

REDUCE による偏微分方程式の保存量の計算

広島大 エ 伊藤雅明 (Masaki Ito)

// 加古富志雄 (Fujio Kako)

微分方程式の保存量を知ることは、その方程式の性質を知る上で重要であるばかりでなく、その方程式を数値計算する場合にも非常に役立つものである。ここでは、uniform rank な偏微分方程式の保存密度を求める REDUCE プログラムを紹介する。

1. 保存則及び保存密度の求め方.

偏微分方程式

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \dots) \quad (1)$$

の全ての解 u に対して次の保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} T(u(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x} X(u(t, x)) = 0 \quad (2)$$

が満たされるとき、 T 及び X をそれぞれ保存密度及び流束と言います。

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(u(t, x)) dx \quad (3)$$

は保存量と呼ばれ、時間にも依存しない。ここでは、(1)式の F が u の微分多項式で且つ uniform rank である場合を考える。そこでまず rank の定義をしておく。

F が u の微分多項式であるとする、 F の各項は次のように表わされる、

$$C u_0^{d_0} u_1^{d_1} \cdots u_l^{d_l} \quad (4)$$

ただし、 C は定数、 $u_i = \frac{\partial^i}{\partial x^i} u$ 、 $d_i > 0$ ($i=0, \dots, l$) である。

このとき

$$D = \sum_{i=0}^l d_i \quad (5)$$

$$I = \sum_{i=0}^l i d_i \quad (6)$$

をそれぞれ degree 及び index と呼び、rank R は

$$R = D \cdot \overline{w}_D + I \cdot \overline{w}_I \quad (7)$$

で表わされる。ここで $\overline{w}_D$ 及び $\overline{w}_I$ はそれぞれ u 及び $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みである。もし多項式の全ての項の rank が等しいとき、その多項式は uniform rank であると言う。

微分方程式 (1) が uniform rank であると、保存密度 T も uniform rank となるので、rank R の保存密度を求めるには、rank が R である項 T_i ($i=1, 2, \dots, m$) の線形結合

$$T = \sum_{i=1}^m c_i T_i \quad (8)$$

を生成し、(8)式が(2)式を満たす、即ち

$$E\left(\frac{\partial}{\partial t} T\right) = 0 \quad (9)$$

となるように未定係数 c_i を決めればよい。ここで E は次のようなオイラー演算子である,

$$E(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \frac{\partial}{\partial u_i} f. \quad (10)$$

この方法は非常に簡単ではあるが、高次方程式や高次の保存密度を求めるときには大量の計算が必要になり、教式処理に頼らざるを得ない。教式処理システム REDUCE で上記の処理を行うプログラムを次に紹介する。

2. REDUCE プログラム.

我々が作成した偏微分方程式の保存密度を求めるプログラムは、次の2つの部分に分かれている。

(I) DRANK(F) : 与えられた方程式 $u_t = F(u)$ が uniform rank となるように、 u 及び $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みが決められるかを調べる。

(II) CONSD(F, R) : 方程式 $u_t = F$ の rank R の保存密度を探す。ただし $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みが負のときは、CONSD2(F, R, N) を使う。ここで N は予想される保存密度の u の最高次数である。

3. 実行例

具体的な例として、K-dV 方程式、5 次の K-dV 型方程式及び変換された K-dV 方程式に適用した実行例を以下に示す。下線部は入力を表わし、プログラム中の $U(I)$ は $u_{i\Delta}$ を表わす。

- ① K-dV 方程式 $u_t = uu_x + u_{3x}$ に対して始めの5つの保存密度を求めよ。

F:=U(0)*U(1)+U(3)*

DRANK(F)*

DU/DT = U(3) + U(1)*U(0)

WEIGHT OF U = 2 WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 5

FOR I:=2 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(F,I)*

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(2) +++

C.D. = U(0)

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(4) +++

C.D. = $U(0)^2$

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

C.D. = $-3*U(1)^2 + U(0)^3$

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(8) +++

C.D. = $-36*U(3)*U(1) - 60*U(1)^2 *U(0) + 5*U(0)^4$

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(10) +++

C.D. = $-108*U(5)*U(1) - 252*U(3)*U(1)*U(0) - 210*U(1)^2 *U(0)^2 + 7*U(0)^5$

② 5 次の K-dV 型方程式

$$u_t = 45 u^2 u_x + 15 (u u_{3x} + A u_x u_{2x}) + u_{5x} \quad (11)$$

この方程式は $A=1$ のとき Sawada-Kotera 方程式となり、
 $A=\frac{5}{2}$ のとき Kaup 方程式となる。これらの方程式は共に無限個の保存量が存在することが知られている。

まず、(11) 式に対して u 及び $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みを決め rank 6 の保存密度を探すと次のよう出力される。

% EXAMPLE 2. : THE FIFTH ORDER K-DV TYPE EQUATION ;

F:=U(5)+45*U(0)**2*U(1)+15*(U(0)*U(3)+A*U(1)*U(2))%

DRANK(F)%

DU/DT = U(5) + 15*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1)*A + 45*U(1)*U(0)²

WEIGHT OF U = 2 WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 7

CONSD(F,6)%

FOLLOWING CONDITION IS EXCEPTED :

$$30*(-2*A + 1)=0$$

FOLLOWING CONDITION IS EXCEPTED :

$$270*(2*A^2 - 7*A + 5)=0$$

THERE IS NO CONSERVED DENSITY OF RANK(6)

そこで上記の除外された A の値に対して保存密度を探すと、
 以下のように Sawada-Kotera 方程式及び Kaup 方程式の場合との rank に応じた保存密度を出力する。

% A=1/2 :

FA:=SUB(A=1/2,F);

FA := (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0)²)/2

DRANK(FA)¥

DU/DT = (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0)²)/2

WEIGHT OF U = 2 WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 7

FOR I:=6 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(FA,I)¥

THERE IS NO CONSERVED DENSITY OF RANK(6)

THERE IS NO CONSERVED DENSITY OF RANK(8)

THERE IS NO CONSERVED DENSITY OF RANK(10)

% A=1 : THE SAWADA-KOTERA EQUATION ;

FS:=SUB(A=1,F);

FS := U(5) + 15*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 45*U(1)*U(0)²

DRANK(FS)¥

DU/DT = U(5) + 15*U(3)*U(0) + 15*U(2)*U(1) + 45*U(1)*U(0)²

WEIGHT OF U = 2 WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 7

FOR I:=6 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(FS,I)¥

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

C.D. = - U(1)² + U(0)³

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(8) +++

$$C.D. = -U(3)*U(1) - 9*U(1)^2*U(0) + 3*U(0)^4$$

THERE IS NO CONSERVED DENSITY OF RANK(10)

% A=5/2 : THE KAUP EQUATION ;

FK:=SUB(A=5/2,F);

$$FK := (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 75*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0)^2)/2$$

DRANK(FK)*

$$DU/DT = (2*U(5) + 30*U(3)*U(0) + 75*U(2)*U(1) + 90*U(1)*U(0)^2)/2$$

WEIGHT OF U = 2 WEIGHT OF DX = 1

RANK OF UT = 7

FOR I:=6 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(FK,I)*

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

$$C.D. = -U(1)^2 + 4*U(0)^3$$

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(8) +++

$$C.D. = -U(3)*U(1) - 18*U(1)^2*U(0) + 12*U(0)^4$$

THERE IS NO CONSERVED DENSITY OF RANK(10)

③ 座標変換された K-dV 方程式

$$u_t = u^3 u_{3x} + 3u^2 u_x u_{2x} + 3u^2 u_x \quad (12)$$

この方程式では、 $\frac{\partial}{\partial x}$ の重みは負となるが以下に示すように CONSD2 を使って保存密度を求めることができる。

% EXAMPLE 3. ;

F:=U(0)**3*U(3)+3*U(0)**2*U(1)*(U(2)+1)*

DRANK(F)*

$$DU/DT = U(0)^2 * (U(3)*U(0) + 3*U(2)*U(1) + 3*U(1))$$

WEIGHT OF U = 2 WEIGHT OF DX = -1

RANK OF UT = 5

USE THE COMMAND <CONSD2> TO FIND CONSERVED DENSITIES
FOR THIS EQUATION

CONSD2(F,2,1)*

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(2) +++

C.D. = U(0)

CONSD2(F,4,3)*

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(4) +++

$$C.D. = U(0) * (U(1))^2 - 2*U(0)$$

CONSD2(F,6,5)*

+++ CONSERVED DENSITY OF RANK(6) +++

$$C.D. = U(0)^2 * (2*U(3)*U(1)*U(0) + 5*U(2)*U(1)^2 + 20*U(1)^2 - 10*U(0))$$