

古典クーロン三体問題

京都大学大学院人間・環境学研究科 佐野光貞

Mitsusada M. Sano

Graduate School of Human and Environmental Studies *

平成16年2月14日

1 モデル

クーロン系特有のスケール変換後、共線形 eZe 配置で全運動量をゼロに保存させた時の Hamiltonian は以下のように与えられる。

$$H = \frac{p_1^2}{2\mu} + \frac{p_2^2}{2\mu} - \frac{p_1 p_2}{\xi} - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{Z(q_1 + q_2)} \quad (1)$$

ただし、 $\mu = \xi/(\xi + 1)$ である。電子の質量を 1、原子核の質量を ξ とした。また、原子核の電荷は Z で与えられる。ちなみに、Bai たちが調べたのは、 $\xi = \infty$ である場合で運動エネルギーの三項目がゼロの場合である [1]。この小文の目的は、(1) この Hamiltonian に対して McGehee の blow-up 技法 [2] を用い、三体衝突多様体を構成し三体衝突軌道の近傍の様子を明らかにし、(2) さらに上の Hamiltonian から導かれる運動方程式を Mikkola と谷川 [3, 4] のアルゴリズムによる数値正則化の方法により 4 次の symplectic integrator [7] で数値的に解き、Poincaré 断面上での三体衝突軌道の構造を明らかにし、(3) 特に電子と原子核の質量比 ξ の変化に対してこの系がどのように変化するのかを解明することにある。

*〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田二本松町
Kyoto, 606-8501, Japan

Yoshida-Nihonmatsu-cho, Sakyo,

2 三体衝突多様体

McGehee の変数変換は非常に複雑なので原論文 [2] を参照してほしい。オリジナルの導出との違いはポテンシャルが単に重力からクーロンに置き換わるだけである。変数変換は基本的には三体衝突しようとするところを blow up して膨らませ、二体衝突を正則化することにある。三体衝突多様体は全運動量と重心を固定して、変数変換した後 $((x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \mapsto (r, s, v, w))$ ¹、エネルギー関係式において慣性モーメントの平方根 r を $r = 0$ 、或いは全エネルギー E を $E = 0$ とおいて求められる。まず、変数変換後のエネルギー関係式は、

$$1 - \frac{2w^2}{1-s^2} = \frac{2(1-s^2)}{W(s)}(v^2 - 2rE) - 1, \quad (2)$$

運動方程式は、

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\lambda(1-s^2)}{W(s)^{1/2}}rv, \quad (3)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\lambda}{2}W(s)^{1/2} \left[1 - \frac{1-s^2}{W(s)}(v^2 - 4rE) \right], \quad (4)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = w, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} = & -s + \frac{2s(1-s^2)}{W(s)}(v^2 - 4rE) + \frac{1}{2} \frac{W'(s)}{W(s)}(1-s^2-w^2) \\ & - \frac{\lambda(1-s^2)}{2W(s)^{1/2}}vw. \end{aligned} \quad (6)$$

である。三体衝突多様体は上の手続き ($r = 0$ and/or $E = 0$) により以下の式で与えられる。

$$w^2 + s^2 + (1-s^2)^2 W(s)^{-1} v^2 = 1, \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} W(s) = & 2(1-s^2) \sin(2\lambda) \left[\frac{1}{(b_2 - b_1) \sin(\lambda(1+s))} \right. \\ & + \frac{1}{(a_3 - a_2) \sin(\lambda(1-s))} \\ & \left. - \frac{1}{Z\{(b_2 - b_1) \sin(\lambda(1+s)) + (a_3 - a_2) \sin(\lambda(1-s))\}} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

¹ 正準変換ではない。

$$\cos(2\lambda) = \frac{1}{\xi + 1}. \quad (9)$$

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{(1+\xi)(2+\xi)f}}, -\frac{1}{\sqrt{(1+\xi)(2+\xi)f}}, \frac{1+\xi}{\sqrt{(1+\xi)(2+\xi)f}} \right) \quad (10)$$

$$\mathbf{b} = \left(-\frac{1+\xi}{\sqrt{(1+\xi)(2+\xi)f}}, \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)(2+\xi)f}}, \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)(2+\xi)f}} \right) \quad (11)$$

三体衝突多様体は位相空間の中で三体衝突している点の集まりを表している。blow-upにより膨らませたため、一点につぶれていることはない。トポロジ的には球殻に4つの穴が開いた曲面をしている。三体衝突多様体の次元は2である。三体衝突多様体上のフローは以下の方程式で与えられる。

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\lambda}{2} W(s)^{1/2} \left[1 - \frac{1-s^2}{W(s)} v^2 \right], \quad (12)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = w, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} = & -s + \frac{2s(1-s^2)}{W(s)} v^2 + \frac{1}{2} \frac{W'(s)}{W(s)} (1-s^2-w^2) \\ & - \frac{\lambda}{2} \frac{1-s^2}{W(s)^{1/2}} vw. \end{aligned} \quad (14)$$

(s, v, w) の空間において軌道は以下のような性質を持つ。

性質： $E < 0$ の時は軌道は三体衝突多様体の内側及び三体衝突多様体上を走る。一方、 $E > 0$ の時は三体衝突多様体の外側及び三体衝突多様体上を走る。また、 $E = 0$ の時は軌道は三体衝突多様体上を走る。

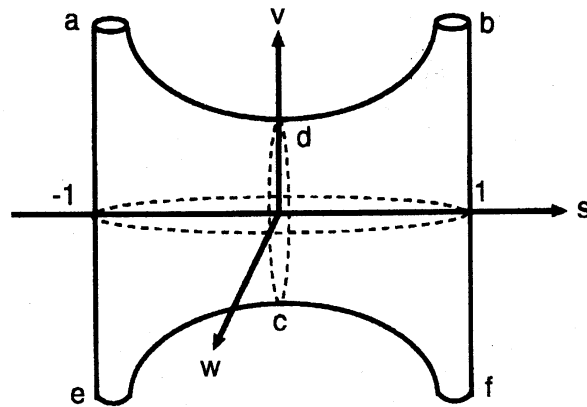
三体衝突多様体の概略図を図1(a)に載せた。二つの臨界点 c と d がある。この点は、全体のフローの平衡点、つまり、固定点となっている。この固定点周りの安定性解析の結果が図1(b)に載せてある。臨界点 c の安定多様体は2次元、不安定多様体は1次元、臨界点 d の安定多様体は1次元、不安定多様体は2次元である。

命題： $\xi \rightarrow 0$ において三体衝突多様体上の流れは、三体衝突多様体の胴体部分に無限に巻き付く。

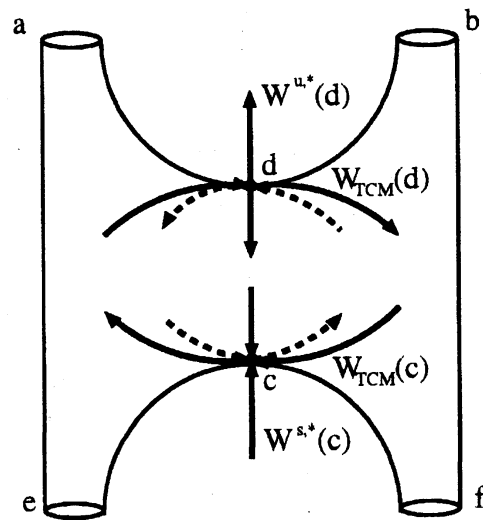
この結果は、McGehee の結果（命題 10.1）[2] と全く同じである。

原子物理学として興味があるのは、 ξ が大きい場合であり、上の極限とは逆である。そこで、 ξ が大きい場合にどのようなことが起こるか調べてみよう。まず、臨界点 c の不安定多様体が三体衝突多様体にどのように絡まるのか見てみる。図 2(a) に $Z = 1, \xi = 0.1$ の場合、(b) に $Z = 1, \xi = 6$ を載せてみた。確かに、 ξ の大きい (b) の方が胴体部分に絡まる回数が少ない。

次に、三体衝突軌道の幾何学構造を明らかにしよう。ここで使った手法は文献 [6] のものである。三体衝突軌道そのものを扱うのは大変なので、 (s, v, w) 空間において三体衝突軌道が Poincaré 断面 $s = 0$ を横切った時の軌跡を扱うことにしよう。ただし、このとき全エネルギー E は -1 に固定しておく。図 3 および 5 に三体衝突軌道の様子が描かれている。図 3 は $Z = 1, \xi = 1$ の場合である。図 3(a) には未来において三体衝突をする三体衝突軌道の軌跡が描かれている。 $v = 0, w = \pm 0.4$ 辺りにある三角形はトーラスを表している。このパラメータ値においてはトーラスが存在する。特徴的なのは三体衝突軌道は Poincaré 断面 $s = 0$ において 1 パラメータ族をなして存在していることである。図 3(b) には過去において三体衝突する三体衝突軌道の軌跡も図 3(a) に併せて描かれている。特徴的なのは、トーラスの領域を除いて、未来に三体衝突する三体衝突軌道の軌跡と過去に三体衝突する三体衝突軌道の軌跡とが横断的に交わっている点である。図 4 は図 3 に描かれているトーラスの最外部にある 6 周期の周期点から出る安定多様体 (図 4(a)) と不安定多様体 (図 4(b)) が描かれている。これらの安定・不安定多様体は図 3 における $w^2 + W(0)^{-1}v^2 = 1$ の楕円の上に三体衝突軌道が集積する点へと伸びていることに注意していただきたい。図 5 にはヘリウムの場合 ($Z = 2, \xi \approx 4 \times 1840$) の場合の三体衝突軌道の軌跡が描かれている。この場合トーラスは存在しない。図 5(a) が未来において三体衝突する三体衝突軌道の軌跡、図 5(b) が過去において三体衝突する三体衝突軌道の軌跡が描かれている。特徴的なのは、未来に三体衝突する三体衝突軌道の軌跡と過去に三体衝突する三体衝突軌道の軌跡が完全に横断的に交わっていることである。図 3 と図 4 を見ると、未来に三体衝突する三体衝突軌道の軌跡の 1 パラメータ族の方向はトーラスに付随する周期点の安定多様体の方向に沿っていたこと、また逆に過去に三体衝突する三体衝突軌道の軌跡の 1 パラメータ族の方向は

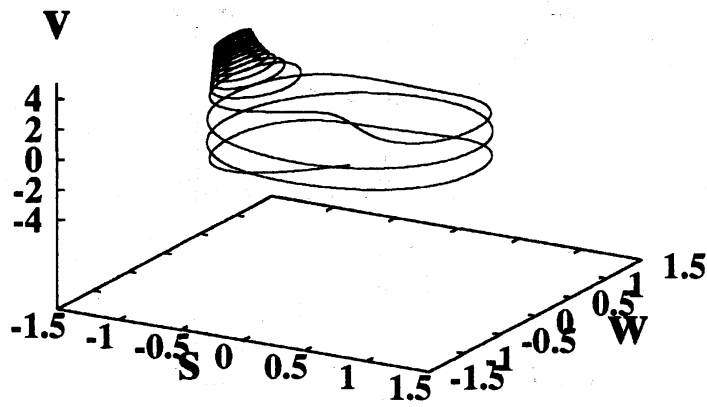


(a)

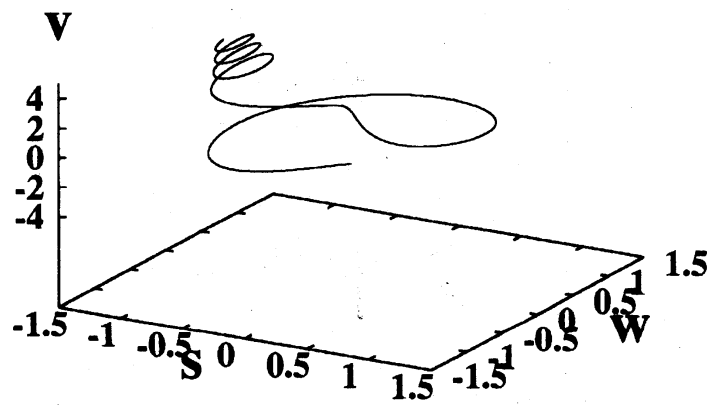


(b)

図 1: 三体衝突多様体: (a) 三体衝突多様体。二つの臨界点 c と d がある。
 (b) 臨界点 c と d の安定・不安定多様体: $\mathcal{W}(c)$ と $\mathcal{W}(d)$ を描いてある。
 $\dim(\mathcal{W}^s(c)) = 2$, $\dim(\mathcal{W}^u(c)) = 1$, $\dim(\mathcal{W}^s(d)) = 1$, $\dim(\mathcal{W}^u(d)) = 2$.



(a)



(b)

図 2: 臨界点 c の三体衝突多様体上の不安定多様体 : (a) $(Z, \xi) = (1, 0.1)$,
 (b) $(Z, \xi) = (1, 6)$.

トーラスに付随する不安定多様体の方向に沿っていたことを思い起こすと、図5に見られる横断的な交わりは安定多様体と不安定多様体の横断的な交わり、つまり双曲性を示唆しているように見える。実際、Poincaré断面上に初期点の集まりであるパッチを用意して、時間発展させると、確かに上で示唆されるような双曲性を示す振る舞いをしていることが数値的に確認できている。

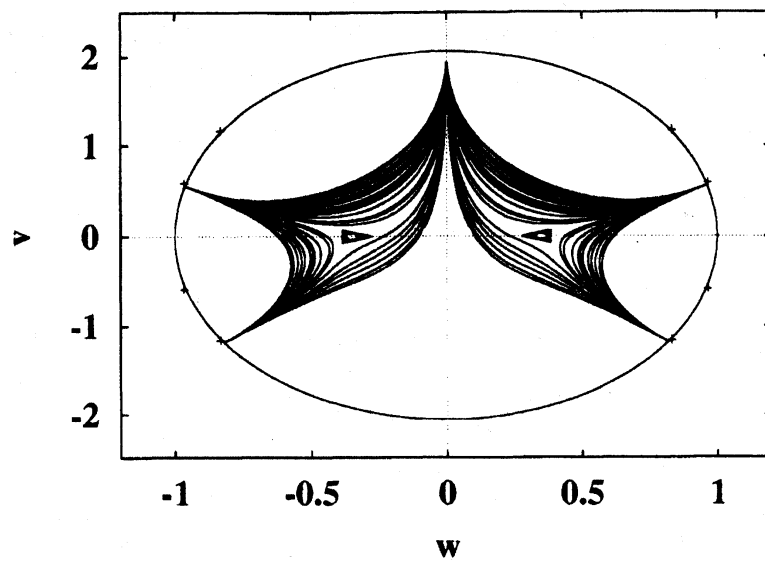
このような質量比 ξ を増加させると双曲性が現れているように見えるのは次のようにして理解される。図6(a)と(b)に $(Z, \xi) = (1, 1)$ と $(Z, \xi) = (1, 7)$ の場合について、Poincaré断面上における三体衝突軌道の軌跡と三体衝突多様体上における臨界点 c の不安定多様体の一つの分枝が描かれている。一目して分かるように、Poincaré断面上の三体衝突軌道の軌跡が $w^2 + W(0)^{-1}v^2 = 1$ の楕円に集積している点は実は臨界点 c の安定・不安定多様体のブランチが $s = 0$ の面を横切る点であることである。そして、その点の数は明らかにPoincaré断面上にあるトーラスの存在と関係している。トーラスが存在するとその最外部の周期点から伸びる安定・不安定多様体が $w^2 + W(0)^{-1}v^2 = 1$ の楕円に到達する点は多くなる。 $Z = 1, \xi = 1$ の場合はそれらの点の数は10であり、ヘリウムの場合は6である。この振る舞いは、直接的に三体衝突多様体上における臨界点の安定・不安定多様体の三体衝突多様体の胴体部分に絡まる巻き数と関係している。おもしろいことに質量比を大きくしていくと、この巻き数は単調減少して飽和していく。つまり、質量比を十分大きくしておけば、ヘリウムの場合に見たような双曲的な振る舞いが見えることを示唆する。双曲性を示すぎりぎりの ξ の値を ξ_c とすることにしよう。この値はもちろん Z によっている。図7にその ξ_c の Z 依存性を示した。面白いことに、 ξ_c は Z に対して完璧と言えるほど線形に振る舞う。

3 まとめ

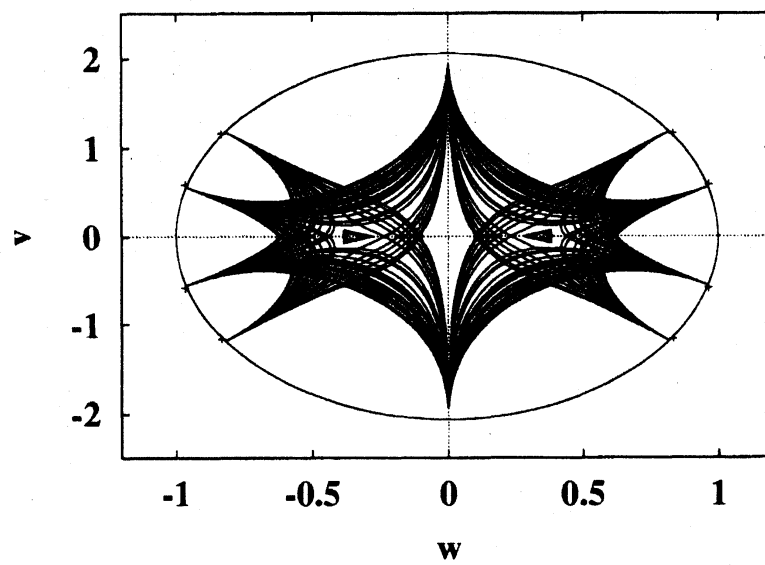
以上、三体衝突多様体の構造と三体衝突軌道の様子を数値的に調べた結果ををまとめると以下ようになる。

予想1： $\xi > \xi_c(Z)$ の時に系が双曲系となる閾値 $\xi_c(Z)$ が存在する。

この結果は、 $H^-, He, Li^+, Be^{2+}, \dots$ は共線形 eZe 配置で双曲系であること

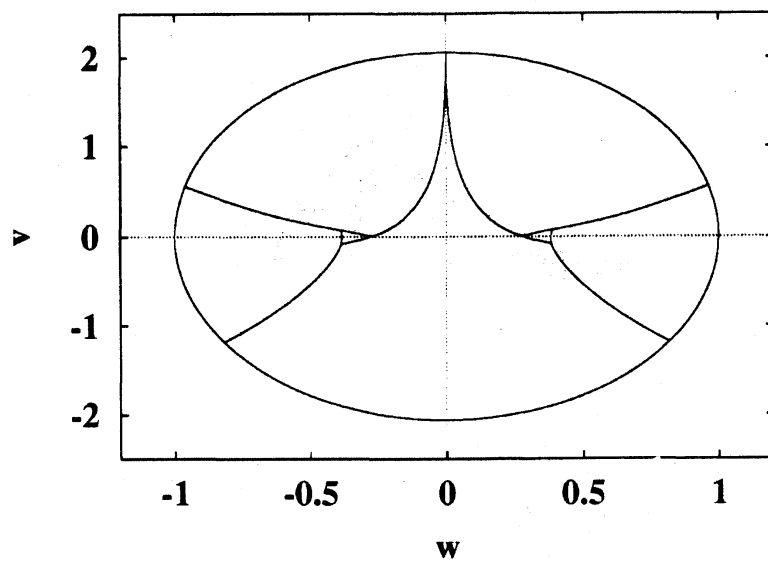


(a)

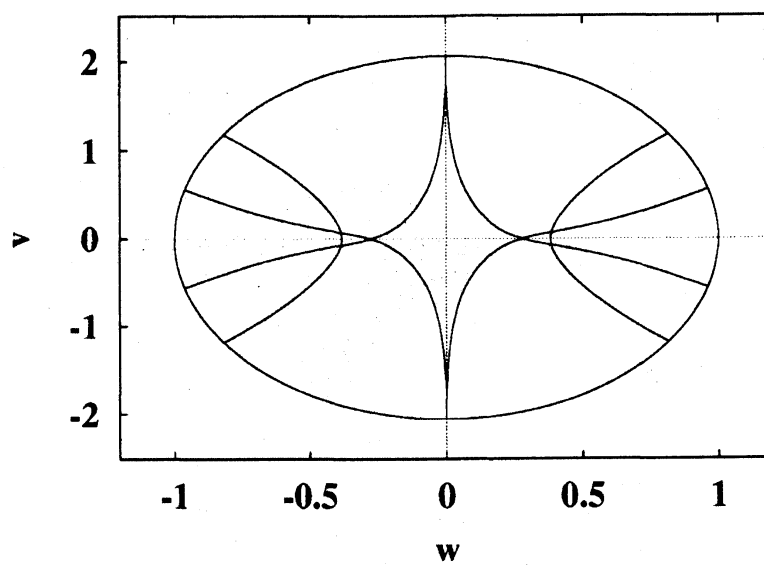


(b)

図 3: $Z = 1, \xi = 1$ の場合の三体衝突軌道の様子: 三角形の部分はトーラスである。

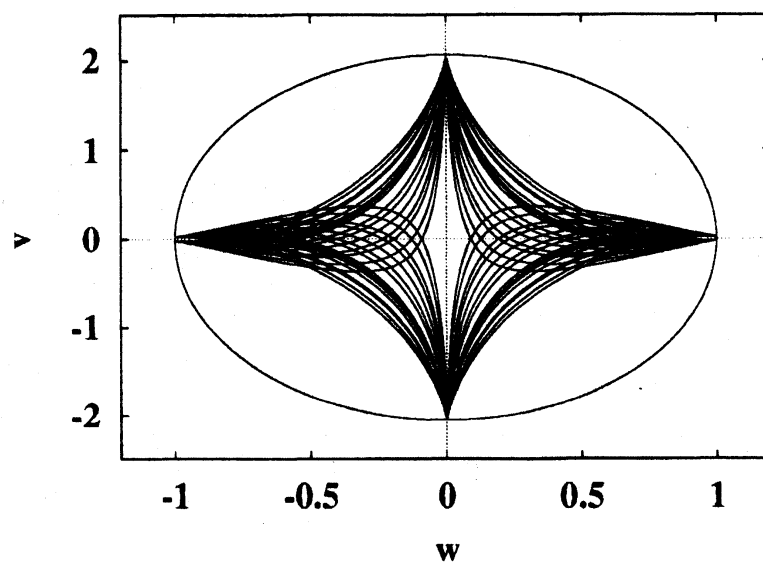
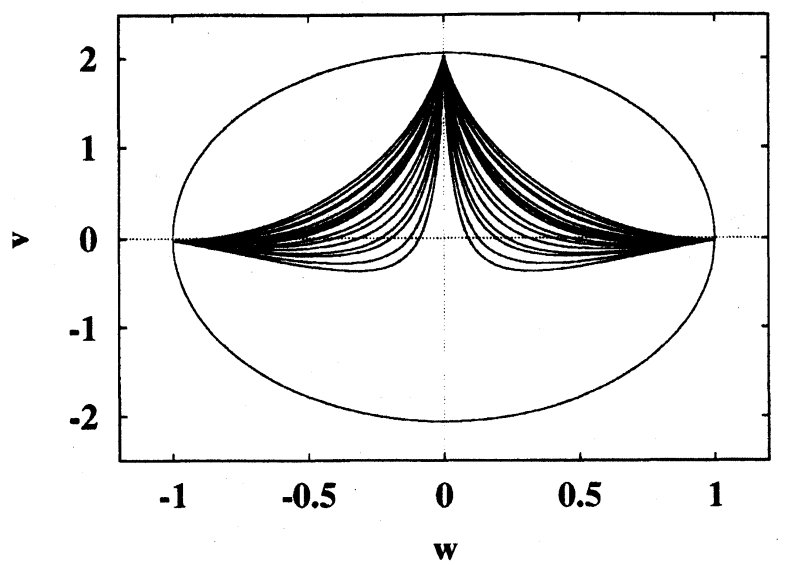


(a)



(b)

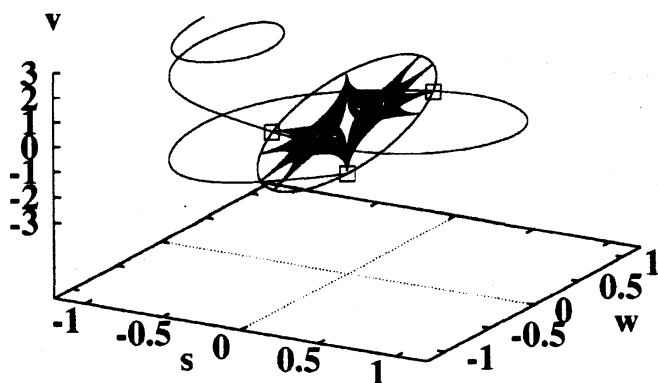
図 4: $Z = 1, \xi = 1$ の場合のトーラスの最外部にある周期点からでる安定・不安定多様体: (a) 安定多様体、(b) 不安定多様体



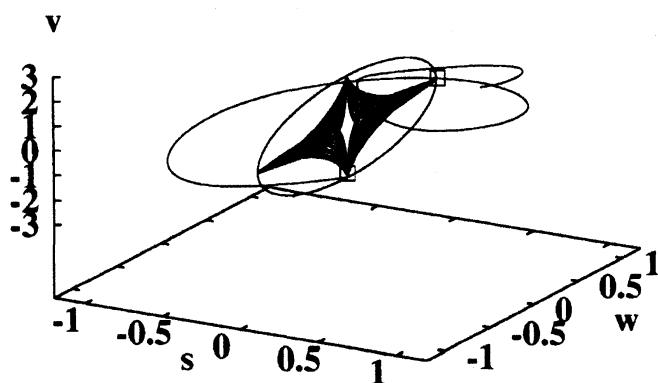
(a)

(b)

図 5: ヘリウムの場合の三体衝突軌道の様子



(a)



(b)

図 6: 三体衝突多様体と Poincaré 断面上の三体衝突軌道の様子：臨界点 c の不安定多様体の一つのブランチも描画してある。(a) $(Z, \xi) = (1, 1)$. (b) $(Z, \xi) = (1, 7)$. 臨界点 c の不安定多様体の一つのブランチが Poincaré 断面 $s = 0$ を横切る点には四角形を配置してある。

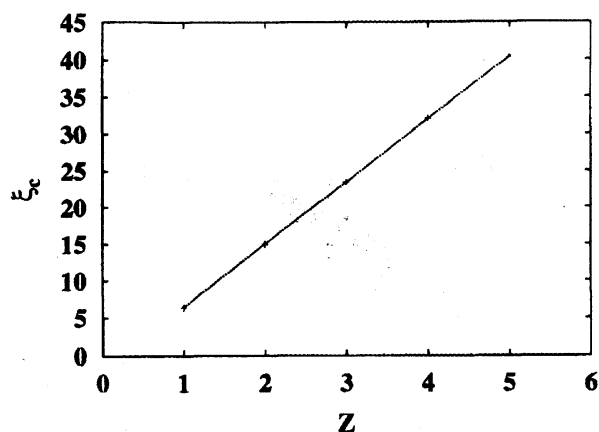


図 7: 閾値 ξ_c の Z 依存性：ほぼ線形である。

を示唆する。

予想 2：上の閾値 ξ_c の値で、三体衝突多様体上の臨界点 c の安定多様体（不安定多様体）と d の不安定多様体（安定多様体）が縮退しているだろう。

ここに挙げた結果の詳細は文献 [5] にある。

参考文献

- [1] Bai Z-Q, Gu Y and Yuan J-M 1998 *Physica D* **118** 17
- [2] McGehee R 1974 *Invent. Math.* **27** 191
- [3] Mikkola S and Tanikawa K 1999 *Celst.Mech.Dyn.Astron.* **74** 287
- [4] Mikkola S and Tanikawa K 1999 *Mon.Not.R.Astron.Soc.* **310** 745
- [5] Sano MM 2004 *J.Phys.A* **37** 803
- [6] Tanikawa K and Mikkola S 2000 *Chaos* **10** 649
- [7] Yoshida H 1990 *Phys.Lett.A* **150** 262