

von Neumann 代数の生成について

東北大 教養 斉 藤 俊四郎

§ 1. 序.

von Neumann 代数の生成についての最近の研究には2つの方向がある. 1つは与えられた von Neumann 代数は何れの生成元を持つかを調べる方向— von Neumann の可換な場合についての結果の拡張と代数的な興味から—. もう1つはヒルベルト空間上の作用素が与えられた時, その作用素の生成ある von Neumann 代数の構造を調べて作用素を研究あるという方向である. ここでは第1の方向についての最近までの結果を述べてみたい.

以下では, ヒルベルト空間はすべて可分なヒルベルト空間とし, 作用素は有界線型作用素とする. von Neumann 代数 M が作用素の族 $\{A, B, \dots\}$ で生成されるとは, M が $\{A, B, \dots\}$ を含む最小の von Neumann 代数であること意味し, $M = R(A, B, \dots)$ であらう. M が von Neumann 代数の

族 $\{M_1, M_2, \dots\}$ が生成されるというのと同様の意味に用いて、 $M = R(M_1, M_2, \dots)$ とかく。ヒルベルト空間 H 上の von Neumann 代数 M に対して、 M 上の 2×2 マトリックス全体で作る $H \oplus H$ 上の von Neumann 代数を M_2 とかく。

§ 2. 1 個の生成元を持つ von Neumann 代数。

この節では、次の von Neumann の結果が出発点になる。

補題 2.1. 可分なヒルベルト空間上の任意の可換な von Neumann 代数は 1 個の自己共役作用素で生成される。

この結果を利用すれば、直ちに次のことが示される。

補題 2.2. M_1, M_2 は共に可分なヒルベルト空間上の可換な von Neumann 代数とする。 $R(M_1, M_2)$ は 1 個の作用素で生成される。

実際、 $A \in M_1, B \in M_2$ を $R(A) = M_1, R(B) = M_2$ となる自己共役作用素とすると、 $C = A + iB$ が求めるものである。

この補題の系として、次の補題が得られる。

補題 2.3. $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$ を可分なヒルベルト空間上の von Neumann 代数の族で、お互に可換 ($M_m \subset M'_n, m \neq n$) であり、且各 M_n は 1 個の生成元を持つとすれば、 $M = R(M_1, M_2, \dots)$ は 1 個の生成元を持つ。

証明. $A_n = B_n + iC_n$ (B_n, C_n は自己共役) を M_n の生成元とすれば、 $R(B_1, B_2, \dots), R(C_1, C_2, \dots)$ は共に可換な von

Neumann 代数 M を生成するから、補題 2.2 を用いてはめればよい。

あとの便利のために、次の結果を系として置く。

系 2.4. 可分なヒルベルト空間上で、 M_1, M_2 は 1 個の生成元を持つ von Neumann 代数とすると、テンソル積 $M_1 \otimes M_2$ は 1 個の生成元を持つ。

この系は無限直積の場合にまで拡張できることは容易に知られる。次の補題もよく知られている結果である。

補題 2.5. 可分ヒルベルト空間上の作用素全体のつくる von Neumann 代数 (I 型 factor) は 1 個の生成元を持つ。

I $_{\infty}$ 型のと看做し得る simple shift を用いればよい。

定義. 有限型 von Neumann 代数 M が次の (i) 又は (ii) を満たすとき、 M は hyperfinite von Neumann 代数と呼ぶ: (i) M は I 型である。 (ii) M を生成するお互に可換な I 型の von Neumann 代数の列 $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$ があって各 M_n の center は M のそれと一致する。

M が factor のときは通常、hyperfinite factor である。 (ii) の場合は Mislove [Tohoku Math. J. 7(1955), 192-205] の定義した、generalized approximately finite W^* -algebra である。

さて、いままでに準備したものを組合せれば、次の結果が

得られる。

定理 1. 可分なヒルベルト空間上の任意の I 型の von Neumann 代数は、1 個の生成元を持つ。

定理 2. 可分なヒルベルト空間上の hyperfinite な II 型 von Neumann 代数は 1 個の生成元を持つ。

定理 1 の証明. homogeneous α とは、可換な von Neumann 代数と有界作用素全体のつくる von Neumann 代数の同型性と同値である。補題 2.1, 2.5 および系 2.4 から結論が得られる。一般の場合は, homogeneous α の直和 $\sum_{n \in \mathbb{N}} M_n$ と表わされる。いま, $A_n \in M_n$ の生成元として $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ を一様有界となるようにして $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ とする。 $\sum_{n \in \mathbb{N}} M_n$ の center に生成する作用素 B とすれば $R(A), R(B)$ はお互に可換で $R(A, B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} M_n$ となるから, 補題 2.3 を用いればよい。

定理 2 の証明. 補題 2.3 と定義から明らかである。

最近の情報によると, W. Wogen [22] は可分なヒルベルト空間上の任意の properly infinite な von Neumann 代数は 1 個の作用素で生成されることを示した。このことはつらつと証明されることができるとして, 関連する事柄をいくつか並べてこの節を終る。

注意 1. 補題 2.2 から hyperfinite な II₁-型 の von Neu-

mann 代数が 1 個の生成元をもつものの存在が分る。実際、
2 個の生成元をもつ自由群のシギエー表現から構成される
III-型 factor は 1 個の作用素で生成される。

注意 2. 系 2.4 と補題 2.5 を用いれば 1 個の生成元をもつ
 II_{∞} -型の von Neumann 代数の構成が分る。また III-型 fa-
ctor が 1 個の生成元を持つものの存在性は、(Glimm の定義に
よる) UHF-代数から作られる III-型 factor (hyperfinite の III
型 factor) で知られる。

注意 3. I 型の von Neumann 代数を生成する、(正規でない)
作用素の若干の例が知られている。

文献 [1], [9], [12], [13], [17], [18], [19], [20], [22], [23]

§ 3. von Neumann 代数 M_2 の生成.

この節では、von Neumann 代数 M が 1 つの生成元をもつと
き、 M_2 は何個の作用素で生成されるかという問題を考
える。

補題 3.1. von Neumann 代数 M が作用素 $A_1, A_2, \dots$ で生成
されれば M_2 は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (n=1, 2, \dots)$$

で生成される。

$$\text{すなわち, } R(A_1, A_2, \dots) = M \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2$$

明日 31 2" 天 子 .

系 3.2. M の n 個の作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ が生成される。

M_n は 2 乘 $n-0$ となる $n+1$ 個の作用素で生成される.

證明. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad n \times n$ 生成元.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 \quad \text{et } T_0 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

系 3.3. 系 3.2 と同様の仮定のもとで, M_2 は $n+1$ 組の $\wedge^k$ 等元を生成する.

证 明. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 亦不共轭} \therefore$$

あることは、 $\sum_{j=1}^n 3.2$ より明らか。

特に, M が 1 個の作用素で生成されるば, M_2 は 2 乗の 0 の
2 個の作用素 (或はまた 2 つのベキ等元) で生成される [14].

補題 3.4. M は作用素 A を生成し $\|A\| \leq 1$ von Neumann 代数 M であり、 A は $\|A\| < 1$ の逆作用素を持つとする。このとき、 M_2 は 1 元の等距離作用素を生成する。

証明. $T = (I - A^*A)^{1/2} \in L(Z)$, $V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \in L(H \oplus Z, V)$
 求めるものがあふ. 実際 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R(V) \quad \square$

$$R(V) = M_2 \in T_2 \text{ b.}$$

上の補題, また以下の議論では生成元 A の逆作用素をもつて $\|A\| < 1$ であるという仮定は本質的ではない. 従つて前節の結果と補題 3.4 から次の定理を得る.

定理 3. I 型, II_1 型, II_∞ 型, III 型とそれぞれの代数型の von Neumann 代数を生成する準等距離作用素が存在する.

なお, 上の準等距離作用素の構成は [17] による.

定理 4. von Neumann 代数 M が 1 つの作用素で生成されれば, M_2 は 3 つの射影作用素で生成される.

証明. $R(A) = M$ とするとき, $\|A\| < 1$ で A^{-1} が存在するとしてよい. このとき, $S = (1 - AA^*)^{1/2}$, $T = (1 - A^*A)^{1/2}$ とおいて,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} AA^* & SA \\ A^*S & T^2 \end{pmatrix}$$

とおけば, E_1, E_2, E_3 が求める射影作用素である.

上であげた射影作用素 E_1, E_2, E_3 は M_2 において $U = V$ の同値である. 実際, M_2 の $U = V$ リ作用素

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & S \\ T & -A^* \end{pmatrix}$$

で $E_1 = U^* E_2 U$, $E_1 = V^* E_3 V$ となる.

定理 4 の特別な場合として, 次の系が得られる.

系 3.5. von Neumann 代数 M が I_∞ 型 factor 又は hyperfinite II_1 型 factor であれば, M は 3 つの射影作用素で生成される.

次の結果は定理4と共に Davis [2] の拡張である。

系 3.6. 定理4の仮定のもとで, M_2 は2つの $\mathcal{U}$ -タリ作用素で生成され, そのうち1個は自己共役な $\mathcal{U}$ -タリ作用素にとれる。

実数 $M=R(A)$ とし, S, T を定理4と同様に定義され

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & S \\ T & -A^* \end{pmatrix}$$

が求める作用素である。

なお, $\mathcal{U}$ の $\mathcal{U}$ -タリ作用素 V は Halmos [6] の unitary dilation である。

最後に2, 3の関連する結果をこの節を終る。

注意1. Fillmore-Topping [5] は, 「von Neumann 代数 M が射影作用素で代数的に生成されるための必要十分条件は M が無限次元の abelian summand をふくむことである」を証明した。

注意2. Percy-Topping [14] は可分ヒルベルト空間上の $\mathcal{A}$ の作用素は5個のべき等元の和としてあらわされること, また5個の2乗が0の作用素の和としてあらわされることを証明した。更に $\mathcal{A}$ の自己共役作用素は8つの射影作用素の実1次結合にあらわされることを示し, これらの諸結果が, properly infinite な von Neumann 代数の場合にも

成立することを示す。

文献 [2], [4], [5], [6], [7], [13], [14], [15], [21].

§4. von Neumann 代数の生成についての諸結果の相互関係.

前節では, von Neumann 代数 M が $\mathbb{C}$ の生成元を持つならば, M が種々の特殊な作用素—射影作用素, $\mathbb{C}$ -タリ作用素, 準等距離作用素等—の若干個によって生成されることを示した。この節では, 与えられた結果の個々の使用を論ずるのが目的である。

補題 4.1. von Neumann 代数 M が作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) で生成され, A_1 が正規作用素であれば, M は $n-1$ 個の作用素で生成される。

証明. $A_1, A_2, \dots, A_n$ は $\|A_i\| \leq 1$ であり, 逆作用素を持つとしてよい。このとき

$$B_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, n-1; \quad U = \begin{pmatrix} A_n & S_n \\ T_n & -A_n^* \end{pmatrix}$$

と定義する。 $S_n = (1 - A_n A_n^*)^{1/2}$, $T_n = (1 - A_n^* A_n)^{1/2}$ である。

B_1 は正規で, U は $\mathbb{C}$ -タリであるから, 補題 2.2 から,

$R(B_1, U) = R(C)$ となる作用素 C が存在する。このとき, $C, B_2,$

$\dots, B_{n-1}$ が要求を満たす。

この補題を用いて直ちに次の系を得る。

系 4.2. von Neumann 代数 M が作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ で生

成士れ、 A_1, A_2, A_i が正規であれば、 M_2 は $n-2$ 個の作用素で生成される。

従って特に M が 3 個の正規作用素で生成士れれば、 M_2 は 1 個の生成元を持つ。

補題 4.3. von Neumann 代数 M が作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ で生成士れれば、 M_2 は $n+1$ 個のユニタリ作用素で生成される。

証明. $\|A_i\| < 1, i=1, 2, \dots, n$ として各 A_i が逆作用素を持つとする. $S_i = (1 - A_i A_i^*)^{1/2}, T_i = (1 - A_i^* A_i)^{1/2}, i=1, 2, \dots, n$ とし

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, U_i = \begin{pmatrix} A_i & S_i \\ T_i & -A_i \end{pmatrix}, i=1, 2, \dots, n$$

と定義すれば、 $\{W, U_1, \dots, U_n\}$ が求めるものである。

補題 4.3 と系 4.2 とくり返しを用いければ、次の定理が得られる。

定理 5. von Neumann 代数 M が M_2 と同型のととき、もし M が有限個の生成元を持つならば、 M は 1 個の生成元を持つ。

M が hyperfinite II₁ 型 factor 或は properly infinite な von Neumann 代数ならば、 M と M_2 は同型である。

前節の結果と定理 5 から、次の定理が得られる。

定理 6. von Neumann 代数 M が M_2 と同型のとときは、次の (a) — (e) は同値である。

(a) M は 1 個の生成元を持つ。

(b) M は 3 個の射影作用素を生成される。

(c) M は 2 個のユニタリ作用素を生成され、そのうちの 1 つは、自己共役なユニタリ作用素になる。

(d) M は 2 個のベキ等元を生成される。

(e) M は 2 乗が 0 となる 2 個の作用素を生成される。

さて, properly infinite な von Neumann 代数は一列の生成元を持つことを証明してこの節を終える。 M をヒルベルト空間 H 上の von Neumann 代数とすると、 M の要素の作る $n \times n$ の行列をヒルベルト空間 $\sum_{k=1}^n H_k$ ($H_k = H, k=1, 2, \dots, n$) 上の有限作用素として作用するもの全体のつくる代数を M_n とおくことにする。 n は $2 \leq n \leq \aleph_0$ とする。

補題 4.4. ヒルベルト空間 H 上の von Neumann 代数 M が n 個の作用素 ($2 \leq n \leq \aleph_0$) を生成されれば, M_n は 2 個の作用素を生成される。

証明. $M = R(\{A_k\}_{k=1}^n)$, $1 \leq n \leq \aleph_0$ とする。このとき、すべての k に対して $\|A_k\| \leq 1$ と仮定してよい。いま $A \in M_n$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_1 \end{pmatrix}$$

と定義する。 I をヒルベルト空間 $\sum_{k=1}^n H_k$ ($H_k = H, k=1, \dots, n$)

上の単位作用素, $\mathbb{C}$ を複素数体とすると, $M_n(\mathbb{C}) \subset M_n$ 。

$M_n(\mathbb{C})$ は I 型 factor である。故に、定理 1 より $R(B) = M_n(\mathbb{C})$

なる作用素 B が存在する。このとき、 $R(A, B) = M_2$ である。

定理5 と上の補題から、

定理7. von Neumann 代数 M が properly infinite であるならば M は 1 個の生成元を持つ。

証明. M は properly infinite であるから、 M は M_n ($2 \leq n \leq \aleph_0$) と同型である。 $\{A_k\}_{k=1}^n$ を高々可付番個の作用素の族で M を生成するものとする (ヒルベルト空間はすべて可分)。故に補題 4.4 から M は 2 個の生成元をもつ。従って定理5 から結論を得る。

文献. [16], [22].

参 考 文 献

- [1] A. Brown, The unitary equivalence of binormal operators, Amer. J. Math., 76(1954), 414-439.
- [2] C. Davis, Generators of the ring of all bounded operators, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955), 970-972.
- [3] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [4] R. G. Douglas and D. Topping, Operators whose squares are zero, Rev. Romaine Math. Pures Appl., 12(1967), 647-652.
- [5] P. A. Fillmore and D. Topping, Operator algebras generated by projections, Duke Math. J., 34(1967), 333-336.
- [6] P. R. Halmos, Normal dilations and extensions of operators,

- Summa Braisiliensis Math., 2(1950), 125-134.
- [7] P.R.Halmos and J.E.Mclaughlin, Partial isometries, Pacific J. Math., 13(1963), 585-596.
- [8] F.J.Murray and J.von Neumann, On rings of operators, IV, Ann. Math., 14(1943), 716-808.
- [9] J.von Neumann, Zur algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann., 102(1929), 370-427.
- [10] J.von Neumann, On infinite direct products, Compositio Math., 6(1963), 1-77.
- [11] J.von Neumann, On rings of operators III, Ann. Math., 41(1940), 94-141.
- [12] C.Pearcy, W^* -algebras with a single generator, Proc. Amer. Math. Soc., 13(1962), 831-832.
- [13] C.Pearcy, On certain von Neumann algebras which are generated by partial isometries, Proc. Amer. Math. Soc., 15(1964), 393-395.
- [14] C.Pearcy and D.Topping, Sums of small numbers of idempotents, Mich. Math. J., 14(1967), 453-465.
- [15] T.Saitô, Generators of certain von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 20(1968), 101-105.
- [16] T.Saitô, A remark on generators of von Neumann algebras, Mich. Math. J., to appear.
- [17] N.Suzuki and T.Saitô, On the operators which generate continuous von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 15(1963), 277-280.
- [18] N.Suzuki, Isometries on Hilbert spaces, Proc. Japan Acad.,

39(1963), 435-438.

- [19] N.Suzuki, On the type of completely continuous operators, Proc. Japan Acad., 40(1964), 683-685.
- [20] D.Topping, UHF algebras are singly generated, preprint.
- [21] D.Topping, Lecture on von Neumann algebras at Indiana University, 1967.
- [22] W.Wogen, On generators for von Neumann algebras, preprint.
- [23] T.Yoshino, Nearly normal operators, Tôhoku Math. J., 20 (1968), 1-4.