

道多元環に付随する Grothendieck 群の部屋構造^{*1}

京都大学数理解析研究所 浅井 聡太

Sota Asai

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University

本稿は 2019 年度 RIMS 共同研究（公開型）「表現論とその組合せ論的側面」において、私が行った講演「道多元環に付随する Grothendieck 群の部屋構造」の内容をまとめたものである。内容の多くは [As] に基づく。

本稿では K を体とし、 A を K 上の有限次元多元環とする。 $\text{proj } A$ を有限生成射影的右 A 加群の圏とし、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ をその直既約対象の同型類全体とおく。また、 $\text{mod } A$ を有限生成右 A 加群の圏とし、 $S_1, S_2, \dots, S_n$ を単純 A 加群の同型類全体とする。ここで添え字は、全射 $P_i \rightarrow S_i$ が存在するように取る。

特に断りのない限り、部分圏は充満部分圏であり、同型について閉じたものとする。

1 Euler 形式

$\mathcal{C}$ を三角圏または完全圏とすると、その Grothendieck 群を $K_0(\mathcal{C})$ と記し、さらに実 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を $K_0(\mathcal{C})_{\mathbb{R}}$ で表す。

このとき、自然な同型 $K_0(K^b(\text{proj } A)) \cong K_0(\text{proj } A)$ が存在し、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ は $\mathbb{Z}$ 基底を与える。同様に、自然な同型 $K_0(D^b(\text{mod } A)) \cong K_0(\text{mod } A)$ が存在し、 $S_1, S_2, \dots, S_n$ は $\mathbb{Z}$ 基底を与える。当然ながら、これらはそれぞれ、実 Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ と $K_0(\text{mod } A)_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}$ 基底にもなる。

実 Grothendieck 群上の Euler 形式は、次のように与えられる。

定義 1.1 $\mathbb{R}$ 双線形形式 Euler 形式 (Euler form) $\langle ?, ! \rangle: K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} \times K_0(\text{mod } A)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ を、 $T \in K^b(\text{proj } A)$, $X \in D^b(\text{mod } A)$ に対し、

$$\langle T, X \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim_K \text{Hom}_{D^b(\text{mod } A)}(T, X[k])$$

が成立するように定める。

すると、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ と $S_1, S_2, \dots, S_n$ は、以下の意味で Euler 形式に関する双対基底となる。

^{*1} 本研究は科研費 16J02249 および 19K14500 の助成を受けたものである。

補題 1.2 任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し、

$$\langle P_i, S_j \rangle = \begin{cases} \dim_K \operatorname{End}_A(S_j) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。

2 安定条件と TF 同値類

前章の Euler 形式を用いて、 $\theta \in K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 線形形式 $\langle \theta, ? \rangle: K_0(\operatorname{mod} A)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ とみなす。これを用いた線形不等式により、加群の安定条件が以下のように定まる。

定義 2.1 [Ki, Definition 1.1] $\theta \in K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ とする。

- (1) $M \in \operatorname{mod} A$ が θ 半安定 (θ -semistable) であるとは、 $\theta(M) = 0$ であり、かつ任意の商加群 N に対し $\theta(N) \geq 0$ であることをいう。
- (2) $M \in \operatorname{mod} A$ が θ 安定 (θ -stable) であるとは、 $\theta(M) = 0$ であり、かつ任意の真商加群 $N \neq 0$ に対し $\theta(N) > 0$ であることをいう。
- (3) $\mathcal{W}_{\theta} \subset \operatorname{mod} A$ を θ 半安定な加群全体からなる部分圏とし、これを θ 半安定部分圏 (θ -semistable subcategory) と呼ぶ。

$\mathcal{W}_{\theta}$ は $\operatorname{mod} A$ のワイド部分圏であり、したがって部分アーベル圏である。その単純対象とは、 θ 安定な加群たちにほかならず、これらの全体は半煉瓦となる。ここで、 $S \in \operatorname{mod} A$ が煉瓦 (brick) であるとは、自己準同型環 $\operatorname{End}_A(S)$ が斜体であることを表し、 Hom に関して互いに直交する煉瓦の同型類の集合のことを半煉瓦 (semibrick) という。

King の安定条件を用いて、与えられた加群を半安定にするような θ がなす、 $K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ の部分集合を考えることができる。

定義 2.2 [B, BST] $M \in \operatorname{mod} A \setminus \{0\}$ に対し、 $K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ の部分集合 Θ_M を、

$$\Theta_M := \{\theta \in K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}} \mid M \in \mathcal{W}_{\theta}\}$$

と定め、これを加群 M に対する壁 (wall) という。

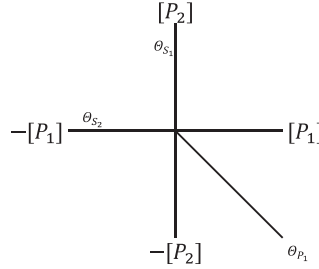
Θ_M は安定条件の定義から $K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ の有理多面錐であり、その次元を $\dim \Theta_M$ で表す。以降、これらの壁による $K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造を考えていく。

部屋構造を考えるに当たっては、各加群に付随する壁を一つ一つ考えるよりも、むしろそれらの和集合に着目することが重要である。壁たちの和集合を求めるには、煉瓦に対応する壁のみを考えれば十分であることが、次の補題からわかる。

補題 2.3 各 $M \in \text{mod } A \setminus \{0\}$ に対し、ある煉瓦 S が、 $\Theta_S \supset \Theta_M$ かつ $\dim \Theta_S = n - 1$ を満たす。

なお、任意の煉瓦 S に対し、壁 Θ_S の次元が $n - 1$ であるとは限らない。また、 M が煉瓦でなくとも、 $\dim \Theta_M = n - 1$ となることがある。

例 2.4 A を道多元環 $K(1 \rightarrow 2)$ とすると、 A の煉瓦は S_2, P_1, S_1 であり、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造は、次の図ようになる。



この部屋構造について、より詳しく調べるため、以下の部分圏を用いる。

定義 2.5 [BKT, Subsection 3.1] $\theta \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ に対し、

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}}_{\theta} &:= \{M \in \text{mod } A \mid M \text{ の任意の商加群 } N \text{ に対し } \theta(N) \geq 0\}, \\ \overline{\mathcal{F}}_{\theta} &:= \{M \in \text{mod } A \mid M \text{ の任意の部分加群 } L \text{ に対し } \theta(L) \leq 0\}\end{aligned}$$

と定義する。

$\overline{\mathcal{T}}_{\theta}$ は、商と拡大について閉じていることから、 $\text{mod } A$ のねじれ類である。同様に $\overline{\mathcal{F}}_{\theta}$ は、 $\text{mod } A$ のねじれ自由類である。これらはそれぞれ、 $\mathcal{F}_{\theta} \subset \overline{\mathcal{F}}_{\theta}$ を満たすねじれ自由類と、 $\mathcal{T}_{\theta} \subset \overline{\mathcal{T}}_{\theta}$ を満たすねじれ類により、ねじれ対 $(\overline{\mathcal{T}}_{\theta}, \mathcal{F}_{\theta})$, $(\mathcal{T}_{\theta}, \overline{\mathcal{F}}_{\theta})$ に拡張でき、 $\mathcal{T}_{\theta}, \mathcal{F}_{\theta}$ についても、商加群や部分加群を用いて記述することが可能である [BKT, Proposition 3.1]。

また、定義から $\overline{\mathcal{T}}_{\theta} \cap \overline{\mathcal{F}}_{\theta} = \mathcal{W}_{\theta}$ であることがわかり、 $\mathcal{W}_{\theta} = \{0\}$ は $(\overline{\mathcal{T}}_{\theta}, \mathcal{F}_{\theta}) = (\mathcal{T}_{\theta}, \overline{\mathcal{F}}_{\theta})$ と同値である。

これらを用いて、私は $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ 上の同値関係を、以下のように導入した。

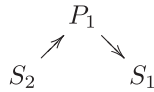
定義 2.6 [As, Definition 2.12] $\theta, \theta' \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ に対し、これらが TF 同値 (TF equivalent) であるとは、 $\overline{\mathcal{T}}_{\theta} = \overline{\mathcal{T}}_{\theta'}$ かつ $\overline{\mathcal{F}}_{\theta} = \overline{\mathcal{F}}_{\theta'}$ であることと定める。 $[\theta]$ で θ が属す TF 同値類を表す。

実は部屋構造を用いて、TF 同値を特徴付けることが可能である。

命題 2.7 [As, Theorem 2.16] 異なる $\theta, \theta' \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ に対し、次の条件は同値である。

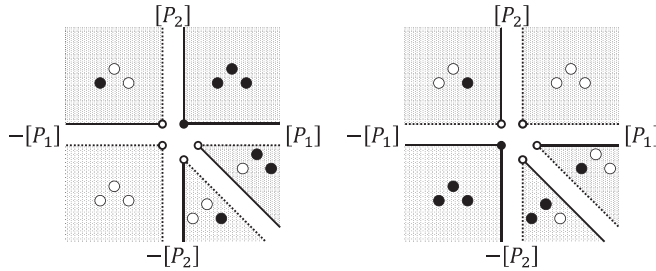
- (a) θ と θ' は TF 同値である。
- (b) 線分 $[\theta, \theta']$ 上 $\mathcal{W}_\theta$ は一定である。
- (c) いかなる煉瓦 S についても、線分 $[\theta, \theta']$ は壁 Θ_S と一点で交わらない。

例 2.8 A が道多元環 $K(1 \rightarrow 2)$ であるとき、直既約加群は同型を除いて S_2, P_1, S_1 の 3 つであり、Auslander–Reiten 簾は、

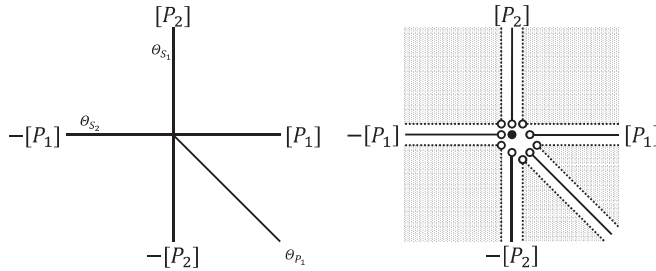


となる。そこで以下では、各直既約加群が部分圏 $\mathcal{C} \subset \text{mod } A$ に属するか否かを、 $***$ という図式の $*$ を、 $\bullet$ (属す) または $\circ$ (属さない) に置き換えることで、 $\mathcal{C}$ を表す。

まず $\overline{\mathcal{T}}_\theta$ と $\overline{\mathcal{F}}_\theta$ の分布は、次の図のようになる。



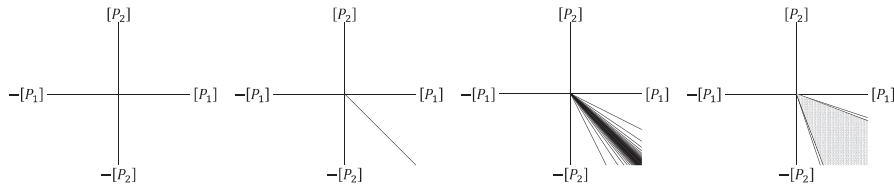
一方、 S_2, P_1, S_1 に対応する壁は、下記左図の通りとなり、 $K_0(\text{proj } A)$ の TF 同値類は右図のようになる。



例 2.9 A が m -Kronecker 簾の道多元環であるとする。つまり、

$$A := K \left(\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ & \vdots & \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array} \right) \quad (\text{矢印は } m \text{ 本})$$

とする。 $m = 0, 1, 2, 3$ の各々について、部屋構造は次のようになる。



ここで $m = 3$ の網掛け部分については、稠密に壁が存在している。詳細は [As, Examples 2.19, 5.4] を参照されたい。

3 2 項準傾複体の錐

ここからは TF 同値類を具体的に構成する方法の一つとして、ホモトピー圏 $K^b(\text{proj } A)$ の 2 項準傾複体を紹介する。これは以下のように定義される。なお、基本的 (basic) という用語は、直和因子の重複がないことを意味し、2 項複体 (2-term complex) とは -1 番目と 0 番目の項以外が消滅している複体を指す。

定義 3.1 $U = (U^{-1} \rightarrow U^0)$ を $K^b(\text{proj } A)$ の 2 項複体とする。

- (1) U が 2 項前準傾複体 (2-term presilting complex) であるとは、 $\text{Hom}_{K^b(\text{proj } A)}(U, U[1]) = 0$ であることをいう。2-presilt A で $K^b(\text{proj } A)$ の基本的な 2 項前準傾複体の同型類の全体を表す。
- (2) U が 2 項準傾複体 (2-term silting complex) であるとは、 U が 2 項前準傾複体であり、さらに U を含む $K^b(\text{proj } A)$ の部分三角圏で、直和について閉じているものは、 $K^b(\text{proj } A)$ 自身のみであることと定める。2-silt A で $K^b(\text{proj } A)$ の基本的な 2 項準傾複体の同型類の全体を表す。

各 $U \in 2\text{-presilt } A$ に対して、 $U \cong \bigoplus_{i=1}^m U_i$ と直既約分解すると、 U は基本的であるから、 $i \neq j$ である限り $U_i \not\cong U_j$ となる。このとき $|U| = m$ とおく。すなわち $|U|$ は直既約因子の個数である。

補題 3.2 $U \in 2\text{-presilt } A$ とする。

- (1) [Ai, Proposition 2.16] U はある $T \in 2\text{-silt } A$ の直和因子である。
- (2) [AIR, Proposition 3.3] $U \in 2\text{-silt } A$ であることは $|U| = n$ と同値である。
- (3) [AI, Theorem 2.27, Corollary 2.28] $[U_1], \dots, [U_m] \in K_0(\text{proj } A)$ は線形独立であり、さらに $U \in 2\text{-silt } A$ ならば、これらは $K_0(\text{proj } A)$ の $\mathbb{Z}$ 基底である。

そこで $U \in 2\text{-presilt } A$ に対し、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ 内の錐 $C(U), C^+(U)$ を、

$$\begin{aligned} C(U) &:= \{a_1[U_1] + \cdots + a_m[U_m] \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}, \\ C^+(U) &:= \{a_1[U_1] + \cdots + a_m[U_m] \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}_{> 0}\} \end{aligned}$$

と定める。補題 3.2 (3) から、これらは m 次元の錐であることがわかる。

錐同士の交わりについては、[DIJ, Theorem 6.5] から従う、以下の事実が重要である。

命題 3.3 $U, U', U'' \in 2\text{-presilt } A$ が $\text{add } U \cap \text{add } U' = \text{add } U''$ を満たすとき、 $C(U) \cap C(U') = C(U'')$ となる。

特に $T, T' \in 2\text{-silt } A$ であるとき、 $C^+(T) \cap C^+(T') = \emptyset$ となる。すなわち 2 項準傾複体に対する錐同士が内部で交わることはない。

例 3.4 $A = K(1 \rightarrow 2)$ に対し、 $2\text{-silt } A$ の元は下記左の $A, T, U, V, A[1]$ の全 5 個であり、これらに対応する錐を表したものが右図である。

$$\begin{aligned} A &= P_1 \oplus P_2 \\ T &= P_1 \oplus (P_2 \rightarrow P_1) \\ U &= P_2[1] \oplus (P_2 \rightarrow P_1) \\ V &= P_1[1] \oplus P_2 \\ A[1] &= P_1[1] \oplus P_2[1] \end{aligned}$$

また、各 2 項前準傾複体からねじれ類を以下のように構成できる。ここで ν は中山関手 $\nu: K^b(\text{proj } A) \rightarrow K^b(\text{inj } A)$ を表す。

定義 3.5 $U \in 2\text{-presilt } A$ に対し、

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{T}}_U &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{Hom}_A(M, H^{-1}(\nu U)) = 0\}, \\ \overline{\mathcal{F}}_U &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{Hom}_A(H^0(U), M) = 0\} \end{aligned}$$

2 項前準傾複体が定めるねじれ類は、次のような顕著な性質を満たす。

定理 3.6 以下の事実が成立する。

- (1) [AS, Theorem 5.10] 各 $U \in 2\text{-presilt } A$ に対し、 $\overline{\mathcal{T}}_U$ は $\text{mod } A$ の関手的有限なねじれ類であり、 $\overline{\mathcal{F}}_U$ は $\text{mod } A$ の関手的有限なねじれ自由類である。
- (2) [AIR, Theorems 2.7, 3.2] $\text{mod } A$ の関手的有限なねじれ類全体からなる集合を $\text{f-tors } A$ で表すとき、全単射 $2\text{-silt } A \rightarrow \text{f-tors } A$ が $T \mapsto \overline{\mathcal{T}}_T$ で与えられる。同様に、

$\text{mod } A$ の関手的有限なねじれ自由類全体からなる集合を $\text{f-torf } A$ で表すとき、全単射 $2\text{-silt } A \rightarrow \text{f-torf } A$ が $T \mapsto \overline{\mathcal{F}}_T$ で与えられる。

以上の準備のもとで、私は以下の結果を証明した。

定理 3.7 各 $U \in 2\text{-presilt } A$ に対し、錐 $C^+(U)$ は TF 同値類であり、任意の $\theta \in C^+(U)$ は $\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_U$, $\overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_U$ を満たす。

上記の定理のうち、後半部分については、すでに [Y, Proposition 3.3] で示されている。一方 $\theta \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ が $\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_U$, $\overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_U$ を満たすとき、Koenig–Yang 対応 [KY, BY] において U に対応する $D^b(\text{mod } A)$ の中間 t 構造や 2 項単純系 (2-term simple-minded collection) との関係調べることで、私は $\theta \in C^+(U)$ であることを導いた。

特に $T \in 2\text{-silt } A$ であるとき、 $C^+(T)$ は内点を持つ TF 同値類となることがわかる。そこで、「これ以外に内点を持つ TF 同値類が存在するかどうか」という問いを考える。

内点を持つ TF 同値類と類似していると思われる概念として、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造の「部屋」がある。ここで正確には、Wall をすべての壁の和集合 $\bigcup_{M \in \text{mod } A \setminus \{0\}} \Theta_M$ とするとき、その閉包の補集合 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} \setminus \overline{\text{Wall}}$ の連結成分のことを、部屋 (chamber) と呼んでいる。[BST, Corollary 3.29] においては、各 $T \in 2\text{-silt } A$ に対し、 $C^+(T)$ が $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋となっており、また $T \mapsto C^+(T)$ は単射であることが示されている。

これに関して、私は次の定理を証明した。ここで、2 項準傾複体に付随する錐の和集合を $\text{Cone} := \bigcup_{T \in 2\text{-silt } A} C^+(T)$ とおく。

定理 3.8 [As, Theorem 3.17] $\text{Cone} = K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} \setminus \overline{\text{Wall}}$ である。

この定理の証明は、通常の Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)$ 内の等式 $\text{Cone} \cap K_0(\text{proj } A) = K_0(\text{proj } A) \setminus \text{Wall}$ を、[B, Lemma 7.1] と同種の議論を用いて示すことで、行った。

上の状況で、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の各部屋は、内点を持つある TF 同値類に含まれ、さらにこの対応は一对一であることが、簡単な位相的議論から従う。 $\text{Cone} = \bigcup_{T \in 2\text{-silt } A} C^+(T)$ は、明らかに連結成分への分解であるから、上の定理から、任意の部屋はある $T \in 2\text{-silt } A$ を用いて $C^+(T)$ の形に書け、特に TF 同値類であることが分かる。ゆえに、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋とは、内点を持つ TF 同値類に他ならない。

4 表現空間と道多元環

本章では、体 K は代数閉体であると仮定する。通常の Grothendieck 群の各元 $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ に対し、表現空間と呼ばれる代数多様体を考え、これと TF 同値類との関連について、道多元環の場合を中心に、得られた結果を述べる。

定義 4.1 各 $\theta = \sum_{i=1}^n a_i [P_i] \in K_0(\text{proj } A)$ ($a_i \in \mathbb{Z}$) に対し、

$$P_1(\theta) := \bigoplus_{a_i < 0} P_i^{\oplus |a_i|}, \quad P_0(\theta) := \bigoplus_{a_i > 0} P_i^{\oplus |a_i|}$$

と定め、 θ が定める表現空間 (presentation space) を、

$$\text{PHom}(\theta) := \text{Hom}_A(P_1(\theta), P_0(\theta))$$

とおく。各 $f \in \text{PHom}(\theta)$ に対して、2 項複体 $P_f \in K^b(\text{proj } A)$ を、

$$P_f := (P_1(\theta) \xrightarrow{f} P_0(\theta))$$

と定める。

つまり、各 $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ の成分に応じて、2 項複体の項 $P_1(\theta), P_0(\theta)$ を固定し、その間の射のみを動かして得られる 2 項複体の全体が、表現空間である。これは明らかに K 線形空間であるから、既約な代数多様体である。以下、 $\text{PHom}(\theta)$ の Zariski 位相における稠密な開集合上で条件が成立することを、一般の (general) という言葉で表す。

2 項準傾複体 U に対し、点 $\theta = [U] \in K_0(\text{proj } A)$ については、一般の $f \in \text{PHom}(\theta)$ に対し、 $P_f \cong U$ となることが知られている ([DK, Subsection 2.1] などを参照)。2 項準傾複体の錐外の点 θ についても、 $f \in \text{PHom}(\theta)$ に付随する 2 項複体 P_f が、 $K^b(\text{proj } A)$ でどのように直既約分解されるかという問いが考えられ、この際、[DF, P] による次の概念と結果は、極めて重要である。

定義 4.2 [DF, Definition 4.3] $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \in K_0(\text{proj } A)$ に対し、直和分解の表記 $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \dots \oplus \theta_m$ を、一般の $f \in \text{PHom}(\theta)$ が、直和分解

$$P_f = P_{f_1} \oplus P_{f_2} \oplus \dots \oplus P_{f_m} \quad (f_i \in \text{PHom}(\theta_i))$$

を持つことと定義する。また $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \dots \oplus \theta_m$ が標準分解 (canonical decomposition) であるとは、任意の i について、一般の $f_i \in \text{PHom}(\theta_i)$ が直既約であることをいう。

定理 4.3 [P, Theorem 2.7] 任意の $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ に対し、並び替えを除いて、ただ一つ標準分解が存在する。

Grothendieck 群の元の直和分解と数値的ねじれ類などの関連について、以下の性質を Laurent Demonet 氏から教えていただいた。

補題 4.4 [D] $\theta, \theta_1, \theta_2 \in K_0(\text{proj } A)$ が $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$ を満たすとき、

$$\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_{\theta_1} \cap \overline{\mathcal{T}}_{\theta_2}, \quad \overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_{\theta_1} \cap \overline{\mathcal{F}}_{\theta_2}, \quad \mathcal{W}_\theta = \mathcal{W}_{\theta_1} \cap \mathcal{W}_{\theta_2}$$

となる。

特に $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \cdots \oplus \theta_m$ が標準分解であるとき、 $\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\}$ は、命題 2.7 から、ある TF 同値類に含まれることがわかる。一般には $\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\}$ 自身が TF 同値類かどうかは未解決だが、 $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ が $U \in 2\text{-presilt } A$ の錐 $C^+(U)$ に属す場合は、 $\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\} = C^+(U)$ となり、定理 3.7 で見たように、これは TF 同値類である。

上記とは別に、 A が非輪状な簾 Q の道多元環 KQ である場合に、任意の元 $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ の標準分解が TF 同値類を与えることを、私は示した。

命題 4.5 $A = KQ$ を、非輪状な簾 Q に付随する道多元環とする。もし $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ の標準分解が、

$$\theta = \theta_1^{s_1} \oplus \theta_2^{s_2} \oplus \cdots \oplus \theta_m^{s_m} \quad (i \neq j \Rightarrow s_i \neq s_j)$$

であれば、 $\{a_i[\theta_i] \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\}$ は $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ での TF 同値類である。

証明の鍵となるのは、 $\mathbb{R}$ 部分線形空間 $\langle \dim M \mid M \in \mathcal{W}_\theta \rangle$ の次元が $n - m$ であることであり、これは道多元環の場合における $K_0(\text{mod } A)$ の元の標準分解 [Ka] (先の [DF] はこれの $K_0(\text{proj } A)$ における拡張である) に関する [DW] の結果から従う。

最後に A が道多元環である場合に、部屋構造を特定するアルゴリズムについて述べる。以下、 A を非輪状な簾 Q の道多元環 KQ とし、 $\text{mod}(A, \mathbf{d})$ を次元ベクトル $\mathbf{d}$ を持つ簾 Q の表現全体とする。 $\text{mod}(A, \mathbf{d})$ は既約な代数多様体であり、次元ベクトルが $\mathbf{d}$ であるような A 加群全体と同一視できる。

$K_0(\text{proj } A)$ の部屋構造の壁の和集合を求めるため、次のように定義する。

定義 4.6 各次元ベクトル $\mathbf{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ に対し、

$$\Theta_{\mathbf{d}} := \bigcup_{M \in \text{mod}(A, \mathbf{d})} \Theta_M \subset K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$$

とおく。

[S] の結果から、実は $\Theta_{\mathbf{d}}$ は、1 つの加群の壁として実現されることが導かれる。

補題 4.7 各次元ベクトル $\mathbf{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ に対し、一般の $M \in \text{mod}(A, \mathbf{d})$ は $\Theta_{\mathbf{d}} = \Theta_M$ を満たす。特に $\Theta_{\mathbf{d}}$ 自身が $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ 内の有理多面錐である。

私はこの $\Theta_{\mathbf{d}}$ たちに関する漸化式を得た。

定理 4.8 [As, Proposition 5.6] $A = KQ$ であり、 $\mathbf{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ は非零成分を 3 個以上持つ次元ベクトルとする。このとき $\Theta_{\mathbf{d}}$ は、すべての $\Theta_{\mathbf{c}} \cap \Theta_{\mathbf{d}-\mathbf{c}}$ ($0 < \mathbf{c} < \mathbf{d}$) を含む最小の有理多面錐である。

$\mathbf{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$ の非零成分が 2 個以下の場合には、容易に $\Theta_{\mathbf{d}}$ を決定できるため、上の定理

と合わせて、帰納的に部屋構造が決まる。

参考文献

- [AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ -tilting theory, *Compos. Math.* **150** (2014), no. 3, 415–452.
- [Ai] T. Aihara, *Tilting-connected symmetric algebras*, *Algebr. Represent. Theor.* **16** (2013), Issue 3, 873–894.
- [AI] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, *J. Lond. Math. Soc.* (2) **85** (2012), 633–668.
- [As] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, arXiv:1905.02180v1.
- [AS] M. Auslander, S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, *J. Algebra* **69** (1981), no. 2, 426–454.
- [BKT] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **120** (2014), 113–205.
- [B] T. Bridgeland, *Scattering diagrams, Hall algebras and stability conditions*, *Algebr. Geom.* **4** (2017), no. 5, 523–561.
- [BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and Chamber Structure for finite-dimensional Algebras*, *Adv. Math.* **354** (2019), 106746.
- [BY] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs*, *Advances in representation theory of algebras*, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
- [DK] R. Dehy, B. Keller, *On the combinatorics of rigid objects in 2-Calabi–Yau categories*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2008, no. 11, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnn029>.
- [D] L. Demonet, private communication.
- [DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, τ -tilting finite algebras, bricks, and g -vectors, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2019, Issue 3, 852–892.
- [DF] H. Derksen, J. Fei, *General presentations of algebras*, *Adv. Math.* **278** (2015), 210–237.
- [DW] H. Derksen, J. Weyman, *The combinatorics of quiver representations*, *Annales de l’Institut Fourier*, **61** (2011), no. 3, 1061–1131.
- [Ka] V. G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, *Invent. Math.* **56** (1980), 57–92.
- [Ki] A. D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, *Quart. J.*

- Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994), no. 180, 515–530.
- [KY] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t -structures and co- t -structures for finite-dimensional algebras*, Doc. Math. **19** (2014), 403–438.
- [P] P.-G. Plamondon, *Generic bases for cluster algebras from the cluster category*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2013, no. 10, 2368–2420.
- [S] A. Schofield, *General representations of quivers*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **65** (1992), Issue 1, 46–64.
- [Y] T. Yurikusa, *Wide subcategories are semistable*, Doc. Math. **23** (2018), 35–47.