同様の傾向が得られている。精度に関しては、最適周期的取替え間隔と比較して、最小総期待費用の方が若干悪くなることもあったが、その差は小さいものであった。これらの結果から最も精度の悪い場合でも 0.5% 程度の相対誤差しかなく、トレンド再生過程に基づく周期的取替え問題において、提案手法を適用することは実用上問題ないと考えられる。したがって、ガンマ分布や超指数分布とは異なり再生関数が陽関数として求められない再生分布に対しても、本稿で提案した 3 つの近似手法を用いた解法は有益であると言える。

表 5: ベキ法則トレンド関数及びガンマ再生分布の精度比較（最小総期待費用）。

	(α, β)	$c_2 = 10$	$c_2 = 20$	$c_2 = 30$	$c_2 = 40$	$c_2 = 50$
$C(\tau^*)$	(1, 2)	4.4	6.3	7.7	8.9	10.0
$C(\tau^*)$	(1, 3)	6.8	11.0	14.4	17.5	20.3
$C(\tau^*)$	(2, 2)	6.2	8.9	10.9	12.6	14.1
$C(\tau^*)$	(2, 3)	8.6	13.8	18.1	22.0	25.6
$C(\tau_{app1}^*)$	(1, 2)	4.4 (0.37)	6.3 (0.18)	7.7 (0.12)	8.9 (0.09)	10.0 (0.07)
$C(\tau_{app1}^*)$	(1, 3)	6.9 (0.49)	11.0 (0.24)	14.4 (0.16)	17.5 (0.12)	20.3 (0.10)
$C(\tau_{app1}^*)$	(2, 2)	6.3 (0.37)	8.9 (0.18)	10.9 (0.12)	12.6 (0.09)	14.1 (0.07)
$C(\tau_{app1}^*)$	(2, 3)	8.7 (0.49)	13.8 (0.24)	18.2 (0.16)	22.0 (0.12)	25.6 (0.10)
$C(\tau_{app2}^*)$	(1, 2)	4.4 (0.00)	6.3 (0.00)	7.7 (0.00)	8.9 (0.00)	10.0 (0.00)
$C(\tau_{app2}^*)$	(1, 3)	6.8 (0.00)	11.0 (0.00)	14.4 (0.00)	17.5 (0.00)	20.3 (0.00)
$C(\tau_{app2}^*)$	(2, 2)	6.2 (0.00)	8.9 (0.00)	10.9 (0.00)	12.6 (0.00)	14.1 (0.00)
$C(\tau_{app2}^*)$	(2, 3)	8.6 (0.00)	13.8 (0.00)	18.1 (0.00)	22.0 (0.00)	25.6 (0.00)
$C(\tau_{app3}^*)$	(1, 2)	4.4 (0.00)	6.3 (0.00)	7.7 (0.00)	8.9 (0.00)	10.0 (0.00)
$C(\tau_{app3}^*)$	(1, 3)	6.8 (0.00)	11.0 (0.00)	14.4 (0.00)	17.5 (0.00)	20.3 (0.00)
$C(\tau_{app3}^*)$	(2, 2)	6.2 (0.00)	8.9 (0.00)	10.9 (0.00)	12.6 (0.00)	14.1 (0.00)
$C(\tau_{app3}^*)$	(2, 3)	8.6 (0.00)	13.8 (0.00)	18.1 (0.00)	22.0 (0.00)	25.6 (0.00)

6 まとめと今後の課題

本稿では、トレンド再生過程に基づく周期的取替え問題を考察することで、ある種の一般修理下における最適周期的取替え間隔を導出した。トレンド再生過程が持つ再生分布の中で、ガンマ分布や超指数分布のように再生関数が陽関数として求められる分布については、定常状態における単位時間当たりの総期待費用を最小化する最適な周期的取替え間隔を解析的に導出できることを示した。一方で再生関数が陽に求められない他の分布に関しては、均衡分布を用いた 3 つの近似手法を提案し、その精度についてシミュレーション実験を通じて検証した。精度検証の結果から、特に近似手法 2 及び 3 の精度が非常に高いことを確認し、また、費用係数 c_1 及び c_2 の差が大きい場合には、近似手法 1 であっても実用上十分な精度を有することを明らかにした。

今後の課題としては、費用の分散を考慮した周期的取替え問題を考察することや条件付き強度関数に依存する費用構造を導入することが挙げられる。特に後者のモデルにおいては損傷の蓄積程度による一般修

理の難易度を表現することが可能となり，より現実的な修理行動下における予防保全を費用の観点から考察可能となることが期待出来る。

謝辞

本研究の一部は，JSPS 科研費 JP17K12986 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] P. Andersen, O. Borgan, R. Gill and N. Keiding, *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer, New York (1993).
- [2] H. Ascher and H. Feingold, *Repairable Systems-Modeling, Inference, Misconceptions and Their Causes*, Marcel Dekker, New York, (1984).
- [3] R. E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, New York, (1965).
- [4] D. J. Bartholomew, “An approximate solution of the integral equation of renewal theory,” *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, **25**, 432–441 (1963).
- [5] H. W. Block, W. S. Borges and T. H. Savits, “A general age replacement model with minimal repair,” *Naval Research Logistics*, **35** (5), 365–372 (1988).
- [6] M. Brown and F. Proschan, “Imperfect repair,” *Journal of Applied Probability*, **20** (4), 851–859 (1983).
- [7] D. R. Cox, “The statistical analysis of dependencies in point processes,” *Stochastic Point Processes*, 55–66, Wiley, New York, (1972).
- [8] Z. S. Deligönlü, “An approximate solution of the integral equation of renewal theory,” *Journal of Applied Probability*, **22**, 926–931 (1985).
- [9] Y. Fuqing and U. Kumar, “A general imperfect repair model considering time-dependent repair effectiveness,” *IEEE Transactions on Reliability*, **61** (1), 95–100 (2012).
- [10] S. Karlin and H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, (1983).
- [11] M. Kijima, H. Morimura and Y. Suzuki, “Periodical replacement problem without assuming minimal repair,” *European Journal of Operational Research*, **37** (2), 194–203 (1988).
- [12] M. Kijima, “Some results for repairable systems with general repair,” *Journal of Applied Probability*, **26**, 89–102 (1989).
- [13] B. H. Lindqvist, G. Elvebakk and K. Heggland, “The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems,” *Technometrics*, **45** (1), 31–44 (2003).
- [14] T. Ozbaykal, “Bounds and approximations of the renewal function,” *M.S. Thesis, Naval Postgraduate School, Department of Operations Research and Administrative Science*, Monterey, California, (1971).
- [15] M. Tanwar, R. Rai and N. Bolia, “Imperfect repair modeling using Kijima type generalized renewal process,” *Reliability Engineering and System Safety*, **124**, 24–31 (2014).