

Interpolation set と peak set

早大 教育 和田 淳藏

§ 1. 序

複素平面上の単位円の Lebesgue measure の閉部分集合の上で定義された任意の複素値連続関数は、単位閉円板上で連続でかつその内部（単位開円板）上で解析的な一つの関数に拡張されるという、いわゆる Rudin - Carleson の定理 ([3], [8]) に端を発して研究されてきた Interpolation set の問題は Glicksberg [13] が一般の function algebra における interpolation set の characterization を行ない、また Dirichlet algebra の場合に、interpolation set になる必要かつ十分条件を出してから "interpolation set" が function algebra において重要な位置を占めるようになった。その後 logmodular algebra またはそれより広い function algebra の class における interpolation set の研究が行われ (Hasumi [4], [5])、また essential set との関連からの研究 (Mullins [2], Ishikawa, Tomiyama and Wada [3], [9])、そのほかにも Sidney and Stout [20], Chalice

[4], Gamelin and Wilken [1] などの研究がある。この interpolation set に関連して peak set も重要な役割を演ずる。Bishop [4] によつて研究された peak point と Choquet boundary との関係に始つて、 $R(X)$ (X の外側に pole をもつ 有理関数全体の閉包としてできた function algebra) の構造をしらべる際にも一役買つてゐる (cf. Wilken [29], [31])。

ここでは Interpolation set と peak set に関する種々の研究を紹介するとともに、Ishikawa, Tomiyama and Wada ([18], [19]) で得られた結果を再検討し、その応用としていくつかの定理をあげることにする (3 節, 4 節)。

§2 Peak set, Interpolation set

X を compact Hausdorff space とし、 A を X の上の function algebra とする。 X の閉部分集合 F が (A に関する) peak set であるとは、ある $f \in A$ ($\|f\| = 1$) が存在して、 $F = \{x \in X : f(x) = 1\}$ 、そして $|f(x)| < 1$ ($\forall x \in X \setminus F$) のときをいう。 F が一点 $\{x\}$ のとき、 $\{x\}$ を peak point といい、 A の Choquet boundary を B_A で表わせば Bishop [4] はつぎのことを示した。

定理 2.1 $B_A \ni x$ とする。 $\{x\}$ が peak point であることと、 $\{x\}$ が G_δ set であることは同値である。 X が

compact metric space であれば、 A の Choquet boundary は peak point 全体の集合と一致する。

X の閉部分集合 F が peak set のある族 $\{F_\lambda\}$ の共通部分であるとき、 F を p -set という。 F が一点 $\{x\}$ のとき、それを p -point という。 つぎは Bishop-de Leeuw の定理 [5] である。

定理 2.2 A を X の上の function algebra とし、 $\mathcal{P}$ を A の p -point 全体の集合とする。 任意の $x \in X$ に対して、 Borel sets と $\mathcal{P}$ によって生成された σ -algebra の上に定義された probability measure μ ($\mu(\mathcal{P}) = 1$) が存在して、 $f(x) = \int f d\mu$ ($f \in A$) となる。

系 2.3 任意の $f \in A$ は、 $|f|$ の最大値を $\mathcal{P}$ の上でとる。

つぎは Bishop [3] の Antisymmetric decomposition として知られている。

定理 2.4 A を X の上の function algebra としたとき、 X の閉部分集合による partition $\{X_\lambda\}$ が存在して

(i) X_λ は maximal antisymmetric set,

(ii) $A|X_\lambda$ は $C(X_\lambda)$ で閉,

(iii) $f \in C(X)$ が $f|X_\lambda \in A|X_\lambda$ ($\forall \lambda$) ならば $f \in A$ 。

この場合、 X_λ は p -set となる。

つぎの二つは Glicksberg [13] によって与えられた。

定理 2.5 X の閉部分集合 F が p -set であるための必要かつ十分条件は、すべての $\mu \in A^\perp$ に対して $\mu_F \in A^\perp$ となることである。

定理 2.6 F_i ($i=1, 2, 3, \dots$) を p -set とする。もし $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ が X の閉部分集合なら F はまた p -set となる。

A が logmodular algebra であるとき、つぎが成立する。

定理 2.7 A を logmodular algebra とし、 F を X の閉部分集合とする。そのとき $A|_F$ が $C(F)$ で閉であることと、 F が p -set であることは同等である。

系 2.8 A を compact metric space X の上の logmodular algebra とする。そのとき X の任意の点 x は peak point となる。

よく知られている Rossi's local peak set theorem [22] はつぎのようである。

定理 2.9 A の maximal ideal space M_A の閉部分集合 F が local peak set なるは、それは peak set となる。ここで F が local peak set であるとは、 M_A のある開集合 $U(\supset F)$ が存在して、ある $f \in A$ で $F = \{x \in M_A : f(x) = 1\}$ かつ $U \sim F \ni \forall x$ では $|f(x)| < 1$ となることである。

つぎに X を複素平面上のコンパクト集合とし、 $R(X) \in X$ の外側に pole をもつような有理関数全体の X 上での一様収束

による閉包を $R(X)$ とすれば、Bishop [4] によりつぎのことが示された。

定理 2.10 $R(X) = C(X)$ となるための必要かつ十分条件は、 X のすべての点が $R(X)$ に関して peak point となることである。

ここで一般の function algebra $A(X \text{ の上 })$ において、 X のすべての点が A に関して peak point となれば、 $A = C(X)$ となるかという問に対して、Cole [cf. Browder [7]] は counterexample を作った。

$R(X)$ の peak point については、さうにつき Wilken [9] の定理がある。

定理 2.11 $\mathcal{P} \in R(X)$ の Gleason part とする。そのとき $\mathcal{P}$ は positive planar measure をもつか、または $\mathcal{P} = \{x\}$ は peak point となる。

point derivation との関係においては (cf. [7])、

定理 2.12 x が $R(X)$ に関して peak point でないというのと、 $R(X)$ が x において non-zero point derivation をもつことは同等である。

上の定理 2.10 はつぎのように強めることができる： $\mathcal{P} \in R(X)$ に関しての peak point 全体の集合としたとき、もし $X \sim \mathcal{P}$ が zero planar measure をもてば、 $R(X) = C(X)$ ([7])、

それゆえ $R(X) \neq C(X)$ なら $X \sim P$ は 0 でない planar measure をもつことになり、その結果 non-zero point derivation をもつ点の集合は、0 でない planar measure をもつことになる (注 1 を見よ)。

peak set および p -set F に対しては、 $A|F$ が $C(F)$ で閉となることは容易にわかるが、とくに $A|F = C(F)$ となる X の閉部分集合 F を (A に関する) interpolation set という。 A が disk algebra のとき、Rudin-Carleson の定理は、単位円上の Lebesgue measure の閉部分集合は interpolation set であることを示している。Glicksberg^[3] は一般の function algebra および Dirichlet algebra における interpolation set について、つぎの定理を証明した。

定理 2.13 A を X の上の function algebra とし、 F を X の閉部分集合とする。 F が interpolation set となるための必要かつ十分条件は、ある $C \geq 1$ が存在してつぎが成立することである。

$$\|\mu_F\| \leq C \|\mu_{X \sim F}\| \quad (\forall \mu \perp A).$$

定理 2.14 A を X の上の Dirichlet algebra とし、 F を X の閉部分集合とする。 F が interpolation set となるための必要かつ十分条件は、 $\mu \perp A$ となる X 上の任意の測度 μ に対して $\mu_F = 0$ が成立することである。

つぎに A を disk algebra としなとき、 A の Gelfand transform $\hat{A}$ は 単位開円板 $D (= M_A)$ の上の function algebra となる。ここで D の 閉部分集合 F が $\hat{A}$ の interpolation set となるための必要かつ十分条件は (Γ は 単位円を表わす)

a) $F \cap \Gamma$ は A の interpolation set となる、すなわちそれは Γ 上の Lebesgue measure 0 の 閉部分集合となる。

b) $F \cap \Gamma$ は 高々可附番集合であり、かつ H^∞ -interpolating sequence となる。すなわち、 $F \cap \Gamma = \{x_n\}$ とすれば、任意の有界な複素数列 $\{z_n\}$ に対して $f \in H^\infty$ が存在して、 $f(x_n) = z_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) となる。

Hasumi [14] はこの事項を A が logmodular algebra の場合に拡張し、更に A が logmodular algebra を含む H^∞ の function algebra の class の場合に拡張できることを示した (Hasumi [15])。

§ 3. w -interpolation set

A を compact Hausdorff space X の上の function algebra とし、 G を X の 開集合とする。 G が (A についての) w -interpolation set であるとは、 G の中の任意の compact subset が interpolation set となることである。 E を A の essential set としたとき $X \sim E$ は w -interpolation set となることは明らか。 w -interpolation set は Ishikawa, Tomiyama and

Wada ([18], [19]) で Mullins [21] の定理の拡張を考へる際に用ゐられた。この後、 w -interpolation set について再検討し、その application としていくつかの定理をあげようと思ふ。
 まず Oshikawa, Tomiyama and Wada ([18], [19]) においてつぎの定理が証明された。

定理 3.1 A を X の上の function algebra とし、 G を w -interpolation set とする。そのとき $G \cap \partial_{A|E} = \emptyset$ となる。ここで E は A の essential set を表わす。

この定理に Rossi の local maximum modulus principle [22] を含めて考へると、つぎのようになる。

定理 3.2 A を X の上の function algebra とし、 G を w -interpolation set とする。そのとき $G \subset X \sim (\overline{E^i} \cup \partial_{A|E})$ 。ここで E^i は E の $M_{A|E}$ での interior を表わし、 $\overline{E^i}$ は E^i の X における閉包である。

系 3.3 A を X の上の essential algebra とする。そのとき G を w -interpolation set とすれば " $G \subset X \sim (\overline{X^i} \cup \partial A)$ 。ここで X^i は X の M_A における interior を表わす。

系 3.4 $X = M_A$ または $E = \partial_{A|E}$ とする。そして G を w -interpolation set とすれば " $G \subset X \sim E$ 、いいかえれば " $X \sim E$ は largest w -interpolation set となる。

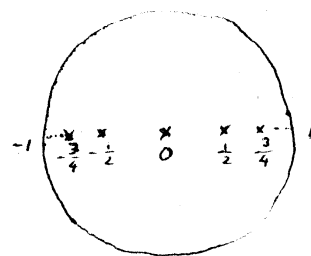
これは [18], [19] において得られた。

さて一般には $X \sim E$ が largest w -interpolation set とは限らない。

Example A_0 を disk algebra とし、

$$X = \{z: |z|=1\} \cup \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{4}, \dots\}$$

とし、 $A = \hat{A}_0|X$ とすれば



A は X の上の essential algebra となる。

この場合 w -interpolation set は空集合

$$(E \sim E = \emptyset) \text{ とは限らない。 } G = \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{4}, \dots\}$$

は明らかに w -interpolation set となっている。

それではどのような open set が w -interpolation set となるか。 A が上のように disk algebra A_0 から作られた場合には、つぎのようになる。

定理 3.5 Γ を単位円、 D を単位開円板とし、 Δ を D の開部分集合で $\Gamma \subset \Delta$ とする。 A_0 を disk algebra とし $A = \hat{A}_0| \Delta$ とおく。 G を A の任意の w -interpolation set とすれば、 G は高々可附番集合であり、かつ G の任意の compact subset は有限集合となる。

N を countably infinite discrete space とし、その Čech compactification を βN とする。Hoffman and Ramsay [16] は $X (= \beta N)$ の上に function algebra ($\neq C(X)$) が存在することを示した。彼等が作った function algebra では、その

essential set E は $\beta N \sim N$ に含まれている。 $X (= \beta N)$ の上の任意の function algebra A については、 N が w -interpolation set であることから定理 3.1 の応用としてつぎを得る。ここで N_1 は N の部分集合とする (注 2 も見よ)。

定理 3.6 N を infinite (countable とは限らない) discrete space とし、 $X = \beta N$ とおく。 A を X の上の function algebra とすれば、つぎの三つの条件は同等である。

a) $E \subset X \sim N_1$

b) $\forall x \in N_1$ について $C_x \in A$, ここで C_x は $\{x\}$ の characteristic function を表す。

c) N_1 は M_A において open set である。

系 3.7 A を $X (= \beta N)$ の上の function algebra とする。そのとき A の maximal ideal space M_A の isolated points の集合は $N \sim E$ である。

つぎに F を A の任意の interpolation set としたとき、 F の interior (X における) が w -interpolation set となっていることから、

定理 3.8 A を X の上の essential algebra とし、 $\partial_A \cup \overline{X^i} = X$ (とくに $X = \partial_A$ または $X = M_A$) と仮定する。このとき A の任意の interpolation set は X について non dense である。

(注) 定理 3.8 の条件 $\partial A \cup \overline{X^i} = X$ をみたすものとして
 pervasive algebra, maximal algebra, ε -regular algebra,
 Dirichlet algebra, logmodular algebra などがある。

§4 $A = C(X)$ となる条件

A を X の上の function algebra としたとき $A = C(X)$ となる
 ための function algebra の条件について非常に多くの研究が
 なされている (cf. [1], [2], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [20], [21], [25],
 [28], [30]). ここで もう一つの条件を考えて見る. §2 で述べた
 Cole の例では, X の各点が peak point でも $A = C(X)$ と
 なることが示されたが, それに関連して

定理 4.1 A を X の上の function algebra とする. X の異な
 る任意の二点 x, y に対して, peak set F が存在し, F は
 x を内点にもち y を含まないようにとれば $A = C(X)$ となる。

completely regular space X が F -space であるとは,
 $C_R(X)$ の任意の finitely generated ideal が principal と
 なること, いいかえれば $C_R(X)$ の任意の関数 f で, f の
 positive part $\{x \in X : f(x) > 0\}$ と f の negative part
 $\{x \in X : f(x) < 0\}$ が completely separated であるときにい
 う. Stonian space, σ -stonian space, または X が locally
 compact, σ -compact であるとき $\beta X - X$ はいつでも F -

space となる。

F -space X 上の任意の measure の carrier は extremally disconnected であること (Hoffman, または Seever [4]) と上の定理からつきを得る。

系 4.2 (Bade and Curtis [2]) A を compact F -space 上の ε -normal algebra とする ($\varepsilon < 1/2$)。そのとき $A = C(X)$ となる。

A を X 上の function algebra とする。 A が strongly regular であるとは、 $\forall f \in A, \forall x \in X$ に対して、 x の近傍で定数^(閉数)となるような $g \in A$ が存在して f に一様近似させることである。つぎのことは Wilken [3] の定理の slight extension である。

系 4.3 X を、有限個の点以外の任意の点が G_δ set となる compact totally ordered space とし、 A を X の上の strongly regular function algebra とする。そのとき $A = C(X)$ となる。

系 4.4 X は、その任意の点の適当な近傍の閉包が直線のある閉部分集合に同位相となるような compact Hausdorff space とする。そのとき X の上の任意の strongly regular function algebra は $C(X)$ に一致する (注3)。
参照

文 献

- [1] H. Alexander: Uniform algebras on curves, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969) 1269-1272.

- [2] W. G. Bade and P. C. Curtis : Embedding theorems for commutative Banach algebras, *Pacific J. Math.*, 18 (1966) 391-409.
- [3] E. Bishop : A generalization of the Stone - Weierstrass theorem, *Pacific J. Math* 11 (1961) 777-783
- [4] ——— : A minimal boundary for function algebras, *Pacific J. Math.*, 9 (1959) 629-642.
- [5] E. Bishop and K. de Leeuw : The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, *Ann. Inst. Fourier*, 9 (1959) 305-331.
- [6] A. Browder : *Function Algebras*, Proc. Int'l Symp. on Function Algebras, Tulane U., Scott-Foresman (1965).
- [7] ——— : *Introduction to Function Algebras*, Benjamin (1969).
- [8] L. Carleson : Representations of continuous functions, *Math. Z.* 66 (1957) 447-451.
- [9] D. R. Chalice : Characterizations for approximately normal algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20 (1969) 415-419.
- [10] T. W. Gamelin : *Uniform Algebras*, Prentice-Hall (1969).
- [11] T. W. Gamelin and D. R. Wilken : Closed partitions of maximal ideal spaces, *Illinois J. Math.*, 13 (1969) 789-795.

- [12] L. Gillman and M. Jerison: Rings of Continuous Functions, Van Nostrand, Princeton N.J., (1960)
- [13] I. Glicksberg: Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962) 415-435.
- [14] M. Hasumi: Interpolation sets for logmodular Banach algebras, Osaka J. Math., 3 (1966) 303-319.
- [15] ——— : An interpolation problem for a class of uniform algebras. (to appear)
- [16] K. Hoffman and A. Ramsay: Algebras of Bounded sequences, Pacific J. Math., 15 (1965) 1239-1248.
- [17] K. Hoffman and J. Wermer: A characterization of $C(X)$, Pacific J. Math., 12 (1962) 941-944.
- [18] H. Ishikawa, J. Tomiyama and J. Wada: On the essential set of function algebras, Proc. Japan Acad., 44 (1968) 1000-1002.
- [19] ——— : On the local behavior of function algebras, Tôhoku Math. J., 22 (1970) 48-55.
- [20] G. M. Leibowitz: Lectures on Complex Function Algebras, Scott, Foresman (1970).
- [21] R. E. Mullins: The essential set of function algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 271-273.
- [22] H. Rossi: The local maximum modulus principle, Ann. Math., 72 (1960) 1-11.

[23] W. Rudin : Boundary value of continuous analytic functions,
Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956) 808-811.

[24] G. Seever : Measures of F -spaces, Trans. Amer.
Math. Soc., 133 (1968) 267-280.

[25] S. Sidney and E. L. Stout : A note on interpolation,
Proc. Amer. Math. Soc., 19 (1968) 380-382.

[26] J. Wada : On Šilov boundaries of function algebras,
Proc. Japan Acad., 39 (1963).

[27] ——— : On the interpolation of some function
algebras, Osaka J. Math., 1 (1964) 153-164.

[28] J. Wermer : The space of real parts of a function algebra,
Pacific J. Math., 13 (1963) 1423-1426.

[29] D. R. Wilken : Lebesgue measure for parts of $R(X)$,
Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 508-512.

[30] ——— : A note on strongly regular function
algebras, Can. J. Math., 21 (1969) 912-914.

[31] ——— : Remarks on the string of beads, Proc.
Amer. Math. Soc., 23 (1969) 133-135.

(注 1) このほかにも $R(X)$ の peak point, Gleason part
に関する研究がある。たとえば Gleason part が connected

であるかどうかの問題については、D. R. Wilken : The support of representing measures for $R(X)$, Pacific J. Math, 26 (1968) 621-626. それに対して A. M. Davie は disconnected part をもつ $R(X)$ が存在することも示したことがつぎの Gamelin の論文の Added in proof にのっている : Norm compactness of representing measures for $R(K)$, J. Functional analysis, 3 (1969) 495-500. この例では X が string of beads であるとのことであるが、 X が string of beads のときの $R(X)$ の peak point に関する研究も興味深い。これは定理 2.11 によって $R(X)$ の Gleason part の研究につながる (cf. [31], [10])。また peak point と analytic capacity, point derivation との関係などに関する研究も多くなされている (この講究録の神保氏および荷見氏の論文参照)。

(注2) Hoffman and Ramsey [16] の例では $E \subset \beta N \sim N$ となっていることは既に述べたが、 βN の上の任意の function algebra では、そうなる必要はない。 $E \subset \beta N \sim N$ となるような βN の上の function algebra は実際作ることも出来る。これは H^∞ の maximal ideal space M_{H^∞} の 1 の上の fiber (cf. K. Hoffman : Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall 1962) を考えれば容易に作れる。

(注3) 予稿集の原稿の系4.4は「 X はcompactで $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$,
 かつすべての i で X_i はJordan curveの閉部分集合とする。 A を X 上の
 strongly regular algebraとすれば $A = C(X)$ 」だが、 X の形に更なる条件を
 つけなければ証明できない。