

解析的手法と篩法

名大. 中井 喜信

§1 *large sieve* についてのくわしい解説及び良い応用については本稿代の話の中で示される事でしょうから. ここでは Bombieri の平均値定理 <4> 等を改良する可能性と考えてみる. Riemann 予想その他と仮定しているため効果の程は疑問であるが.

次の記号を用意する.

a_n : 複素数 $M < n \leq M+N$ n : 整数

$$\pi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

$\mathcal{O}$: modulus f の有限集合 $f \geq 1$

χ : character defined mod. f

$G(f), G(\chi)$: 複素定数 $G(\chi) = \overline{G(\bar{\chi})}$

$\sum_{\chi: \text{mod } f}$: mod. f で定義される character χ についての和

$\sum_{\chi: \text{mod } f}^*$: mod. f で定義される 原始-character についての和

$\sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \text{mod } b}} : (a,b)=1 \text{ なる } \text{mod } b \text{ での代表系についての和}$

又通例のように

$$e(x) = e^{2\pi i x} \quad x: \text{実数}$$

$$s = \sigma + it \quad : \text{複素変数}$$

$$A = O(B) \quad |A| \ll B \quad : \text{Landau, Vinogradov の記号.}$$

とする.

さて、次の和

$$\sum_{b \in \mathcal{O}_K} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \text{mod } b}} \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot e\left(\frac{an}{b}\right) \right|^2 \quad \dots (1.1)$$

は、large sieve において大切な意味を有し

$$(1.1) \ll (X^2 + N) \cdot \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 \quad \dots (1.2)$$

(ただし $X = \max_{b \in \mathcal{O}_K} b$) なる評価が最良である事. 又、Gallagher の不等式 (<3> 式 (5))

$$\phi(1)^{-1} \cdot \sum_{\chi \text{ mod } f}^* \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot \chi(n) \right|^2 \leq f^{-1} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \text{mod } b}} \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot e\left(\frac{an}{b}\right) \right|^2 \quad \dots (1.3)$$

により

$$\sum_{b \leq X} \sum_{\chi \text{ mod } b}^* \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot \chi(n) \right|^2 \ll (X^2 + N) \cdot \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 \quad \dots (1.4)$$

である事もわかる。(しかし数列 a_n を特殊のものにすれば (1.2) の評価より良いものが期待される。以下それについて考えて

みよう。特に (4.15), (4.15'), (5.34) を見られたい。

§2. 今 $C_g(n)$ を Ramanujan の和とする。即ち

$$C_g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } g}} e\left(\frac{an}{g}\right) \quad \dots (2.1)$$

$$= \begin{cases} \sum_{\substack{d|g \\ d|n}} d \cdot \mu\left(\frac{g}{d}\right) & n \neq 0 \\ \phi(g) & n = 0 \end{cases}$$

ただし $\mu(m)$ は Möbius の函数で

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & m=1 \text{ の時} \\ 0 & m \text{ は平方因子を有する時} \\ (-1)^r & m = p_1 \cdots p_r, \quad p_j \text{ 素数, } p_j \neq p_{j'} \end{cases} \quad \dots (2.2)$$

である。これに §4

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } g}} \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot e\left(\frac{an}{g}\right) \right|^2 \quad \dots (2.3)$$

$$= \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \phi(g) \times \sum_n |a_n|^2 + \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \sum_{\substack{-N < k < N \\ k \neq 0}} \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } g}} e\left(\frac{ak}{g}\right) \cdot \sum_{n_1, n_2=k} a_{n_1} \cdot \bar{a}_{n_2}$$

$$= \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \phi(g) \times \sum_n |a_n|^2 + \int_0^1 d\alpha \cdot \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot e(n\alpha) \right|^2 \cdot \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \sum_{1 \leq k < N} 2 \cdot C_g(k) \cdot \omega 2\pi k \alpha \quad \dots (2.4)$$

である。 $M(\alpha) = \sum_{n \leq T} a_n$ に §4) Lebesgue-Stieltjes 積分を用い

更に

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \phi(\beta) \cdot \sum |a_n|^2 + \iint_M^{M+N} d\pi(x_1) \cdot d\overline{\pi}(x_2) \cdot \int_0^1 d\alpha \cdot e((x_1 - x_2)\alpha) \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} 2 \cdot g(k) \cdot \omega_{2\pi} k \alpha \\
 &= \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \phi(\beta) \cdot \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 + \iint_M^{M+N} d\pi(x_1) \cdot d\overline{\pi}(x_2) \times f(x_1 - x_2) \quad \dots (2.5)
 \end{aligned}$$

$$\text{即ち} \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} 2 \cdot g(k) \cdot \left(\frac{|x|}{k+|x|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} + i \cdot \frac{x}{k+|x|} \cdot \frac{1 - \omega_{2\pi}(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} \right) \quad (2.6)$$

を得る。ここに a_n がすべて実数ならば上式の代りに

$$\sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \phi(\beta) \cdot \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 + \iint_M^{M+N} d\pi(x_1) \cdot d\pi(x_2) \times f(x_1 - x_2) \quad \dots (2.5')$$

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} 2 \cdot g(k) \cdot \frac{|x|}{k+|x|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} \quad \dots (2.6')$$

を使っても良い。(2.3) と同法的是形と呼ぶ。

乗法的形

$$\sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} \sum_{\chi \bmod \beta} G(\chi) \cdot \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot \chi(n) \right|^2 \quad \dots (2.7)$$

について類似の事を行うと上式は

$$\begin{aligned}
 &= \iint_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \cdot \sum_{M < n_1 \leq M+N} a_{n_1} \cdot e(n_1 \alpha_1) \cdot \overline{\sum_{M < n_2 \leq M+N} a_{n_2} \cdot e(n_2 \alpha_2)} \times \\
 &\quad \times \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} \sum_{\chi \bmod \beta} G(\chi) \cdot \sum_{\substack{M < k_1, k_2 \\ j=1,2}} \chi(k_1) \cdot \overline{\chi(k_2)} \cdot e(-k_1 \alpha_1) \cdot e(k_2 \alpha_2) \\
 &= \iint_M^{M+N} d\pi(x_1) \cdot \overline{d\pi(x_2)} \times F(x_1, x_2) \quad \dots (2.8)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ (2.9) } F(\chi_1, \chi_2) = \sum_{\text{def.}} \sum_{\substack{1 \leq k_j \leq M+N \\ j=1,2}} G(\chi) \cdot \sum_{j=1,2} \chi(k_j) \bar{\chi}(k_j) \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i(\chi_1 - k_1)}{M}} - 1}{2\pi i(\chi_1 - k_1)} \cdot \frac{e^{\frac{-2\pi i(\chi_2 - k_2)}{N}} - 1}{-2\pi i(\chi_2 - k_2)}$$

を得る。

§ 3

(lemma α) Dirichlet 級数 $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-s}$ ($s = \sigma + it$) は $\sigma \geq 1 + \Delta$ なる所で絶対収束 (する時) $T \geq 2$ として

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\Delta-iT}^{1+\Delta+iT} \frac{x^s}{s} g(s) \cdot ds$$

$$+ O\left(\sum_{|x-n| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\Delta} \frac{|a_n|}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}\right)$$

$$+ O\left(\sum_{|n-x| < \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\Delta} |a_n| \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right)$$

とする。積分路は垂直な線分である。

$$\text{(lemma } \beta) \sum_{|n-x| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\frac{1}{3\Delta}} \cdot \left|\log \frac{x}{n}\right|^{-1} \ll x \cdot \log 3x$$

$$\sum_{|n-x| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\frac{1}{3\Delta}} \cdot \frac{\log n}{|\log \frac{x}{n}|} \ll x \cdot (\log 3x)^2.$$

証明は例えは <6> の附録を見られたい。

§ 4 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を Riemann の ζ -函数とする。

$\zeta(s)^{-1}$ は $\sigma > 1$ なる所で $\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s}$ ($\mu(n)$ については (2.2)) と表わされる。 $s=1$ は $\zeta(s)$ の一位の極であり、その留数は 1 である。他に特異点はない。 $\zeta(s)$ の零点は、 $-2, -4, -6, \dots$ か (これ等を自明な零点と呼ぶ) あるいは、零点 $\rho = \beta + i\gamma$ は $0 < \beta < 1$ となるか (これ等を critical zeroes と呼ぶ) である。 critical な零点については $\beta = \frac{1}{2}$ であるように予想されているがこれは未解決の問題である。この予想と (狭義の) Riemann 予想と呼ぶ。この節では次の仮定を設けよう。

仮定 (M): $\square$ critical な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ について

$$1-\epsilon \leq \beta \leq 1; \quad \frac{1}{2} \leq \gamma < 1 \text{ (定数)}$$

であり、更に任意の自然数 N に対し適当な正数 T が存在して $N < T < N+1$ であり

$$\zeta(s) \neq 0 \quad : -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \quad t = \pm T$$

$$|\zeta(s)|^{-1} \ll T^{\frac{1}{2}} \quad : -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \quad t = \pm T \quad \dots (4.2)$$

$$\sum_{\rho \neq -2, -4, \dots} \operatorname{Res}_{s=\rho} (\chi^s \cdot \zeta(s)^{-1}) \ll \begin{cases} \chi^{\frac{1}{2}+\epsilon} T^{\epsilon} & : \mu(n) \neq 0 \text{ となる } n \text{ について} \\ & |x-n| > \frac{1}{T} \text{ となる時} \\ \chi^{\frac{1}{2}+\epsilon} T^{\epsilon} + T & : \mu(n) \neq 0, |x-n| < \frac{1}{T} \text{ となる } n \text{ が存在する時} \end{cases} \quad \dots (4.3)$$

となる。

ただし ϵ は任意に小さく取れる正定数であり、 $\operatorname{Res}_{s=\rho}$ は

$s = \rho$ における留数の事である。④ = $\frac{1}{2}$ は Riemann 予想を意味する。

三 ② の lemma 達により

$$\begin{aligned} \pi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \mu(n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1 + \frac{1}{\log 3x} - iT}^{1 + \frac{1}{\log 3x} + iT} \frac{ds}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} + O\left(\frac{x \cdot \log 3x}{T}\right) \\ &\quad + O\left(\sum_{\substack{|u-v| < \frac{1}{2} \\ \mu(n) \neq 0}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) \quad \dots (4.4) \end{aligned}$$

となるが今積分路を

$$1 + \frac{1}{\log 3x} - iT, \quad -\frac{1}{2} - iT, \quad -\frac{1}{2} + iT, \quad 1 + \frac{1}{\log 3x} + iT$$

と結ぶ折線 C (右まわり) $\wedge$ と移す事に依り

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{\rho: |\rho| < T} \operatorname{Res}_{s=\rho} \frac{x^s}{s \cdot \zeta(s)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} \\ &\quad + O\left(\frac{x \cdot \log 3x}{T}\right) + O\left(\sum_{|u-v| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) \end{aligned}$$

を得る。そこで

$$|\zeta(s)|^{-1} \ll \frac{1}{1+|t|} \quad \sigma = -\frac{1}{2}$$

である事と (4.2) とから

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} \right| \ll \frac{x}{T^{\frac{1}{2}}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

を得。従って

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{\rho: |\rho| < T} \operatorname{Res}_{s=\rho} \frac{x^s}{s \cdot \zeta(s)} + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x^{-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + O\left(\sum_{|u-v| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) \quad \dots (4.5) \end{aligned}$$

を得る。

これに \$y\$ 次の式を評価しよう。

$$S = \sum_{q \leq x} \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } q}} \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \cdot e\left(\frac{an}{q}\right) \right|^2 \quad \dots (4.6)$$

(2.5') と (2.6') とから (4.5) の \$\mathcal{DT}(x)\$ は \$y\$

$$S = \sum_{q \leq x} \phi(q) \cdot \sum_{n \leq N} |\mu(n)| + \iint_0^N d\mathcal{DT}(x_1) \cdot d\mathcal{DT}(x_2) \cdot f(x_1 - x_2)$$

と \$f(x)\$

$$f(x_1 - x_2) = \sum_{q \leq x} \sum_{1 \leq k < N} c_q(k) \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{k + |x_1 - x_2|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k - |x_1 - x_2|)}{2\pi(k - |x_1 - x_2|)} \quad \dots (4.7)$$

となる。今

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Res}_{s=p} \frac{x^s}{s \cdot \zeta(s)} = \left(\operatorname{Res}_{s=p} \frac{x^s}{\zeta(s)} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

であるから、上の式から

$$\begin{aligned} S &= \sum_{q \leq x} \phi(q) \cdot \sum_{n \leq N} |\mu(n)| + \\ &+ \iint_0^N \left(\frac{dx_1}{x_1} \cdot \sum_{1 \leq k < T} \operatorname{Res}_{s=p} \frac{x_1^s}{\zeta(s)} + d_{x_1} O\left(\frac{x_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + d_{x_1} O(x_1^{\frac{1}{2}}) \right) \times \\ &\cdot \left(+ d_{x_2} O\left(\sum_{|x_1 - x_2| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_1}{x_2}|}, \log T\right)\right) \right) \\ &\times \left(\frac{dx_2}{x_2} \cdot \sum_{1 \leq k < T} \operatorname{Res}_{s=p} \frac{x_2^s}{\zeta(s)} + d_{x_2} O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + d_{x_2} O(x_2^{\frac{1}{2}}) \right) \times \\ &\cdot \left(+ d_{x_2} O\left(\sum_{|x_1 - x_2| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_2}{x_1}|}, \log T\right)\right) \right) \\ &\times f(x_1 - x_2) \quad \dots (4.8) \end{aligned}$$

となる。(4.7) の \$f(x)\$ の評価をしておくと次のようにである。

$$f(x) = \sum_{d \leq x} d \cdot \sum_{\substack{b \leq x \\ b \equiv 0 \pmod{d}}} \mu\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \sum_{\substack{1 \leq k < N \\ k \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{|x|}{k + |x|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k - |x|)}{2\pi(k - |x|)} =$$

$$= \sum_{d \leq x} d \times O\left(\frac{x}{d}\right) \times O\left(\frac{1}{d} \log \frac{N}{d}\right)$$

$$= O(x \cdot \log x \cdot \log N) \quad \dots (4.9)$$

同様に τ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot f(x_1 - x_2) = O(x \cdot \log x \cdot \log N) \quad \dots (4.10)$$

である。又

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1 - x_2) = - \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1 - x_2) \quad \dots (4.11)$$

である。又 (4.11) と (4.10) より (4.12) となる。

$$\sum_{d \leq x} \phi(d) \ll x^2 \quad \dots (4.12)$$

である。(4.10), (4.11), (4.12), (4.8) から部分積分により

$$S = O(x^2 \cdot N)$$

$$+ \int_0^N \left(\frac{dx_1}{x_1} \cdot \sum_{\substack{\alpha \in T \\ \alpha \neq p}} \frac{x_1^\alpha}{\zeta(\alpha)} + d_{x_1} O\left(\sum_{|m-x_1| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T |\log \frac{x_1}{u_1}|}, \log T\right)\right) \right) \times$$

$$\times \left(\frac{dx_2}{x_2} \cdot \sum_{\substack{\alpha \in T \\ \alpha \neq p}} \frac{x_2^\alpha}{\zeta(\alpha)} + d_{x_2} O\left(\sum_{|m_2-x_2| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T |\log \frac{x_2}{u_2}|}, \log T\right)\right) \right) \times$$

$$\times f(x_1 - x_2)$$

$$+ O\left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times O(x \cdot \log x \cdot \log N)$$

$$+ O\left(\int_0^N \left| \frac{dx_1}{x_1} \cdot \sum_{\substack{\alpha \in T \\ \alpha \neq p}} \frac{x_1^\alpha}{\zeta(\alpha)} + d_{x_1} O\left(\sum_{|m-x_1| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T |\log \frac{x_1}{u_1}|}, \log T\right)\right) \right| \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right) \times x \cdot \log x \cdot \log N \right)$$

を得る。よって

$$\int_0^N dx \cdot O\left(\sum_{|m-x| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T |\log \frac{x}{u}|}, \log T\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \leq N} \int_{|x-n| < \frac{1}{2}} O\left(\min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{T}|}, \log T\right)\right) dx \\
&= \sum_{n \leq N} \left(\int_{T^{-1} < |x-n| < \frac{1}{2}} O\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{T}|}\right) dx + \int_{|x-n| < \frac{1}{T}} O(\log T) dx \right) \\
&= \sum_{n \leq N} \left(\int_{T^{-1} < |x-n| < \frac{1}{2}} O\left(\frac{n}{T \cdot |x-n|}\right) dx + \int_{|x-n| < \frac{1}{T}} O(\log T) dx \right) \\
&= \sum_{n \leq N} O\left(\frac{n \cdot \log T}{T}\right) = O\left(\frac{N^2 \log T}{T}\right) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

よって (4.3) から

$$\begin{aligned}
&\int_0^N \frac{dx}{x} \left| \sum_{|k| < T} \operatorname{Re}_{\chi} \frac{\chi^k}{\zeta(s)} \right| \ll \\
&\ll \int_0^N \frac{dx}{x} \cdot x^{\theta+\varepsilon} T^{\varepsilon} + \sum_{n \leq N} \int_{|x-n| < \frac{1}{T}} x^{-1} T \cdot dx \\
&\ll N^{\theta+\varepsilon} T^{\varepsilon} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

よって (4.9) より

$$\begin{aligned}
S &\ll X^2 N + \left(N^{\theta+\varepsilon} T^{\varepsilon} + \frac{N^2 \log T}{T}\right)^2 X \log X \log N \\
&\quad + \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right)^2 X \log X \log N \\
&\quad + \left(N^{\theta+\varepsilon} T^{\varepsilon} + \frac{N^2 \log T}{T}\right) \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right) X \log X \log N \\
&\ll X^2 N + N^{2(\theta+\varepsilon)} X \log X \quad (T = N^{\frac{1}{2}} \text{ とおくと})
\end{aligned}$$

よって、 $\theta \geq \frac{1}{2}$ と仮定して

$$\sum_{b \leq X} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ a \leq N}} \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \cdot e\left(\frac{an}{b}\right) \right|^2 \ll X^2 N^{2(\theta+\varepsilon)} \quad (4.15)$$

を得. (1.3) から 更に

$$\sum_{b \leq X} \sum_{\chi \bmod b}^* \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \cdot \chi(n) \right|^2 \ll X^2 \cdot N^{2(\theta + \varepsilon)} \quad \dots (4.15')$$

を得る.

今 $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \cdot n^{-s}$ を Dirichlet の L -函数とす
る時. Schwartz の不等式を使う事にし (4.15') から

$$\sum_{b \leq X} \sum_{\chi \bmod b}^* \left| L(s, \chi) \right|^2 \ll X^2 \cdot |s|^2, \quad \sigma \geq \theta + \varepsilon \quad \dots (4.16)$$

を得る. 即ち

[定理] 仮定 (u) の χ に

$$\sum_{b \leq X} \sum_{\chi \bmod b}^* \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \cdot \chi(n) \right|^2 \ll X^2 \cdot N^{2(\theta + \varepsilon)}$$

および

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad (\sigma > \theta)$$

を得る.

§5 $\Lambda(n)$ を Mangoldt の函数とする.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^e, \quad p \text{ 素数}, e \geq 1 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad \dots (5.1)$$

Bombieri の平均値定理

$$\sum_{b \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a, b) = 1 \\ \bmod b}} \left| \sum_{\substack{a \leq y \\ n \equiv a \bmod b}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(b)} y \right| \ll \frac{N}{(\log N)^A} \quad \dots (5.2)$$

ただし $X \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}$, $A > 0$, $B = B(A) > 0$ について
 前回と同様の事を行おう。(5.2) は現在最高の結果である
 が、一見 Dirichlet の L-函数を含めた結果のようであるが、実
 は Riemann の ζ -函数で説明出来るのではないかと考えられ
 る事を示そう。次の仮定を置く。

仮定(1) $\square$ Riemann の ζ -函数 $\zeta(s)$ について

$$\zeta(s) \neq 0 \quad (\sigma > \theta) \quad ; \quad 1 > \theta \geq \frac{1}{2} \quad (\text{定数})$$

であり、その critical 点 $\rho = \beta + i\gamma$ については
 任意の自然数 N に対し 適当な正数 T が存在して

$$N < T < N+1 \quad \dots (5.3)$$

$$\zeta'(\sigma \pm iT) \ll T^{\frac{1}{2}} \quad -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2 \quad \dots (5.4)$$

$$\sum_{\substack{p \text{ prime} \\ |s| < T}} \chi^{\rho} \ll \begin{cases} \chi^{\theta} \log \chi \cdot \log T & : \Lambda(n) \neq 0 \text{ と } \exists \text{ する } n \text{ の } n \\ & \text{について} \\ & |x-n| > \frac{1}{T} \\ & \text{となる時} \\ \chi^{\theta} \log \chi \log T + T \log \chi & : \Lambda(n) \neq 0, |x-n| < \frac{1}{T} \text{ と} \\ & \text{ある } n \text{ が存在するとき} \end{cases} \quad \dots (5.5)$$

となる $\square$

$-\zeta'(s)$ は $s=1$ で極を有し、 $s=1$ では留数 1, $s=\rho$ では留数 -1 である事に留意されたい。 $N \geq 2X$ とし

$$E \equiv \sum_{y \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a,2)=1 \\ \text{mod } y}} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{y}}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(y)} y \right| \quad \dots (5.6)$$

とおく。

定義から

$$\begin{aligned}
E &\ll \sum_{1 \leq x} \max_{27 \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ 27 \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1)=1 \\ 27 \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| \\
&+ \sum_{1 \leq x} \max_{27 \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| -\frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1) \neq 1 \\ 27 \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| \\
&+ \sum_{1 \leq x} \max_{27 \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \frac{1}{\phi(b)} \left(y - \sum_{n \leq y} \Lambda(n) \right) \right| \\
&+ \sum_{1 \leq x} \max_{27 \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \frac{1}{\phi(b)} \sum_{n \leq 27} \Lambda(n) \right| \\
&+ \sum_{q \leq x} \max_{y < 27} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ n \leq y}} \Lambda(n) \right| \quad \dots (5.7)
\end{aligned}$$

である。第二項に関しては $\Lambda(n)$, $\phi(b)$ のよく知られた性質を用い、又 $\theta < 1$ から

$$y = \sum_{n \leq y} \Lambda(n) + O(y^\theta \cdot \log^2 y)$$

であるから

$$\begin{aligned}
E &\ll \sum_{q \leq x} \max_{27 \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ 27 \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1)=1 \\ 27 \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| \\
&+ \log^2 x \cdot (\log \log x)^2 + \log x \cdot N^\theta \cdot \log^2 N \\
&+ x \cdot \log \log x + x \cdot \log x \\
&\ll \sum_{1 \leq x} \max_{27 \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ 27 \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1)=1 \\ 27 \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| +
\end{aligned}$$

$$+ N^{\theta} \cdot \log N \cdot \log X + X \cdot \log X \quad \dots (5.8)$$

とある。今 $\chi \pmod{f}$ の character と $\chi_0 \pmod{f}$ と同じ

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{f} \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) &= \frac{1}{\phi(f)} \cdot \sum_{\substack{(n, f)=1 \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) \\ &= \frac{1}{\phi(f)} \cdot \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \pmod{f}}} \bar{\chi}(a) \cdot \sum_{2f \leq n \leq y} \Lambda(n) \cdot \chi(n) \end{aligned}$$

(χ_0 は 単位指標) である。

$$E' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \max_{\substack{(a, f)=1 \\ \pmod{f}}} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{f} \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(f)} \cdot \sum_{\substack{(n, f)=1 \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right|$$

$$= \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \cdot \max_{\substack{(a, f)=1 \\ \pmod{f}}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \cdot \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

$$\leq \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \cdot \max_{\substack{(a, f)=1 \\ \pmod{f}}} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \pmod{f}}} \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

$$= \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \cdot \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \pmod{f}}} \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

とある。Schwarz の不等式より

$$\leq \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$< \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(f)} \cdot \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得る。よって

$$E_q^2 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{2f \leq y \leq N} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(f)} \cdot \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right) \quad \dots (5.9)$$

とある。

$$E' < \sum_{b \leq X} E_b \quad \dots (5.10)$$

$$E \ll E' + N^{\Theta} \log^2 N \cdot \log X + X \cdot \log X \quad \dots (5.10')$$

となる。

以下、次の事を目標にしよう。即ち仮定(1)の χ と

$$\begin{aligned} E_b^2 &\ll \max_{\substack{2j \leq v_j \leq N \\ j=1,2}} \left| \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \text{mod } \phi(1)}} \frac{1}{\phi(1)} \cdot \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq N_j \\ j=1,2}} \chi(k_1) \cdot \bar{\chi}(k_2) \right| \cdot \log^2 N \\ &\quad + \max_{\substack{2j \leq v \leq N \\ 2j \leq u \leq N}} \left| \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \text{mod } \phi(1)}} \frac{1}{\phi(1)} \cdot \sum_{2j \leq k_2 \leq N} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)}}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{2j \leq k_1 \leq v} \chi(k_1) \right| \times \\ &\quad \times N^{\Theta} \log^3 N \\ &\quad + \phi(1)^{-1} \cdot (N^{\Theta} \log^3 N)^2 \quad \dots (5.11) \end{aligned}$$

となるはず。

(5.11)の成立を認めれば、(5.11)の第一項には character の直交性を使い、第二項の k_1 についての和に character の直交性を使ってから k_2 については自明な評価を行う事により

$$E_b^2 \ll \phi(1) \cdot \log^2 N + N^{\Theta} \log^3 N \times \log N + \frac{1}{\phi(1)} (N^{\Theta} \log^3 N)^2$$

従って

$$E_b \ll \log N \cdot (\phi(1)^{\frac{1}{2}} + \phi(1)^{-\frac{1}{2}} N^{\Theta} \log^2 N) \quad \dots (5.12)$$

を得る。従って (5.10), (5.10') から $2X \leq N$ の時仮定(1)の χ と

$$E \ll \log N \cdot (X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{1}{2}} N^{\Theta} \log^2 N) \quad \dots (5.13)$$

を得る。

さて (5.11) に より かかろう。 $\equiv \frac{2}{\pi} \beta$ lemma の $\leq$

$$\begin{aligned}
 M(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1 + \frac{1}{\log 3x} - iT}^{1 + \frac{1}{\log 3x} + iT} \frac{x^s}{s} \cdot \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds \\
 &\quad + O\left(\sum_{|x-n| > \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1 + \frac{1}{\log 3x}} \log n}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{|x-n| < \frac{1}{2}} \log n \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right)
 \end{aligned}$$

である。積分路を $1 + \frac{1}{\log 3x} - iT$, $-\frac{1}{2} - iT$, $-\frac{1}{2} + iT$, $1 + \frac{1}{\log 3x} + iT$ と結ぶ折線 Λ と取り (5.4) 及び

$$\left| -\frac{\zeta'}{\zeta}(-\frac{1}{2} + it) \right| \ll \log(2+|t|)$$

を用いる。又 lemma β を使う事にしよう

$$\begin{aligned}
 M(x) &= x + \sum_{|n| < T} \operatorname{Res}_{s=\rho} \left(\frac{x^s}{s} \cdot \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \right) \\
 &\quad + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^2 T\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{|n-x| < \frac{1}{2}} \log x \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) \\
 &= x - \sum_{|n| < T} x^{\rho} \rho^{-1} + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^2 T\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{|n-x| < \frac{1}{2}} \log x \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right)
 \end{aligned}$$

を得る。従、 τ

$$d\pi(x) = dx - \sum_{|r| < \tau} x^p \cdot \frac{dx}{x} \\ + dx \left(O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|u-x| < \frac{1}{2}} \log x \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{u}|}, \log T\right)\right) \right) \quad \dots (5.14)$$

より (2.7), (2.8) より

$$E_b^2 = \max_{2j \leq y \leq N} \left(\int_{2j}^y \left(dx_1 - \sum_{|r| < \tau} x_1^p \cdot \frac{dx_1}{x_1} + d_{x_1} \left(O\left(\frac{x_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x_1^{\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|u-x_1| < \frac{1}{2}} \log x_1 \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_1}{u}|}, \log T\right)\right) \right) \right) \right. \\ \left. \times \left(dx_2 - \sum_{|r| < \tau} x_2^p \cdot \frac{dx_2}{x_2} + d_{x_2} \left(O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x_2^{\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|u-x_2| < \frac{1}{2}} \log x_2 \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_2}{u}|}, \log T\right)\right) \right) \right) \right. \\ \left. \times F(x_1, x_2) \right) \\ \text{for } F(x_1, x_2) = \frac{1}{\Phi(1)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\Phi(1)} \cdot \sum_{2j \leq k_1 \leq y} \sum_{\substack{j=1,2 \\ k_2 \leq y}} \chi(k_1) \cdot \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i(\chi_1 - k_1)}{2\pi i(\chi_1 - k_1)} - 1}}{2\pi i(\chi_1 - k_1)} \cdot \frac{e^{\frac{-2\pi i(\chi_2 - k_2)}{-2\pi i(\chi_2 - k_2)} - 1}}{-2\pi i(\chi_2 - k_2)} \quad \dots (5.15)$$

を得。従、 τ

$$E_b^2 = \max_{2j \leq y \leq N} \left\{ \int_{2j}^y dx_1 \cdot dx_2 \cdot F(x_1, x_2) \right. \quad \dots (5.16) \\ + \int_{2j}^y \frac{dx_1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{x_2} \cdot (\sum x_1^p) (\sum x_2^p) \cdot F(x_1, x_2) \quad \dots (5.17) \\ + \int_{2j}^y d_{x_1} \left(O\left(\frac{x_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x_1^{\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|u-x_1| < \frac{1}{2}} \log x_1 \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_1}{u}|}, \log T\right)\right) \right) \times \\ \times d_{x_2} \left(O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x_2^{\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|u-x_2| < \frac{1}{2}} \log x_2 \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_2}{u}|}, \log T\right)\right) \right) \times \\ \times |F(x_1, x_2)| \quad \dots (5.18) \\ + 2 \cdot \int_{2j}^y dx_1 \cdot d_{x_2} \left(O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x_2^{\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|u-x_2| < \frac{1}{2}} \log x_2 \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_2}{u}|}, \log T\right)\right) \right) \cdot F(x_1, x_2) \quad \dots (5.19) \\ \left. + \dots \right\}$$

$$\left[\begin{aligned} & -2 \iint_{\substack{2j \\ 2j}}^y d\lambda_1 \cdot \left(\frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \cdot \Sigma \lambda_2^0 \right) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2) \quad (5.20) \\ & -2 \iint_{\substack{2j \\ 2j}}^y \left(\frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \cdot \Sigma \lambda_2^0 \right) \cdot d\lambda_1 \left(O\left(\frac{\lambda_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\lambda_1^{\frac{1}{2}} \log^2 T\right) + O\left(\sum_{|k_1 - \lambda_1| < \frac{1}{2}} \log \lambda_1 \cdot \min(\dots)\right) \right) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2) \quad (5.21) \end{aligned} \right]$$

となる。character の直交性から

$$\begin{aligned} |F(\lambda_1, \lambda_2)| &\ll \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq y \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{2j}} \min(1, \frac{1}{|\lambda_1 - k_1|}) \times \min(1, \frac{1}{|\lambda_2 - k_2|}) \\ &\quad + \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq y}} \frac{1}{\phi(2j)} \cdot \min(1, \frac{1}{|\lambda_1 - k_1|}) \times \min(1, \frac{1}{|\lambda_2 - k_2|}) \\ &\ll \begin{cases} \phi(2j)^{-1} \log^2 N + 1 & : k_1 \equiv k_2 \pmod{2j}, |\lambda_j - k_j| < \frac{1}{2} \quad j=1,2 \text{ と} \\ & \text{ある } k_1, k_2 \text{ のとき} \\ \phi(2j)^{-1} \log^2 N & : \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (5.22) \end{aligned}$$

なる評価が成立する。F(λ₁, λ₂) の各導関数についても同じ評価が成立する。

(5.18) は部分積分を行, 1. のら (5.22) 及 (4.13) から

$$(5.18) \ll \phi(2j)^{-1} \log^2 N \cdot \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \log^2 T + \frac{N^2 \log N \log T}{T} \right)^2 \quad (5.23)$$

を得る。これより (5.24) と類似の計算による。

(5.16) と評価しよう。まず

$$g(v_1, v_2) = \sum_{\lambda \neq \lambda_0} \phi(2j)^{-1} \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq v_j}} \chi(k_1) \cdot \bar{\chi}(k_2) \quad (5.24)$$

$$h_+(z) = \frac{e^{2\pi i z} - 1}{2\pi i z}$$

$$h_-(z) = \frac{e^{-2\pi i z} - 1}{-2\pi i z} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
\chi < \chi & \quad \iint_{2\gamma}^{\gamma} dx_1 \cdot dx_2 \cdot F(x_1, x_2) = \iint_{2\gamma}^{\gamma} dx_1 \cdot dx_2 \cdot \left(\iint_{2\gamma}^{\gamma} dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \right. \\
&= \iint_{2\gamma}^{\gamma} dx_1 \cdot dx_2 \cdot \left(g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \right) \Big|_{v_1=2\gamma}^{v_1=\gamma} \Big|_{v_2=2\gamma}^{v_2=\gamma} \\
&\quad + \iint_{2\gamma}^{\gamma} dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot h'_+(x_1 - v_1) \cdot h'_-(x_2 - v_2) \\
&\quad - \int_{2\gamma}^{\gamma} dv_1 \cdot \left[h_-(x_2 - v_2) \cdot (-h'_+(x_1 - v_1)) \cdot g(v_1, v_2) \right] \Big|_{v_2=2\gamma}^{v_2=\gamma} \\
&\quad - \int_{2\gamma}^{\gamma} dv_2 \cdot \left[h_+(x_1 - v_1) \cdot (-h'_-(x_2 - v_2)) \cdot g(v_1, v_2) \right] \Big|_{v_1=2\gamma}^{v_1=\gamma} \\
&= \iint_{2\gamma}^{\gamma} dx_1 \cdot dx_2 \cdot \left(g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \right) \Big|_{v_1=2\gamma}^{v_1=\gamma} \Big|_{v_2=2\gamma}^{v_2=\gamma} \\
&\quad + \iint_{2\gamma}^{\gamma} dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot \left(h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \right) \Big|_{x_1=2\gamma}^{x_1=\gamma} \Big|_{x_2=2\gamma}^{x_2=\gamma} \\
&\quad + \int_{2\gamma}^{\gamma} dx_1 \cdot \int_{2\gamma}^{\gamma} dv_2 \cdot \left(h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \cdot g(v_1, v_2) \right) \Big|_{x_2=2\gamma}^{x_2=\gamma} \Big|_{v_1=2\gamma}^{v_1=\gamma} \\
&\quad + \int_{2\gamma}^{\gamma} dx_2 \cdot \int_{2\gamma}^{\gamma} dv_1 \cdot \left(h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \cdot g(v_1, v_2) \right) \Big|_{x_1=2\gamma}^{x_1=\gamma} \Big|_{v_2=2\gamma}^{v_2=\gamma} \quad \dots (5.26)
\end{aligned}$$

$$\chi < \chi \quad \int_{2\gamma}^{\gamma} |h_{\pm}(x-v)| \cdot dx \ll \log \gamma \quad \dots (5.27)$$

$$\int_{27}^y |h_{\pm}(x-v)| \cdot dx \ll \log y \quad \dots (5.27')$$

とある事から

$$\begin{aligned} (5.16) &\ll \max_{27 \leq y \leq N} \max_{\substack{27 \leq v_j \leq y \\ j=1,2}} |g(v_1, v_2)| \cdot \log^2 y \\ &\ll \max_{27 \leq v_j \leq N} |g(v_1, v_2)| \cdot \log^2 N \quad \dots (5.28) \end{aligned}$$

を得る。

(5.17) を評価しよう。(5.22) の途中から

$$|F(x_1, x_2)| \ll \sum_{\substack{27 \leq k_j \leq y \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{27} \\ |k_j - x_j| < \frac{y}{2} \\ j=1,2}} \min(1, \frac{1}{|x_1 - k_1|}) \cdot \min(1, \frac{1}{|x_2 - k_2|}) + \frac{\log^2 y}{\phi(2)}$$

であり。(5.5) から

$$\begin{aligned} (5.17) &\ll \left(\int_{27}^N \frac{dx_1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{x_2} \left(x_1^{\theta} \log x_1 \log T + \sum_{|x_1 - x_1| < \frac{1}{T}} T \right) \right) \times \\ &\quad \times \left(x_2^{\theta} \log x_2 \log T + \sum_{|x_2 - x_2| < \frac{1}{T}} T \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\log^2 N}{\phi(2)} + \sum_{\substack{27 \leq k_j \leq N \\ |k_j - x_j| < \frac{N}{2} \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{27}}} \min(1, \frac{1}{|x_1 - k_1|}) \cdot \min(1, \frac{1}{|x_2 - k_2|}) \right) \\ &\ll \left\{ \int_{27}^N \frac{dx}{x} \left(x^{\theta} \log x \log T + \sum_{|x - x| < \frac{1}{T}} T \right) \right\}^2 \cdot \frac{\log^2 N}{\phi(2)} \\ &\quad + \sum_{\substack{27 \leq k_j \leq N \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{27}}} \left(\int_{27}^N \frac{dx_1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{x_2} \left(x_1^{\theta} \log x_1 \log T + \sum_{|x_1 - x_1| < \frac{1}{T}} T \right) \cdot \left(x_2^{\theta} \log x_2 \log T + \sum_{|x_2 - x_2| < \frac{1}{T}} T \right) \right) \times \\ &\quad \times \min(1, \frac{1}{|x_1 - k_1|}) \times \min(1, \frac{1}{|x_2 - k_2|}) \end{aligned}$$

とある。そこで (4.13) から更に

$$\begin{aligned}
& \ll \left(N^0 \log N \log T + T \times \frac{\log N}{T} \right)^2 \cdot \frac{\log^2 N}{\phi(12)} \\
& + \sum_{\substack{21 \leq k_2 \leq N \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{12}}} \left(T \cdot \frac{\log^2}{T} \cdot \frac{1}{k_1} + k_1^{\theta-1} \log N \log T \right) \left(T \cdot \frac{\log^2}{T} \cdot \frac{1}{k_2} + k_2^{\theta-1} \log N \log T \right) \\
& \ll \phi(12)^{-1} \cdot (N^0 \log N \log T + \log N)^2 \cdot \log^2 N \quad \dots (5.29)
\end{aligned}$$

と再び従って

$$(5.17) \ll \phi(12)^{-1} (N^0 \log^2 N \log T)^2 \quad \dots (5.30)$$

を得る。

(5.20) を評価しよう (5.26), (5.29) を求めた際のと同様の評価をして (5.27), (5.27') を使おうと

$$\begin{aligned}
(5.20) & \ll \max_{\substack{21 \leq y \leq N \\ 21 \leq u \leq y}} \max_{\substack{21 \leq v \leq y \\ 21 \leq u \leq y}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(12)} \cdot \sum_{\substack{21 \leq k_2 \leq N \\ 21 \leq k_1 \leq v}} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)} - 1}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{21 \leq k_1 \leq v} \chi(k_1) \right| \times \\
& \quad \times y^0 \log y \log T \times \log y \\
& \ll \max_{\substack{21 \leq v \leq N \\ 21 \leq u \leq N}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(12)} \cdot \sum_{\substack{21 \leq k_2 \leq N \\ 21 \leq k_1 \leq v}} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)} - 1}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{21 \leq k_1 \leq v} \chi(k_1) \right| \times N^0 \log^2 N \log T \\
& \quad \dots (5.31)
\end{aligned}$$

を得る。

(5.19) について $\int_{21}^y dx_1 F(x_1, x_2)$ について (5.26) の計算と同様に行い後部分積分を行えば

$$\begin{aligned}
(5.19) & \ll \max_{\substack{21 \leq v \leq N \\ 21 \leq u \leq N}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(12)} \cdot \sum_{\substack{21 \leq k_2 \leq N \\ 21 \leq k_1 \leq v}} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)} - 1}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{21 \leq k_1 \leq v} \chi(k_1) \right| \times \log N \times \\
& \quad \times \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \log^2 T + \frac{N^2 \log N \log T}{T} \right) \quad \dots (5.32)
\end{aligned}$$

を得る。

(5.21) については部分積分と、(5.29) を求めた際のと類似の計算により、

$$(5.21) \ll \frac{1}{\phi(12)} \log^2 N \times N^{\theta} \log N \cdot \log T \times \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \log^2 T + \frac{N^2 \log N \log T}{T^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (5.33)$$

を得る。

(5.23), (5.28), (5.30), (5.31), (5.32), (5.33) において $T = N^3$ とおき、 $\theta \geq \frac{1}{2}$ である事を考慮すれば (5.11) を得る。

従って

[定理] 仮定 (A) の θ と $0 \leq X \leq \frac{N}{2}$ の時

$$\sum_{0 \leq X} \max_{Y \leq N} \max_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } Y}} \left| \sum_{\substack{n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{Y}}} \Lambda(n) - \frac{Y}{\phi(12)} \right| \ll X^{\frac{1}{2}} \log N \cdot (X + N^{\theta} \log^2 N) \quad (5.34)$$

を得る。特に $\theta \leq \frac{2}{3}$ であれば

$$\sum_{0 \leq X \leq N^{\frac{2}{3}} (\log N)^{-2(A+3)}} \max_{Y \leq N} \max_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } Y}} \left| \sum_{\substack{n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{Y}}} \Lambda(n) - \frac{Y}{\phi(12)} \right| \ll N \cdot (\log N)^{-A} \quad (5.35)$$

となる。

§6 註

恐らく、 $\zeta(s) \neq 0$ ($\sigma > \theta$) $1 > \theta \geq \frac{1}{2}$ を仮定するのみで仮定 (u), 仮定 (A) の事は得られるのではないかと思われるが今の所は未知である。又、現在肯定的に知られている ζ -函数の評価からだけでは四節五節と類似の計算により肯定的な結果と得られるようには見えないう。Dirichlet の L-函数達す

べてに対して $L(1, \chi) \neq 0$ ($\theta > \theta_0$) (θ_0 は共通) となる事を仮定すれば

$$\sum_{j \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a, y)=1 \\ n \equiv a \pmod{y}}} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{y} \\ n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(y)} \right| \ll \log X \cdot (X + X^{\frac{1}{2}} N^{\theta} \log^2 N)$$

が得られるのではなかと考えられる。

なお、仮定(1)の根拠は Landau <5> により次の事が知られているからである。仮定(1)に、 $x \geq 1$ の時

$$\sum_{|n| < T} x^n = \begin{cases} -\Lambda(n) 2T + O(x \log T) & x = n \text{ の時} \\ O(x \log T) & x \neq n \text{ の時} \end{cases}$$

$x \neq n$ の時については

ここに $O(\quad)$ の中の定数は x が $\Lambda(n) \neq 0$ となる自然数を含む任意に固定した閉区間に入るかどうかにより、そのみ定まる。仮定(1)はその類似である。

文献

<1> Davenport-Halberstam : Mathematika 13 (1966) pp 91/96

the values of a trigonometrical polynomials at well spaced points

<2> Davenport : Markham (Chicago 1967)

multiplicative number theory

<3> Gallagher : Mathematika 14 (1967) pp 14/20

the large sieve

- <4> Gallagher : Mathematika 15 (1968) pp 1/6
Bombieri's mean value theorem
- <5> Landau : Mathematische Annalen 71 (1911) pp 548/564
über die Nullstellen der Zetafunktion
- <6> Prachar : Springer (Berlin 1957)
Primzahlverteilung
- <7> Titchmarsh : Oxford (at the Clarendon Press 1951)
the theory of the Riemann Zeta-function

LX I.