

wM -空間に関連する問題

愛媛大 白城 高教

はじめに M -空間およびその一般化である M^* -, $M^\#$ -, wM -, $w\Delta$ -空間の定義をのべる。位相空間 X の被覆の列 $\{\mathcal{U}_i \mid i=1, 2, \dots\}$ に対して次の 2 つの条件を考える。

(M₁) ある点 $x \in X$ と任意の i (自然数) に対して

$x_i \in St(x, \mathcal{U}_i)$ をみたす点列 $\{x_i\}$ は cluster point をもつ。

(M₂) ある点 $x \in X$ と任意の i に対して $x_i \in St^2(x, \mathcal{U}_i)$

をみたす点列 $\{x_i\}$ は cluster point をもつ。

ここで $St^2(x, \mathcal{U}_i) = St(St(x, \mathcal{U}_i), \mathcal{U}_i)$ である。

本文において、(完全)正則空間や正規空間の場合には T_1 -分離公理がみたされているものとする。 X を位相空間とするとき、 X が M -空間であるとは、(M₁) 条件をみたす X の開被覆の正規列 (normal sequence) が存在するときをいう。 X が M^* -空間とは、(M₁) 条件をみたす X の局所有限な開被覆の列が存在するときをいう。 ([5])。 X が $M^\#$ -空間とは、

(M_1) 条件をみたす X の closure-preserving 閉被覆列が存在するときをいう。([13])。 X が wM -空間とは, (M_2) 条件をみたす X の閉被覆列が存在するときをいう。([6])。 X が $w\Delta$ -空間とは, (M_1) 条件をみたす X の閉被覆列が存在するときをいう。([2])。 次の diagram が知られている。

$$M \Rightarrow M^* \Rightarrow M^\# \Rightarrow wM \Rightarrow w\Delta$$

一方 $M \not\Leftarrow M^*$, $wM \not\Leftarrow w\Delta$ を示す例が知られている。([10], [6])。

問1. $M^\#$ -空間であって M^* -空間でないものが存在するか。 wM -空間であって $M^\#$ -空間 (もしくは M^* -空間) でないものが存在するか。

正規 M^* -空間は M -空間であることが Ishii [5] において証されているが次は未解決である。

問2. (Ishii [6])。 正規 wM -空間は M -空間であるか。

X が正規 $w\Delta$ -空間であるとき, $w\Delta$ -空間を定義する (M_1) 条件をみたす閉被覆列 $\{\mathcal{U}_i\}$ (之を $w\Delta$ の定義列ということにする) において, 各 $\mathcal{U}_i$ が局所有限ならば X は M -空間になる。

問3. X が正規かつ point-compact な $w\Delta$ -空間ならば X は M -空間であるか。

完全正則 (completely regular) な M^* -空間が完備な uniformity をゆるすならば paracompact M -空間である ([12] Lemma 3.6 により明らか) が, これに関連し

問 4. 完全正則な M^* -空間 (または wM -空間) が完備な uniformity をゆるすならば paracompact (従って M -空間) であるか。

次に距離付けにかんする問題をあげる。

空間 X が G_δ -diagonal をもつための条件は X の開被覆の列 $\{Q_i\}$ が存在して, X の各点 x に対し $\bigcap_i St(x, Q_i) = \{x\}$ をみたすことである。 X が $\overline{G}_\delta$ -diagonal をもつとは, X の開被覆の列 $\{Q_i\}$ が存在して, X の各点 x に対して, $\bigcap_i \overline{St}(x, Q_i) = \{x\}$ をみたすことをいう。 [7] において,

空間 X が距離づけ可能 $\iff X$ は wM で $\overline{G}_\delta$ -diagonal をもつ。が知られている。

問 5. (Ishii [6])。正規 wM -空間が G_δ -diagonal をもつならば距離づけ可能であるか。

所でこの問 5 は wM -空間の条件を強めて M -空間としても未解決である。そしてこの場合は次の問 6 と同値であることが分かる。

問 6. 正規, 可算コンパクト空間が G_δ -diagonal をもつならば距離づけ可能であるか。

Heath は [14] において

「 M -空間が G_δ -diagonal をもつならば developable か。」
という問題を提出しているが、空間を Hausdorff 又は
正則空間に限定するとき、次と同値になる。

問 6. Hausdorff (又は正則), 可算コンパクト空間が
 G_δ -diagonal をもつならば距離付け可能であるか。

X の開集合のある族 $\mathcal{U}$ が X の pseudobase であるとは
 X の各点 x に対し $\bigcap \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\} = \{x\}$ がみたされ
るときをいう。次に X の各点 x に対し x をふくむ X の部分
集合の族 $\mathcal{N}_x$ があたえられ、有限乗法的であるとする。 $\mathcal{N} =$
 $\bigcup_{x \in X} \mathcal{N}_x$ が X の weak base であるとは、

$\mathcal{P}(\subset X)$ が開集合 $\Leftrightarrow \forall x \in X - \mathcal{P}, \exists Q \in \mathcal{N}_x, \mathcal{P} \cap Q = \emptyset$
が成立つときをいう。 ([1])。

Hausdorff M^* -空間が可算 (point-countable) pseudobase
をもつならば距離付け可能であるか ([12])。

問 7. Hausdorff M^* - (又は wM -) 空間が可算 (pseudo-)
base をもつならば距離付け可能であるか。

この問は次と同値である。

「正則 M^* - (又は wM -) 空間が可算 weak base をもつ
ならば距離付け可能であるか。」

Burke の問題 ([3]) は問 7 に関連している。

問 8. (Burke). 正則 $w\Delta$ -空間が真可算な基をもつならば developable であるか。

かりに問 8 が肯定的にとかれるならば, 問 7 における「Idausdorff $M^{\#}(wM)$ -空間が真可算な基をもつならば距離付け可能か」の部分も肯定的にとかれることになる。

距離空間の quotient s -image である空間を q - s 空間であるという ([4]). [12] において次のことが証される。「正則 $M^{\#}$ -空間が q - s 空間 ならば距離付け可能である。」

問 9. 正則 $M^{\#}$ - (又は wM -) 空間が q - s 空間 ならば距離付け可能であるか。

次の条件を (b) とする: X の開被覆列 $\{U_i\}$ が存在して, X の任意のコンパクト集合 K に対し, $x_i \in St(K, U_i)$ ($i=1, 2, \dots$) をみたす点列 $\{x_i\}$ は cluster point をもつ。

上でコンパクトの代りに可算コンパクトを用いて条件 (c) を定義できる。これらの条件をみたす空間に於いて, wM -空間は類似した種々の距離付け定理がえられる。明らかに wM -空間はこれらの条件をみたし, またこの条件をみたす空間は $w\Delta$ である。 $w\Delta$ -空間は必ずしもこの条件をみたさないが,

問 10. 条件 (b) (又は (c)) をみたす空間は wM であるか。
は未解決である。

参考文献

- [1] A. Arhangel'skii: Mappings and spaces. Russian Math. Surveys. 21 (1966), 115-162.
- [2] C. Barges: On metrizable of topological spaces. Canad. J. Math. 20 (1968), 795-804.
- [3] D. Burke: On p -spaces and $w\Delta$ -spaces. Pacific J. Math. 35 (1970), 285-296.
- [4] T. Hoshina: On the quotient s -images of metric spaces. Sci. Rep. T.K.D. Sect A 10 (1970), 43-46.
- [5] T. Ishii: On M - and M^* -spaces. Proc. Japan Acad. 44 (1968), 1028-1030.
- [6] T. Ishii: On wM -spaces. I, II. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 5-15.
- [7] T. Ishii and T. Shiraki: Some properties of wM -spaces. Proc. Japan Acad. 47 (1971), 167-172.
- [8] E. Michael and F. G. Slaughter: Σ -spaces with a point-countable separating open covers are σ -spaces. (to appear)
- [9] K. Morita: Products of normal spaces with metric spaces. Math. Ann. 154 (1964), 365-382.

- [10] K. Morita: Some properties of M -spaces. Proc. Japan Acad. 43 (1967), 869-872.
- [11] A. Okuyama: On metrizability of M -spaces. Proc. Japan Acad. 40 (1964), 176-179.
- [12] T. Shiraki: M -spaces, their generalizations and metrization theorems. Sci. Rep. T.K.D. Sect A 11 (1971), 57-67.
- [13] F. Siniwec and J. Nagata: A note on nets and metrization. Proc. Japan Acad. 44 (1968), 623-627.
- [14] Proposed problems in General topology and its applications. 1 (1971)