

ウルトラ超函数の特異性の 分解について.

東大 理 森 本 光 生

この小文の目的は, ウルトラ超函数の(整函数と法としての)特異性の分解に関するいくつかの結果を報告することである. 我々のこの理論は, 佐藤超函数に対する層 $\mathcal{C}$ の理論と平行している. (層 $\mathcal{C}$ に関しては, [3] および [4, 5] を参照せたい.) ウルトラ超函数 (ultra-hyperfunction) は, [2] において *ultradistribution cohomologique* の名前で呼ばれていたことに注意しておく.

V を n 次元実ユークリッド空間とし, その複素化を $V_{\mathbb{C}} = V \times \sqrt{-1}V$ で表わす. $\mathcal{O}$ と, $V_{\mathbb{C}}$ 上の正則函数芽のなす層とする. $V_{\mathbb{C}}$ の開集合 Ω に対し, $\mathcal{O}(\Omega)$ で, Ω 上の正則函数全体のなす空間を表わす. $V_{\mathbb{C}}$ の局所閉集合 F に対し, 層 $\mathcal{O}$ に係数をもつ k 次の相対コホモロジー空間と,

$$H^k[F] \cong H_F^k(\Omega; \mathcal{O})$$

で表わす. ただし, Ω は F とその閉集合として含む $V_{\mathbb{C}}$ の開集合である. V 上のウルトラ超函数のなる空間 $\mathcal{U}(V)$ とは, コンパクト凸な底をもつ柱状領域に台をもち, $\mathcal{O}$ に係数をもつ n 次の相対コホモロジー空間の帰納的極限であると定義する. すなわち,

$$\mathcal{U}(V) = \lim_{G \subset V} \text{ind } H^n[T(G)]$$

である. $\equiv$ で $T(G) = V \times \sqrt{-1} G$, かつ帰納的極限は, G が V のコンパクト凸集合を動くとき, 自然な写像

$$H^n[T(G)] \longrightarrow H^n[T(G')], \quad G \subset G'$$

に従って考えられているのである. 我々は, 論文[2]において, ウルトラ超函数の空間 $\mathcal{U}(V)$ は, $V_{\mathbb{C}}$ 上の解析的汎函数の空間 $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})'$ および V 上の佐藤超函数の空間 $\mathcal{E}(V) = H^n[T(0)]$ をその部分空間として含むことを示した. $\equiv$ で, $T(0) = V \times \sqrt{-1} 0 = V$ である.

V^* でベクトル空間 V の双対空間を表わし, $\langle, \rangle$ で $V \times V^*$ 上の標準的な内積を表わす. V^* の原点と端点に ∞ 半直線の全体を S_{∞}^* で表わす:

$$S_{\infty}^* = (V \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^+.$$

S_∞^* は, $n-1$ 次元球面と同相であり, “無限遠余球” とも呼ばれるべきものである. $\xi \in V^*$, $\xi \neq 0$ に対し, ξ_∞ で V^* の原点と端点とし ξ と通る半直線を表わす. 写像 $\xi \mapsto \xi_\infty$ は, 標準的射影

$$p: V^* \setminus (0) \longrightarrow S_\infty^*$$

と一致する. S_∞^* の部分集合 I が凸であるとは, 錐 $p^{-1}(I)$ が凸なものと定義する. $D(I)$ で, S_∞^* の部分集合 I の (非正) 双対錐を表わす:

$$D(I) = \{x \in V; \langle x, \xi \rangle \leq 0, \forall \xi \in p^{-1}(I)\}.$$

もし $I \supset J$ であれば, $D(I) \subset D(J)$ である. $x \in V$ に対し, $D(I) + x$ で $D(I)$ を x だけ平行移動して得られる錐を表わす. S_∞^* の凸開集合 I に対し,

$$\Psi_1(I) = \lim_{x \in V} \text{ind} H^n[T(D(I) + x)]$$

とおく. ただし, 帰納的極限は自然な写像

$$H^n[T(D(I) + x)] \longrightarrow H^n[T(D(I) + x')],$$

$$T(D(I) + x) \subset T(D(I) + x')$$

に従ってとられる. もし I と J が S_∞^* の2つの凸開集合で, $I \supset J$ なるものとすると, 写像

$$p_J^I: \Psi_1(I) \longrightarrow \Psi_1(J)$$

が, 自然な写像

$$H^n[T(D(I) + \chi)] \longrightarrow H^n[T(D(J) + \chi)]$$

の帰納的極限として定義される。写像 p_J^I が“鎖”の条件とみたすことは明らかである。また、 S_∞^* の凸開集合の全体は、 S_∞^* の開集合の族の基底となるから、 $\Psi_1(I)$ と p_J^I は S_∞^* 上の準層 Ψ_1 を定める。準層 Ψ_1 に対応する層を Ψ と書く。これらの準層、層は $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ -加群の構造をもっている。層 Ψ に対し次の定理が成立する。

定理 1 S_∞^* の凸開集合 I 上の層 Ψ のセクションの空間 $\Psi(I)$ は次のようにして与えられる。

$$\Psi(I) = \lim_{I' \subset\subset I} \text{proj } \Psi_1(I'),$$

ただし、 I' は I の相対コンパクトな部分集合で凸開集合なるものの全体を動く。

我々の層 Ψ は、ウルトラ超函数の（整函数と法とした）特異性と特徴付けるのに役立つ。整函数 f は次のようにして 1 つのウルトラ超函数 $\rho(f)$ と同一視することができる：

$$\rho: \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\text{制限}} \mathcal{A}(V) \hookrightarrow \mathcal{B}(V) \hookrightarrow \mathcal{U}(V).$$

＝ じ、 $\mathcal{A}(V)$ は V 上の実解析的函数全体のなる空間を表わす。上の 3 つの写像は単射であるから、その合成写像 ρ

もまた単射である。 π の ρ により $\mathcal{O}(V_c)$ と $\mathcal{U}(V)$ の部分空間とみなすのである。

今度は、 $\mathcal{U}(V)$ から、 S_∞^* 上の Ψ のセグメンテーションの空間 $\Psi(S_\infty^*)$ の中への写像 σ と構成しよう。 V のコンパクト凸集合 G と、 S_∞^* の本質的に凸な開集合 I に対して、 V の点 x が $G \subset D(I) + x$ を満足するものが存在する。 したがって、自然な写像

$$H^n[T(G)] \longrightarrow H^n[T(D(I) + x)]$$

が定義され、 π の帰納的極限として写像

$$\sigma_I: \mathcal{U}(V) \longrightarrow \Psi(I)$$

が定義される。 もし J と別の S_∞^* の本質的に凸な開集合とすると次の可換図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\sigma_I} & \Psi(I) \\
 \mathcal{U}(V) & & \searrow p_{I \cap J}^I \\
 & \searrow \sigma_J & \Psi(I \cap J) \\
 & & \nearrow p_{I \cap J}^J \\
 & \Psi(J) &
 \end{array}$$

したがって写像 σ_I とはり合わせて、写像

$$\sigma: \mathcal{U}(V) \longrightarrow \Psi(S_\infty^*)$$

が定義できる。 π のとき ρ の定理が成立する。

定理 2 n 次の $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ -加群の準同型の系列は完全である:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{f} \mathcal{U}(V) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{I}(S_{\infty}^*) \longrightarrow 0.$$

S_0 で, V の原点と端点とする半直線の全体を表わす. 自然に S_0 は $n-1$ 次元球面と同相になる:

$$S_0 = (V \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^+.$$

S_0 は "無限小球" とでも呼ばれるべきものである. $x \in V$, $x \neq 0$ に対して, $x0$ で x を含む S_0 の元 (すなわち半直線) を表わす. x に $x0$ を対応させる写像 q は, 標準射影

$$q: V \setminus \{0\} \longrightarrow S_0.$$

である. S_0 の部分集合 Γ が凸であるとは, 錐 $q^{-1}(\Gamma)$ が凸なものと定義する. S_0 の凸開集合 Γ に対し,

$$\mathcal{P}_1(\Gamma) = \lim_{x \in V} \text{ind } \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x))$$

とおく. ただし, この帰納的極限は, 制限写像

$$\mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x)) \longrightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x')),$$

$$T(q^{-1}(\Gamma) + x) \supset T(q^{-1}(\Gamma) + x')$$

に従ってとられている. Δ を S_0 の凸開集合で $\Gamma \supset \Delta$ なるものとする. このとき, 写像

$$j_{\Delta}^{\Gamma} : \mathcal{P}_1(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$$

と、制限写像

$$\mathcal{O}(T(j_{\Delta}^{\Gamma}(\Gamma) + x)) \longrightarrow \mathcal{O}(T(j_{\Delta}^{\Gamma}(\Delta) + x))$$

の帰納的極限として定める. 明らかに, $\mathcal{P}_1(\Gamma)$ と j_{Δ}^{Γ} は S_0 上の準層 $\mathcal{P}_1$ と定義する. $\mathcal{P}$ で準層 $\mathcal{P}_1$ に同伴する層を表わす. S_0 の凸開集合 Γ 上の $\mathcal{P}$ のセクションの空間 $\mathcal{P}(\Gamma)$ は, 次のように与えられる:

$$\mathcal{P}(\Gamma) = \lim_{\Gamma' \subset \subset \Gamma} \text{proj } \mathcal{P}_1(\Gamma'),$$

ただし, Γ' は Γ の相対コンパクト部分集合で凸開集合なるものの全体と動く. S_0 の連結開集合 Γ が, $\Gamma \cap (-\Gamma) = \emptyset$ なる条件をみたせば, $\mathcal{P}(\Gamma) = \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ となる.

コホモロジーの余境界写像として, "境界値" 写像

$$\delta_{\Gamma} : \mathcal{P}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

を定義することができる. ことに依りて, 次の定理が成立する:

定理 3. S_0 の凸開集合 Γ に対し, Γ^* で S_{∞}^* の凸開集合で,

$$\overline{(j_{\Delta}^{\Gamma}(\Gamma))} = -D(\Gamma^*)$$

をみたすものが唯一つ存在する. ことに $\overline{(\quad)}$ で $(\quad)$ の閉包を表わした. ウルトラ超函数 φ が,

$$\delta_{\Gamma} : \mathcal{P}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

の像に属するための必要かつ十分条件は, $\sigma(\varphi)$ の台が Γ^* に含まれることである.

さて今度は, Γ が S_0 の相対的に開いた凸集合としよう.
すなわち, 錐 $\mathfrak{g}^{-1}(\Gamma)$ が $\mathfrak{g}^{-1}(\Gamma)$ の生成する V の線形部分多様体の中で開いているとする. $\text{codim } \Gamma$ で, 上の線形部分多様体の V における余次元をあらわす. n のとき,

$$H_{\Gamma}^k(S_0; \mathcal{P}) = \lim_{x \in V} \text{ind} H^k[T(\mathfrak{g}^{-1}(\Gamma) + x)]$$

が成立する. また次の消滅定理が成立することも注意してあ
こう:

$$H_{\Gamma}^k(S_0; \mathcal{P}) = 0 \quad k \neq \text{codim } \Gamma.$$

このような一般の場合にも, “境界値” 作用素

$$\delta_{\Gamma} : H_{\Gamma}^{\text{codim } \Gamma}(S_0; \mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

が定義され 次の定理が成立する:

定理 3'. Γ と S_0 で相対的に開いた凸集合とする. ウル
トラ超函数 φ が

$$\delta_{\Gamma} : H_{\Gamma}^{\text{codim } \Gamma}(S_0; \mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

の像に属するための必要かつ十分条件は, $\sigma(\varphi)$ の台が Γ^* に含まれることである.

注意 層 $\mathcal{E}$ の部分層 $\tilde{\mathcal{E}}$ と層 $\mathcal{F}$ の部分層 $\tilde{\mathcal{F}}$ を次のように定義する: α が得る: S_∞^* の凸開集合 I に対し,

$$\tilde{\mathcal{E}}(I) = H^n[T(D(I))]$$

と置く. S_∞^* の二つの凸開集合 I と J で, $I \supset J$ なるものに対し, 写像

$$\tilde{\rho}_{J,I}^{\mathcal{E}}: \tilde{\mathcal{E}}(I) \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}(J)$$

を, 自然な写像

$$H^n[T(D(I))] \longrightarrow H^n[T(D(J))]$$

と定義する. α とき, $\tilde{\mathcal{E}}(I)$ と $\tilde{\rho}_{J,I}^{\mathcal{E}}$ によって定義される S_∞^* 上の準層は層であり, 層 $\mathcal{E}$ の部分層である. 写像

$$\tilde{\sigma}_I: \mathcal{O}(I) \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}(I)$$

は, 自然な写像

$$H^n[T(0)] \longrightarrow H^n[T(D(I))]$$

として定義する. α の写像 $\tilde{\sigma}_I$ と I と動かして “はり合わせ” て, 写像

$$\tilde{\sigma}: \mathcal{O}(V) \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}(S_\infty^*)$$

が定義できる. α とき, 次の系列は完全である:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_c) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathcal{E}}(S_\infty^*) \longrightarrow 0$$

ここで, $\tilde{\rho}$ は制限写像である. α の系列を 定理 1, また [3] の定理 (5.1) の完全列と比較せよ.

S_0 の凸開集合 I に対し,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\Gamma) = \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma)))$$

とおく. 制限写像

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_{\Delta}^{\Gamma} : \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma))) &\longrightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Delta))), \\ T(q^{-1}(\Gamma)) &\supset T(q^{-1}(\Delta)) \end{aligned}$$

と共に考えることにより, $\tilde{\mathcal{F}}(\Gamma)$ は準層 $\tilde{\mathcal{F}}$ を定義する. この準層 $\tilde{\mathcal{F}}$ は実は S_0 上の層であり, さらに前に定義した層 $\mathcal{F}$ の部分層であることが容易に判る. “境界値” 写像

$$\tilde{\delta}_{\Gamma} : \tilde{\mathcal{F}}(\Gamma) \longrightarrow \delta\mathcal{B}(V)$$

が, 余境界作用素で定義される超函数 (hyperfunction) φ が, $\tilde{\delta}_{\Gamma}$ の像に属するための必要かつ十分条件は, $\hat{\sigma}(\varphi)$ の台が Γ^* に含まれることである. また, 定理 3' に相当する事実も成立する.

応用 いくつかの応用を記そう. 定理 2 および 3 によれば, 層 $\mathcal{B}$ のセクション $\sigma(\varphi)$ の台がウルトラ超函数 $\varphi \in \mathcal{U}(V)$ の (整函数と法とした) 特異性と特徴づけることができる. くさびの刃の型の定理が, ウルトラ超函数に対しても成立する. すなわち, 我々の上述の定理より, 直ちに次の定理が得る.

定理 4 (くさびの刃) Γ_1 と Γ_2 を S_0 の 2 つの凸開集合と取る. Γ で Γ_1 と Γ_2 の凸包をあらわす. もし $f_1 \in \mathcal{F}(\Gamma_1)$

と $f_2 \in \mathcal{P}(\Gamma_2)$ が条件

$$\delta_{\Gamma_1}(f_1) = \delta_{\Gamma_2}(f_2) \quad \text{in } \mathcal{U}(V)$$

を満足すれば, $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ が存在して, f の $\mathcal{P}(\Gamma_1)$ および $\mathcal{P}(\Gamma_2)$ への制限が各々 f_1 と f_2 と一致する. もし, Γ が S_0 と一致していれば, f は整函数である.

層 $\mathcal{U}$ を用いることにより, ウルトラ超函数に対して佐藤の基本原理 [4, 5] を示すことができる. 次の定理の解析的部分は, コーシー・コウ, レフスカヤの定理よりみらわかれる.

定理 5 $P(D)$ を m 次の定数係数線形偏微分作用素とし, $P_m(\xi)$ でその主部をあらわす. もしウルトラ超函数 φ が, 偏微分方程式 $P(D)\varphi = 0$ をみたせば,

$$\text{supp } \sigma(\varphi) \subset \{ \xi_\infty \in S_\infty^*; P_m(\xi) = 0 \}$$

となる. supp は支をいふ.

系 もし $P(D)$ が楕円型であれば, $P(D)\varphi = 0$ を満足するウルトラ超函数 $\varphi \in \mathcal{U}(V)$ は, 整函数である.

この系は, φ が超函数の場合には, [1] の定理 (VII, 1, 8) の証明の中に含まれている.

この小文にのせた結果の証明は, いずれ稿をあらためて詳述したい. また [6] はこの小文のフランス語訳である.

文献

- [1] 小松彦三郎: 佐藤超函数と定数係数線形偏微分方程式
東大セミナー - 1 - 1 N° 22 (1968)
- [2] Morimoto, M.: Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier 19 (1970), 129-153.
- [3] Morimoto, M.: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA 17 (1970), 215-239.
- [4] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations, Actes, Congrès intern. Math., 1970, Tome 2, 785-794.
- [5] 佐藤幹夫-柏原正樹: 超函数の構造 数学の歩み 15 (1970), 9-71.
- [6] Morimoto, M.: La décomposition de singularités d'ultradistributions cohomologiques. Proc. Japan Acad. 48 (1972) (近刊)