

Hamiltonian map lattice の dynamics : 緩和と秩序化

小西 哲郎¹ (名古屋大理)、金子 邦彦 (東大教養)

ハミルトン力学系の長時間振舞いを調べる目的で、これまで coupled map lattice による simulation を行なってきたが、今回はある保存系が示す秩序化現象について報告したい。

保存系の長時間の振舞いといえば、通常は「熱化」、すなわち chaotic な時間発展により系が一様にランダムな状態へと退化していくことが予想される。実際のハミルトン力学系には熱平衡状態に近づくのを妨げる要因が存在する。代表的なものは、少数自由度系で顕著な long time tail と、近可積分系での Nekhoroshev bound である。前回までの報告では、coupled map lattice による simulation により、自由度を大きくすることによって系の拡散係数が増大し、結果的には系が速く熱平衡状態へ緩和できる例を示した。[1]

しかしながら、保存系の長時間振舞いが一様な乱雑さを持つ熱平衡状態だけで記述できるとは思えない。球状星団やガラスのようなある種の秩序を示す系が在ってもいいはずである。我々はここにそのような秩序化の例を示そう。

今回のモデルは次のようなものである；

$$\begin{aligned} (x_i(t), p_i(t)) &\mapsto (x_i(t+1), p_i(t+1)), i = 1, 2, \dots, N, \\ p_i(t+1) &= p_i(t) + \frac{K}{2\pi\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^N \sin[2\pi(x_j(t) - x_i(t))], K > 0, \\ x_i(t+1) &= x_i(t) + p_i(t+1). \end{aligned}$$

すなわち、単位円周上に N 個の粒子があり、それぞれは他の粒子と位相（角度）の差の $\sin$ で引力相互作用している。

この系では、初期条件により次の 2 通りの運動を示す；

- (i) からまり状態：粒子たちが 1 つのクラスターをつくって動き回るもの。初期条件 $p_i = 0$ の近傍で見られる。総ての粒子がクラスターに含まれるとは限らない。
- (ii) 一様乱雑状態：(i) の様なクラスターが見られず、各粒子は独立に運動する。熱平衡状態に対応する。

“からまり状態”の相空間内での分布の様子を調べてみると、 $p_i = 0$ のまわりにフラクタル的に分布していることがわかる。ただし、“からまり状態”はトーラスではなくカオスである。リアプノフ・スペクトルを

¹e-mail address : c42636a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp

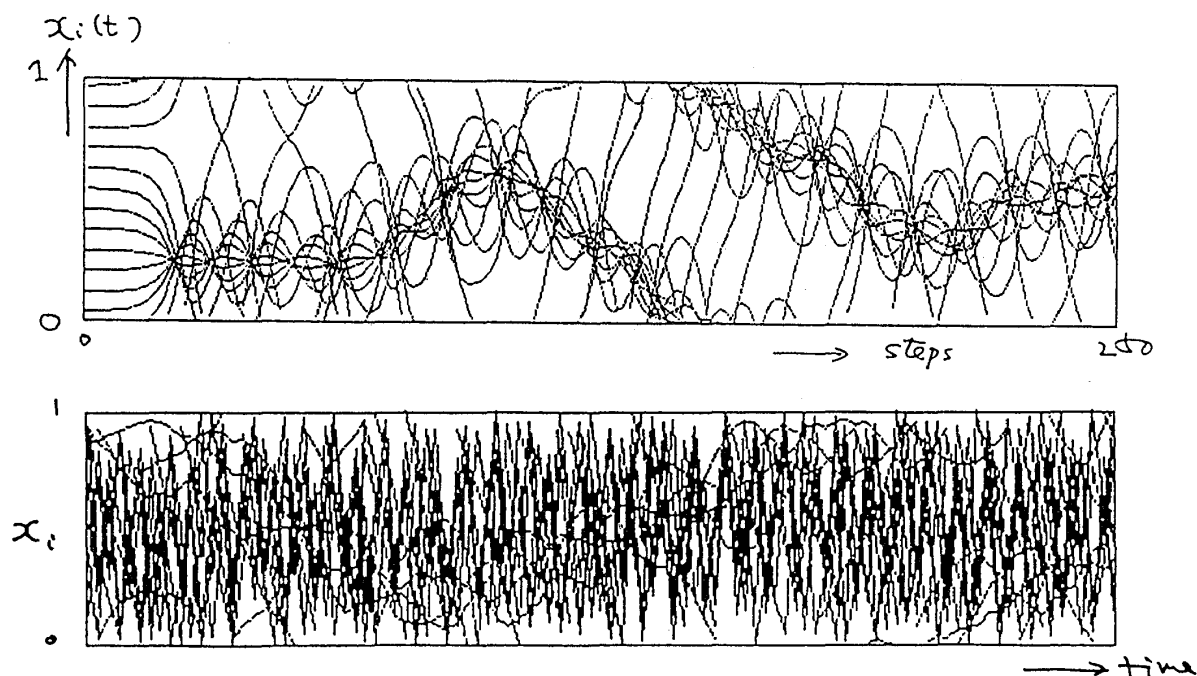


図 1: からまり状態（上）と一様乱雑状態（下）の時間発展. $N = 12, K = 0.3$. 横軸は時間、縦軸は各粒子の座標の値。

調べると、相空間内に“からまり状態”と“一様乱雑状態”の2種類のカオスが共存していることがわかる。

“からまり状態”は、有限の寿命を持って“一様乱雑状態”へと崩壊する。これは、2つの chaotic sea がつながっていることから予想される結果である。しかし、クラスターの寿命を予測する方法はいまのところ明らかではない。何故ならば、この崩壊は、カオスからカオスへの移行であり、「誘導現象」のように トーラスからカオスへの移行ではないからである。（後者の場合には、トーラス的な運動の寿命は Nekhoroshev bound で評価される。[2]）

“からまり状態”の寿命は粒子数の増加につれて減少する。このため、今のモデルでは、transient だったからまり状態が $N \rightarrow \infty$ の極限で安定化することは期待できない。相互作用の形をかえる（力の及ぶ範囲を有限にする）とか、相空間をコンパクトではなくするなどすればよいかもしれない。

相空間内に幾つかのカオス領域が共存している場合の移り変わりの様子は今後大いに研究されるべきであろう。

参考文献

- [1] T. Konishi and K. Kaneko, J. of Phys. A: 23 (1990) L715
- [2] Y. Aizawa et. al., Prog. of Theor. Phys. Suppl. 98 (1989) 36