

Graphs with "Fat" Vertices

東京工大 北久保 茂 (Shigeru Kitakubo)

本稿は, C. McA. Gordon と J. Luecke の "Knots are Determined by their Complements" の紹介である。以下, 定理等の番号は, 原論文の番号づけに従う。

Introduction

結び目についての従来の結果は, 「結び目型が同じ」 $\Rightarrow$ 「結び目の補空間が同相」 $\Rightarrow$ 「結び目群が同型」 ということである。この論文の結果は ①の逆方向である。

Th. 1 2つの結び目の補空間が同相ならば, それらは同値である。

さらに, Whitten の 「結び目群が同型な2つの素な結び目の補空間は同相である」という定理により, 次の Corollary が導かれる。

Cor. 1.1 2つの素な結び目の結び目群が同型ならば, 2つの結び目は同値である。

Dehn surgery に関しては次の定理が導かれる。

Th. 2 自明でない結び目 α の自明でない Dehn surgery は S^3 を生じない。

Th. 2 を証明するための命題が2つある。それを紹介するために定義をする。

K を S^3 内の自明でない結び目とし、 $N(K)$ を K の tubular neighborhood とする。そして、 $X = S^3 - \text{int } K$ を K の exterior とする。次に ρ を ∂X 上の slope、すなわち essential simple loop の unoriented isotopy class とし、 K の ρ -Dehn surgery により得られる閉3-多様体を $K(\rho)$ とする。 γ を K の meridian の slope とする。この時、自明な Dehn surgery は、 $K(\gamma) \cong S^3$ を生じる。 π を ∂X 上の別の slope とし、 γ と π の minimal geometric intersection number $n \geq 1$ をもつとする。

Prop. 1 $K(\pi) \cong S^3$ ならば、 X に proper に埋め込まれ次を満たす planar surface P, Q が存在する:

- i) $\partial P (\partial Q)$ は $\pi (\gamma)$ の parallel copy からなる。
- ii) P と Q は transverse に交わり、 ∂P の各成分は ∂Q の各成分と n 点で交わる。
- iii) $P \cap Q$ のどの arc も P や Q と boundary-parallel でない。

P と Q の構成は結び目の thin presentation を用いた [Ga] に基づく。

Prop. 2 X が Prop. 1 の i) ~ iii) を満たす properly embedded planar surfaces P, Q をもつとする。(但し Q は K の thin presentation における level sphere と X との交わり) この時 $K(\pi)$ は lens space を connected summand としてもつ。

P と Q の boundary component に disk を cap off して、これらの disk が S^2 のグラフ G_P, G_Q の "fat" vertex を形成するとみなす。 $G_P(G_Q)$ の辺は $P(Q)$ の中の $P \cap Q$ の arc に対応する。 G_P の (disk) face は P の subdisk に対応するが、これは、boundary が $Q \cup \partial N(K)$ に含まれて $K(r)$ 中にあるとみなせる。同様に、 G_Q の face は $K(\pi)$ の中にあるとみなしてよい。これにより、 $K(r)(K(\pi))$ のトポロジカルな性質を、 $G_P(G_Q)$ のグラフ論的性質から推論することができる。 $n \geq 2$ に対してはすでに証明されており [GCLS]、故に Chapter 2 では $n=1$ とし、Prop. 2 を証明するためグラフ論的技法を述べている。 Chapter 2 の主結果は Prop. 2.0.1 であり、これは次のことを主張している：

$K(\pi)$ が punctured lens space を含むということを示

すようにある特殊な face (Scharleman cycle) が G_Q 中にあるか、またはグラフ G_P の中に、ある条件を満たす face の集合がある。

本稿では、組み合わせ的技法を多く用いている Chapter 2 を一部紹介することが目的である。

Chapter 2 The Combinatorics

2.0 定義

X は orientable 3-多様体で、total boundary component T を含むとする。 T は slope π と γ を含む。 P, Q は $\partial P, \partial Q \subset T$ となるように X に proper に埋め込まれている compact planar surface である。さらに、 $\partial P, \partial Q$ の各 component は π, γ を表し、 ∂P の各 component は ∂Q の各 component と T にだけ 1 回交わる。そして $P \cap Q$ のどの arc も P や Q と boundary parallel でない。

$\partial P, \partial Q$ の component にそれぞれ $\{1, \dots, p\}, \{1, \dots, q\}$ と番号をつける。ただし、 T の向きづけに従って現れる順に番号をつけて行く。これにより、 $P(Q)$ 中の $P \cap Q$ の arc の端点には、対応する $Q(P)$ の番号をつけることができる。従って、 ∂P の各 component のまわりには、 $\{1, \dots, q\}$ のラベルが順次 (時計回りまたは反時計回り) に現れることになる。

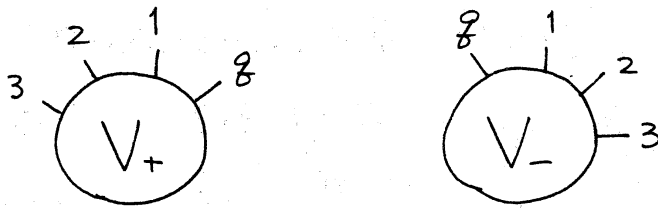


Figure 2.1

P と Q の boundary component に、前述のラベルの回り方に従って (例えば時計回り) を $+$ 、反時計回りを $-$ 、というように) 符号 $\pm$ をつける。 $P \cap Q$ の各 arc に関して、parity rule が成立する: P 上の arc α により結ばれる P の boundary component が同符号 $\iff Q$ 上の α により結ばれる Q の boundary component が異符号。

P, Q の boundary component に disk を cap off し、これら α disk を 'fat' vertex とみなしてグラフ G_P, G_Q in S^2 を作る。両グラフの辺は、 P, Q 中の $P \cap Q$ の arc であり、それらは 1 対 1 対応している。また、両グラフの頂点の labelling は parity rule をみだし、両グラフとも自明なループをもたない。グラフ G_P の concept は以下の通り。

- (1) fat vertex v と、sign $v = \pm$ 。
- (2) ラベル $x \in \{1, \dots, g\}$ と、parity $x = \pm$ ($= x$ に対応する G_Q の頂点の sign)。
- (3) (x, v) : v における x の occurrence。

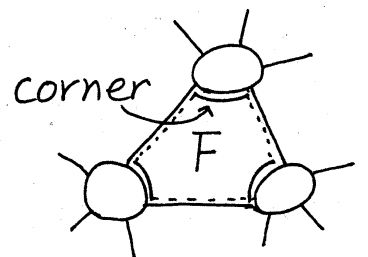
$$\text{Character of } (x, v) = \text{char}(x, v) = (\text{parity } x) \times (\text{sign } v)$$

(4) parity rule: 辺は異なる character の (λ, ν) を結ぶ。

2つの頂点の sign が同じである時, 2つの頂点は, parallel であるといい, 異なる時 antiparallel であるという。

G を上述のグラフとする。 $N(G)$ を S^2 における G の regular neighborhood とすると, face F は $\overline{S^2 - N(G)}$ の component である。

∂F には corner と $E(G)$ とが交互に現れる。



G の各頂点 v に対し, v におけるラベルの集合を $L(v)$ とする。 $\{L(v) \mid v \text{ は } G \text{ のある頂点}\}$ により生成されるグラフ $G(\{L(v)\})$ を G の部分グラフで, 少なくとも一方の端点が (l, v) ($l \in L(v)$ かつ v は G の頂点) であるような辺全体からなるものと定める。

L をラベルの集合とする時, $G(L)$ を, すべての頂点 $v \in G$ について $L(v) = L$ とした $G(\{L(v)\})$ と定義する。

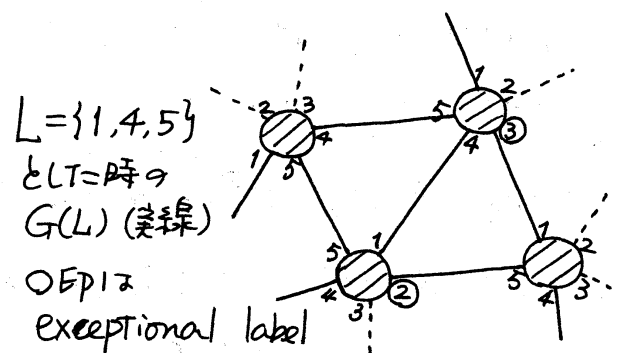
あるラベル α が $G(L)$ の

exceptional label で

あるとは, α が, L には

属さないが, $G(L)$ の

ある辺の端点のラベルと

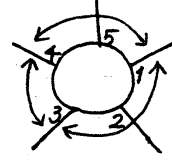


なっていることである。L-interval とは、 L で隣り合ったラベルの間の、fat vertex の boundary 上の区間とする。

m-type は、順序付き m -組
 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) \in \{+, -\}^m$ とし、

L -interval の総数を l とした時、L-type は、各成分が異なる L -interval に対応するような

l -type とする。 $L_0 \subset L$ -interval, $\tau \in L$ -type とし、 $\tau|_{L_0}$ とは、 τ を L_0 の対応する成分に制限して得られる $|L_0|$ -type とする。



$L = \{1, 3, 4\}$ のとき
 L -int. = $\{1 \sim 3, 3 \sim 4, 4 \sim 1\}$
 L -type = $(+, -, -)$
 (例)

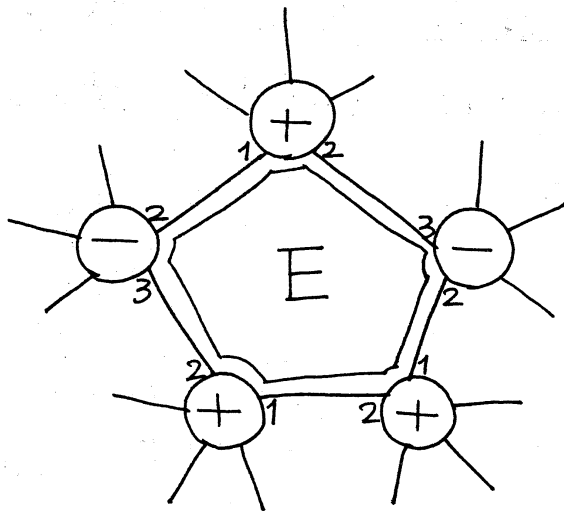
E を $G(L)$ の disk face, $\tau \in L$ -type とし、

$L_E = \{I \mid I \in L\text{-intervals}, E \text{ のある corner が } I \text{ に含まれる}\}$ とする。このとき、 E が τ を表現する とは、次の (1), (2) を満たすことである。

(1) 各 L -interval $I \in L_E$ に対し、 $v \in V(G)$ における E の corner が I に含まれるようなすべての v が同じ $\text{sign } \varepsilon(I)$ をもつ。

(2) $(\varepsilon(I) \mid I \in L_E) = \pm \tau|_{L_E}$

$G(L)$ が τ を表現するとは、 $G(L)$ のある disk face が τ を表現することである。



$$L = \{1, 2, 3, 5\}$$

とすると.

$$L\text{-int.} = \{1 \sim 2, 2 \sim 3, 3 \sim 5, 5 \sim 1\}$$

$$L\text{-type} = (+, -, -, +) \quad (3311)$$

$$L_E = \{1 \sim 2, 2 \sim 3\}$$

$$\varepsilon(1 \sim 2) = +, \quad \varepsilon(2 \sim 3) = -$$

$$(\varepsilon(I) \mid I \in L_E) = (+, -) = \tau \mid L_E$$

G の α -cycle σ とは, G の α のサイクルで, 次を満たすものである.

(1) G の頂点を点とみなすと, σ は circle に同相である.

(2) このサイクルに orientation を与え, 各辺の tail のラベルが α であるようにできる.

(3) σ 中の G の頂点はすべて parallel である.

G 中の Scharleman cycle は, G の α -cycle Σ で, $G \cap \text{int } D = \emptyset$ となるような disk D を bound するものである.

Prop. 2.0.1 G_P, G_Q を上述のグラフとすると, G_Q が Scharleman cycle を含むか, または G_P が $\{1, \dots, 8\}$ 4-type すべてを表現する.

References

- [CGLS] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke, and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, *Annals of Math.* 125 (1987), 237-300.
- [Ga] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds, III*, *J. Differential Geometry* 26 (1987), 479-536.