

放物型初期境界値問題の数値解に対する精度保証について

佐世保工業高等専門学校 中尾充宏 (Mitsuhiro T. Nakao) *

佐世保工業高等専門学校 木村拓馬 (Takuma Kimura) †

京都大学数理解析研究所 木下武彦 (Takehiko Kinoshita) ‡

* † Sasebo National College of Technology

‡ RIMS, Kyoto University

1 はじめに

次の非線形放物型初期値境界値問題について考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f(x, t, u, \nabla u), & \text{in } \Omega \times J, \\ u(x, t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times J, \\ u(x, 0) = 0, & \text{on } \Omega, \end{cases} \quad (1a)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \times J, \quad (1b)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \text{on } \Omega, \quad (1c)$$

ここに, ν は正定数, $J := (0, T) \subset \mathbb{R}$, ($T < \infty$) は有界領域, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 1, 2, 3$) は有界凸多角形 (多面体) 領域とする.

本稿では, (1) に対する解の数値的存在検証条件を与え, そこで重要な役割を果たす (1) の線形化逆作用素のノルム評価手法を提案する.

2 解の存在条件

$S_h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ を有限次元部分空間とし, $S_h(\Omega)$ の基底を $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ とする. 近似解 $u_h^k \in H^1(J; S_h(\Omega))$ を適当な (1) の近似解とする. いま, $u = w + u_h^k$ とおけば (1) と同値な残差方程式は次の形に書ける.

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \Delta w - f'(u_h^k)w = g(w), & \text{in } \Omega \times J, \\ w(x, t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times J, \\ w(x, 0) = 0. & \text{on } \Omega, \end{cases} \quad (2a)$$

$$w(x, t) = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \times J, \quad (2b)$$

$$w(x, 0) = 0. \quad \text{on } \Omega, \quad (2c)$$

ここで, $S_h(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ ならば $g(w) = f(x, t, w + u_h^k, \nabla(w + u_h^k)) - \frac{\partial u_h^k}{\partial t} + \nu \Delta u_h^k - f'(u_h^k)w$ であり, $f'(u_h^k)$ は f の u_h^k における Fréchet 微分を意味する. 左辺の微分作用素を $\mathcal{L}_t := \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta - f'(u_h^k)$ と定義し, $\mathcal{L}_t$ が可逆のとき, $F(w) = \mathcal{L}_t^{-1}g(w)$ とおけば (2) は次の不動点形式

$$w = F(w) \quad (3)$$

に変形できる. ここで, $\mathcal{L}_t^{-1} : L^2(J; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(J; H_0^1(\Omega))$ はコンパクトであり, したがって, g に対する適当な仮定の下で (3) の不動点は Schauder の不動点定理

により示すことが出来る。即ち、候補者集合を $W_\alpha \subset L^2(J; H_0^1(\Omega))$ とおいたとき、 $F(W_\alpha) \subset W_\alpha$ が成り立つならば W_α に (3) の不動点が存在する。

ここで、 $\|\mathcal{L}_t^{-1}\| \equiv \|\mathcal{L}_t^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(J; L^2(\Omega)), L^2(J; H_0^1(\Omega)))}$ の評価が、この包含関係を確認する際に重要な役割を果たす。例えば、

$$W_\alpha = \left\{ w \in L^2(J; H_0^1(\Omega)) ; \|w\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \alpha \right\}$$

とおいたとき、解の存在条件は次のように表せる。

$$\|\mathcal{L}_t^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(J; L^2(\Omega)), L^2(J; H_0^1(\Omega)))} \sup_{w \in W_\alpha} \|g(w)\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \alpha, \quad (4)$$

3 $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(J; L^2(\Omega)), L^2(J; H_0^1(\Omega)))}$ の既知の評価

本節では、検証条件 (4) の計算に必要な $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|$ の既知の評価について述べる。

なお一般に、 $\mathcal{L}_t$ は適当な関数 $b \in L^\infty(J; L^\infty(\Omega))^d$, $c \in L^\infty(J; L^\infty(\Omega))$ を用いて、

$$\mathcal{L}_t = \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta + (b \cdot \nabla) + c,$$

の形式で表現できるため、以後はこの表現を扱うこととする。

3.1 A priori 評価

例えば $b = 0$ の場合、粗い評価として次の a priori 評価がよく知られている。

$$\|\mathcal{L}_t^{-1}\| \leq \exp(\beta T) \frac{C_p}{\nu} \|g\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \quad (5)$$

ここに、 C_p は $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ なる Poincaré 定数、 β は、

$$\max \left(\sup_{\Omega \times J} (-c), 0 \right) \leq \beta,$$

を満たす正定数とする。 β と T が大きいとき、(5) の評価は指数関数的に増大するため (4) に用いるには適さない ($b \neq 0$ の場合を含む一般的な a priori 評価については [6] を参照)。

3.2 A posteriori 評価 (その 1)

$P_h^1 : H_0^1(\Omega) \rightarrow S_h(\Omega)$ を H_0^1 -projection と定義する。すなわち、 P_h^1 は

$$(\nabla(u - P_h^1 u), \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall v_h \in S_h(\Omega), \quad (6)$$

をみたす作用素である。次に, $S_h(\Omega)$ の基底 $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ に対して, $n \times n$ 行列 L_ϕ , D_ϕ , Q_ϕ をそれぞれ

$$L_{\phi,i,j} := (\phi_j, \phi_i)_{L^2(\Omega)}, \quad D_{\phi,i,j} := (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2(\Omega)^d} \quad (7)$$

$$Q_{\phi,i,j} := \nu (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2(\Omega)^d} + ((b \cdot \nabla) \phi_j, \phi_i)_{L^2(\Omega)} + (c \phi_j, \phi_i)_{L^2(\Omega)}, \quad (8)$$

と定義する。 D_ϕ , L_ϕ は正定値対称行列となる。よって Cholesky 分解可能であり, それぞれ $D_\phi = D_\phi^{1/2} D_\phi^{T/2}$, $L_\phi = L_\phi^{1/2} L_\phi^{T/2}$ と書く。次に $M_\phi^{10}(h)$ を

$$\left\| D_\phi^{T/2} (L_\phi \frac{d}{dt} + Q_\phi)^{-1} L_\phi^{1/2} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(J)^n, L^2(J)^n)} \leq M_\phi^{10}(h), \quad (9)$$

をみたす正定数とおく。(9) をみたす定数の評価は, 線形連立常微分方程式の解を与える作用素の a priori 評価 (数値的検証法による) を用いて行われる [2].

さて, P_h^1 に対して次の誤差評価を仮定する:

$$\|u - P_h^1 u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega(h) \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap X(\Omega), \quad (10)$$

$$\|u - P_h^1 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega(h) \|u - P_h^1 u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (11)$$

ここに, $X(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ である。 $C_\Omega(h)$ の具体的な値は [1] を参照。また, 定数 $C_b := \|\sqrt{b_1^2 + \dots + b_d^2}\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}$, $C_1 := C_b + C_p \|c\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}$, $C_2 := C_b + 4C_\Omega(h) \|c\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}$ とおく。このとき次が成り立つ。

定理 3.1. 定数 $\kappa_\phi > 0$ は

$$\kappa_\phi := 2C_\Omega(h)C_2(1 + C_1 M_\phi^{10}(h)) < \nu, \quad (12)$$

をみたすと仮定する。このとき, 次の評価が成立する。

$$\|\mathcal{L}_t^{-1}\| \leq \frac{\nu M_\phi^{10}(h) + 2C_\Omega(h) + 2C_\Omega(h)C_1 M_\phi^{10}(h)}{\nu - \kappa_\phi}. \quad (13)$$

定理 3.1 の詳細は [3] を参照。この定理による評価は, 前述の A priori 評価と比して精度がよく, 扱う問題によっては, 指数関数的な増大が見られない。しかし, $M_\phi^{10}(h)$ の事後評価において, J を非常に細かく分割して計算しなければ (12) をみたすような小さな値が得られず, 計算コストに難があった,

4 $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(J; L^2(\Omega)), L^2(J; H_0^1(\Omega)))}$ の新しい評価

本節では, 全離散近似解の評価を用いた新しい $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|$ の評価について述べる。

4.1 準備：熱方程式の全離散近似と誤差評価

いま, $S_h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ を空間方向の有限次元部分空間, $V_k^1(J) \subset V^1(J) \equiv H^1(J) \cap \{u(0) = 0\}$ を時間方向の Lagrange 型区分一次有限要素空間とする ($\dim S_h = n$, $\dim S^k = m$). $V := V^1(J; L^2(\Omega)) \cap L^2(J; H_0^1(\Omega))$ と定義する. このとき, 空間方向の半離散作用素 $P_h : V \rightarrow V^1(J; S_h(\Omega))$ を,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(u - P_h u), v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \nu (\nabla(u - P_h u), \nabla v_h)_{L^2(\Omega)^d} = 0, \quad \forall v_h \in S_h(\Omega), \text{ a.e. } t \in J,$$

と定める. P_h は, 与えられた $f \in L^2(J; L^2(\Omega))$ を右辺とする斉次初期境界値問題,

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \nu \Delta u = f, \quad (14)$$

の解 u に対する半離散近似に対応する射影を意味する. さらに, 時間方向補間作用素 $\Pi_k : V^1(J; S_h(\Omega)) \rightarrow V_k^1(J; S_h(\Omega))$ を,

$$u(t_i) = \Pi_k u(t_i), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\},$$

と定め, 全離散近似に対応する projection $P_h^k : V \rightarrow V_k^1(J; S_h(\Omega))$ を

$$P_h^k u := \Pi_k(P_h u)$$

と定義する. $V_k^1(J; S_h(\Omega)) \equiv S_h(\Omega) \otimes V_k^1(J)$ である.

4.1.1 全離散近似の計算 P_h の定義から, 次を満たすベクトル値関数 $\vec{u}_h \in V^1(J)^n$ が存在する:

$$P_h u(x, t) = \vec{u}_h(t)^T \Phi(x).$$

ここに, $\Phi(x) \equiv (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$. $\vec{u}_h$ を用いて, (14) は次の常微分方程式系で表される.

$$L_\phi \frac{d}{dt} \vec{u}_h + \nu D_\phi \vec{u}_h = \tilde{f} \quad (15)$$

ここに, L_ϕ, D_ϕ は (7) で定義された $\mathbb{R}^{n \times n}$ の行列, $\tilde{f} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}_i = (f, \phi_i)_{L^2(\Omega)}$ である. ここで (15) の解は基本解行列を用いて次のように表せる:

$$\vec{u}_h(t) = \int_0^t \exp(\nu L_\phi^{-1} D_\phi(s - t)) L_\phi^{-1} \tilde{f}(s) ds, \quad (16)$$

したがって,

$$P_h^k u(x, t_j) = \left(\int_0^{t_j} \exp(\nu L_\phi^{-1} D_\phi(s - t_j)) L_\phi^{-1} \tilde{f}(s) ds \right) \Phi(x), \quad \forall x \in \Omega, 1 \leq j \leq m.$$

が成り立ち, 全離散近似 P_h^k はこれを用いて算定可能となる. さらに, $L_\phi^{-1} D_\phi$ は対角化可能であり, 行列指数関数の計算は容易であることに注意.

4.1.2 誤差評価 いま, $\tilde{V} := V \cap L^2(J; X(\Omega))$, $\Delta_t := \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta$ とおく. (14) の解 u と半離散近似解 $P_h u$ について, 以下の評価が成立する.

$$\|u\|_{V^1(J; L^2(\Omega))} \leq \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}. \quad (17)$$

$$\|u\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \frac{C_p}{\nu} \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}. \quad (18)$$

$$\|P_h u\|_{V^1(J; L^2(\Omega))} \leq \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}. \quad (19)$$

$$\|P_h u\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \frac{C_p}{\nu} \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}. \quad (20)$$

$$\|u - P_h u\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \frac{2}{\nu} C_\Omega(h) \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}. \quad (21)$$

$$\|u - P_h u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \leq 4C_\Omega(h) \|u - P_h u\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))}, \quad \forall u \in V. \quad (22)$$

また, P_h について, 次の逆評価を仮定する.

$$\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\text{inv}}(h) \|u_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u_h \in S_h(\Omega). \quad (23)$$

例えば $S_h(\Omega)$ が区一次多項式の場合, $C_{\text{inv}}(h) = \sqrt{12} h^{-1}$ ととれる [5].

さらに, 補間作用素 Π_k について次を仮定する.

$$\|u - \Pi_k u\|_{L^2(J)} \leq C_J(k) \|u\|_{V^1(J)}, \quad \forall u \in V^1(J). \quad (24)$$

例えば $V_k^1(J)$ が区一次多項式の場合, $C_J(k) = \frac{k}{\pi}$ で成立する [5]. (24) が成り立つとき, 次式が証明できる.

$$\|u_h - \Pi_k u_h\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \leq C_J(k) \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_h \right\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u_h \in V^1(J; S_h(\Omega)). \quad (25)$$

(20), (23), (25) と $\|P_h^k u\| \leq \|\Pi_k P_h u - P_h u\| + \|P_h u\|$ より次が得られる.

$$\|P_h^k u\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \left(\frac{C_p}{\nu} + C_{\text{inv}}(h) C_J(k) \right) \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}. \quad (26)$$

$\|u - P_h^k u\| \leq \|u - P_h u\| + \|P_h u - \Pi_k P_h u\|$ より次の 2 つの評価が得られる.

$$\|u - P_h^k u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \leq C_0(h, k) \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}, \quad (27)$$

$$\|u - P_h^k u\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq C_1(h, k) \|\Delta_t u\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}, \quad \forall u \in \tilde{V}. \quad (28)$$

ここで,

$$C_0(h, k) = \left(\frac{8}{\nu} C_\Omega(h)^2 + C_J(k) \right), \quad C_1(h, k) := \left(\frac{2}{\nu} C_\Omega(h) + C_{\text{inv}}(h) C_J(k) \right),$$

とおいた. 一般に, $C_\Omega(h) = \mathcal{O}(h)$, $C_J(k) = \mathcal{O}(k)$, $C_{\text{inv}}(h) = \mathcal{O}(h^{-1})$ となる. よって $k = h^2$ とおくと, $C_0(h, k) = \mathcal{O}(h^2)$, $C_1(h, k) = \mathcal{O}(h)$ となる.

4.2 A posteriori 評価 (その2)

$\|\mathcal{L}_t^{-1}\|$ の評価を考える. $A := -\Delta_t^{-1}(b \cdot \nabla + c)$ と作用素を定義する.

任意の $f_h^k \in V_k^1(J; S_h(\Omega))$ に対し $u_h^k \in V_k^1(J; S_h(\Omega))$ を $u_h^k - P_h^k A u_h^k = f_h^k$ の解とする. f_h^k と u_h^k を対応させる作用素を $[I - A]_{h,k}^{-1}$ とし, $M_{\phi,\psi}(h, k)$ を,

$$\|[I - A]_{h,k}^{-1} f_h^k\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq M_{\phi,\psi}(h, k) \|f_h^k\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))}, \forall f_h^k \in V_k^1(J; S_h(\Omega)), \quad (29)$$

なる非負定数とする. 詳細を省くが, $M_{\phi,\psi}(h, k)$ は適当な実行列のノルムに帰着する. 定数 $C_0, C_1, \kappa_{\phi,\psi}$ を以下のようにおく.

$$C_0 := M_{\phi,\psi} \left(\frac{C_p}{\nu} + C_{\text{inv}}(h) C_J(k) \right), \quad (30)$$

$$C_1 := \|b\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))^d} + C_p \|c\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}, \quad (31)$$

$$\kappa_{\phi,\psi} := \frac{\|b\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))} (1 + C_0 C_1) C_1(h, k) + C_0 C_1 C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}}{1 - C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}}, \quad (32)$$

$k = h^2$ ととると, $h \rightarrow 0$ で $C_0 \rightarrow M_{\phi,\psi} C_p / \nu$, $C_0(h, k) \rightarrow 0$, $C_1(h, k) \rightarrow 0$ である. よって h と k が十分小さいとき $\kappa_{\phi,\psi} \geq 0$, さらに $h \rightarrow 0$ で $\kappa_{\phi,\psi} \rightarrow 0$ がいえる.

定理 4.1. $0 \leq \kappa_{\phi,\psi} < 1$ と仮定する. このとき, 次の評価が成立する.

$$\|\mathcal{L}_t^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \kappa_{\phi,\psi}} \frac{C_0 + (1 + C_0 C_1) C_1(h, k)}{1 - C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}}. \quad (33)$$

証明 4.1 頁数の都合により途中計算を省く. また, $\|\cdot\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))}$, $\|\cdot\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}$, $\|\cdot\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))}$ をそれぞれ $\|\cdot\|_{L^\infty L^\infty}$, $\|\cdot\|_{L^2 L^2}$, $\|\cdot\|_{L^2 H_0^1}$ のように略記する.

任意の $g \in L^2(J; L^2(\Omega))$ に対し, $u := \mathcal{L}_t^{-1} g \in V \cap L^2(J; X(\Omega))$ とおく. P_h^k を用いて u のみたす方程式を分離すると,

$$\Delta_t u + (b \cdot \nabla) u + cu = g \iff u = \Delta_t^{-1} (-(b \cdot \nabla) u - cu + g) \quad (34)$$

$$\iff \begin{cases} P_h^k u = P_h^k \Delta_t^{-1} (-(b \cdot \nabla) u - cu + g), \\ (I - P_h^k) u = (I - P_h^k) \Delta_t^{-1} (-(b \cdot \nabla) u - cu + g). \end{cases} \quad (35a)$$

$$(35b)$$

となる. 略記のため $u_\perp := u - P_h^k u$ とおく. (35a), (29), (26), (18) より,

$$\begin{aligned} \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} &= \|[I - A]_{h,k}^{-1} P_h^k (A u_\perp + \Delta_t^{-1} g)\|_{L^2 H_0^1} \\ &\leq M_{\phi,\psi} \left(\|P_h^k A u_\perp\|_{L^2 H_0^1} + \|P_h^k \Delta_t^{-1} g\|_{L^2 H_0^1} \right) \\ &\leq C_0 \|b\|_{L^\infty L^\infty} \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} + C_0 \|c\|_{L^\infty L^\infty} \|u_\perp\|_{L^2 L^2} + C_0 \|g\|_{L^2 L^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

を得る. (27), (34) より,

$$\|u_\perp\|_{L^2 L^2} \leq C_0(h, k) (\|b\|_{L^\infty L^\infty} \|u\|_{L^2 H_0^1} + \|c\|_{L^\infty L^\infty} \|u\|_{L^2 L^2} + \|g\|_{L^2 L^2})$$

となる. $\mathcal{C}_3 := (1 - C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty L^\infty})^{-1}$ とおく. $0 \leq \kappa_{\phi, \psi} < 1$ より,

$$1 - C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty L^\infty} - \mathcal{C}_0 \mathcal{C}_1 C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty L^\infty} > 0 \quad (37)$$

$$1 - C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty L^\infty} - \|b\|_{L^\infty L^\infty} C_1(h, k) > 0 \quad (38)$$

がいえることに注意する. (37) と $\mathcal{C}_0 \mathcal{C}_1 C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty L^\infty} \geq 0$ より,

$$\|u_\perp\|_{L^2 L^2} \leq C_0(h, k) (\mathcal{C}_1 \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} + \|b\|_{L^\infty L^\infty} \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} + \|g\|_{L^2 L^2}) \mathcal{C}_3, \quad (39)$$

を得る.

次に, (35b) の $L^2(J; H_0^1(\Omega))$ ノルムを考えると, (28) より, 次がいえる.

$$\begin{aligned} \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} &\leq C_1(h, k) \|-(b \cdot \nabla)u - cu + g\|_{L^2 L^2} \\ &\leq C_1(h, k) \left(\mathcal{C}_1 \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} + \|b\|_{L^\infty L^\infty} \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} + \|c\|_{L^\infty L^\infty} \|u_\perp\|_{L^2 L^2} + \|g\|_{L^2 L^2} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

非負定数 $R_{1,1}, R_{1,2}, R_{2,1}, R_{2,2}, b_1, b_2$ をそれぞれ

$$R_{1,1} := 1 - \mathcal{C}_0 \mathcal{C}_1 C_0(h, k) \|c\|_{L^\infty L^\infty} \mathcal{C}_3, \quad R_{1,2} := \mathcal{C}_0 \|b\|_{L^\infty L^\infty} \mathcal{C}_3, \quad b_1 := \mathcal{C}_0 \mathcal{C}_3,$$

$$R_{2,1} := \mathcal{C}_1 C_1(h, k) \mathcal{C}_3, \quad R_{2,2} := 1 - \|b\|_{L^\infty L^\infty} C_1(h, k) \mathcal{C}_3, \quad b_2 := C_1(h, k) \mathcal{C}_3,$$

とおくと, (36), (39) より,

$$R_{1,1} \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} - R_{1,2} \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} \leq b_1 \|g\|_{L^2 L^2} \quad (41)$$

(38), (39), (40) より,

$$-R_{2,1} \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} + R_{2,2} \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} \leq b_2 \|g\|_{L^2 L^2} \quad (42)$$

が得られる. (41) および (42) より, 連立不等式

$$\begin{pmatrix} R_{1,1} & -R_{1,2} \\ -R_{2,1} & R_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} \\ \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \|g\|_{L^2 L^2}$$

が得られる. $0 \leq \kappa_{\phi, \psi} < 1$ より,

$$\det \begin{pmatrix} R_{1,1} & -R_{1,2} \\ -R_{2,1} & R_{2,2} \end{pmatrix} = 1 - \kappa_{\phi, \psi} > 0$$

となり, さらに係数行列がモノトーンであることから, 連立不等式の解は,

$$\begin{pmatrix} \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} \\ \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{1 - \kappa_{\phi, \psi}} \begin{pmatrix} R_{2,2} & R_{1,2} \\ R_{2,1} & R_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \|g\|_{L^2 L^2} \quad (43)$$

となる. $\|u\|_{L^2 H_0^1} \leq \|P_h^k u\|_{L^2 H_0^1} + \|u_\perp\|_{L^2 H_0^1}$ より, (33) を得る. $\square$

5 数値実験

例として、以下の問題を扱う：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = u^2 + \tilde{f}(x, t) & \text{in } \Omega \times J \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times J \\ u(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (44a)$$

$$(44b)$$

$$(44c)$$

u_h^k を u の近似とする。(44) の残差方程式は以下のようになる：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_t w \equiv \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \Delta w - 2u_h^k w = g & \text{in } \Omega \times J \\ w(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times J \\ w(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (45a)$$

$$(45b)$$

$$(45c)$$

即ち、 $f(x, t, u, \nabla u) = u^2 + \hat{f}(x, t)$, $b = 0$, $c = -2u_h^k$ である。 $g(w)$ は、

$$g(w) = w^2 + \varepsilon, \quad \varepsilon = (u_h^k)^2 + \hat{f} - \left(\frac{d}{dt} u_h^k - \nu \Delta u_h^k \right),$$

とかける。 ε は $u_h^k \rightarrow u$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ となる残差である。

候補者集合 $W_{\alpha\beta}$ を以下で定義する：

$$W_{\alpha\beta} := \left\{ w \in L^2(J; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(J; L^2(\Omega)); \begin{array}{l} \|w\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \alpha, \\ \left\| \frac{d}{dt} w \right\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \leq \beta. \end{array} \right\}$$

任意の $\hat{w} \in \mathcal{L}_t^{-1} g(W_{\alpha\beta})$ で、

$$\|\hat{w}\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} < \alpha, \quad \left\| \frac{d}{dt} \hat{w} \right\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} < \beta,$$

がともに成立するとき、 $\mathcal{L}_t^{-1} g(W_{\alpha\beta}) \subset W_{\alpha\beta}$ であり、 $W_{\alpha\beta}$ に解が存在する。ここで、

$$\|\hat{w}\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq \|\mathcal{L}_t^{-1}\| \left(\alpha\beta\sqrt{\frac{T}{8}} + \|\varepsilon\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \right)$$

$$\left\| \frac{d}{dt} \hat{w} \right\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \leq (2C_p \|\mathcal{L}_t^{-1}\| \|u_h^k\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))} + 1) \left(\alpha\beta\sqrt{\frac{T}{8}} + \|\varepsilon\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \right),$$

と評価でき、よって次の検証条件を得る：

$$\left\{ \|\mathcal{L}_t^{-1}\| \left(\alpha\beta\sqrt{\frac{T}{8}} + \|\varepsilon\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \right) \leq \alpha, \right. \quad (46a)$$

$$\left. (2C_p \|\mathcal{L}_t^{-1}\| \|u_h^k\|_{L^\infty(J; L^\infty(\Omega))} + 1) \left(\alpha\beta\sqrt{\frac{T}{8}} + \|\varepsilon\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \right) \leq \beta. \right\} \quad (46b)$$

$\|\mathcal{L}_t^{-1}\|$ を評価し、(46) を満たす α, β を求めた。 $d = 1$, $\Omega = (0, 1)$ とし、 $\tilde{f}$ は以下の厳密解 $u(x, t)$ をもつように定めた：

- 例 1. $u(x, t) = t \sin(\pi x)$
- 例 2. $u(x, t) = \sin(\pi t) \sin(\pi x)$

u_h^k には厳密解の空間 3 次エルミート, 時間一次ラグランジュ補間を用いた. (46) の検証および $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|$ の評価には, 空間時間ともに一様な区分一次の基底関数を用いた. (5), (13), (33) による $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|$ の評価を図 1, 2 に示す. (46) を満たす α, β の値を表 1, 2 に示す. 計算は Dell Precision T7500 (CPU: Xeon x5680, メモリ: 72GB) 上で, MATLAB R2010b, INTLAB 6 を用いて行った.

考察 図 1, 2 より, (33) による評価は (5), (13) よりも値が小さく, これらの例に関しては (46) の検証に適している. $\nu = 0.1$ の場合, 例 1 では $T = 2.0$ まで解の存在性を検証できたが, 例 2 では $T = 1.25$ までしか検証できていない. これは, 高次基底を用いる, 近似解の精度を上げ $\|\varepsilon\|$ を小さくする等により検証可能となると思われる.

おわりに

補間作用素による新しい $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|$ の評価と, それを用いた放物型初期値境界値問題の解の存在性の検証例を示した.

謝辞 本研究は科研費 (基盤研究 (S), 課題番号 20224001) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] S. Kimura and N. Yamamoto, On explicit bounds in the error for the H_0^1 -projection into piecewise polynomial spaces, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 31(2), 109–115, 1999.

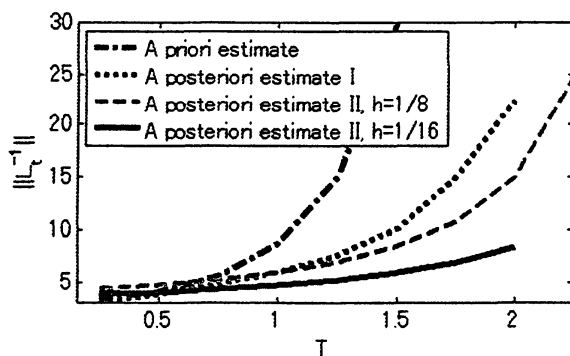


図 1: 例 1, $\nu = 0.1$.

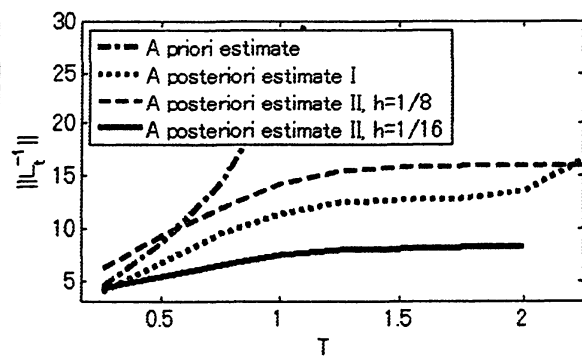


図 2: 例 2, $\nu = 0.1$.

表 1: 例 1, $h = 1/16$, $k = h^2$.

ν	T	$\ \varepsilon\ _{L^2(J;L^2(\Omega))}$	$\ \mathcal{L}_t^{-1}\ $	α	β
0.1	0.50	1.02E-04	3.8311	0.0004	0.0002
	1.00	2.89E-04	4.4760	0.0013	0.0011
	1.50	5.31E-04	5.6457	0.0030	0.0036
	2.00	8.18E-04	7.8919	0.0070	0.0116
1.0	0.50	1.02E-03	0.4903	0.0005	0.0012
	1.00	2.89E-03	0.5106	0.0015	0.0038
	1.50	5.31E-03	0.5339	0.0028	0.0081
	2.00	8.18E-03	0.5600	0.0046	0.0143

表 2: 例 2, $h = 1/16$, $k = h^2$.

ν	T	$\ \varepsilon\ _{L^2(J;L^2(\Omega))}$	$\ \mathcal{L}_t^{-1}\ $	α	β
0.1	0.50	6.88E-04	5.4591	0.0038	0.0057
	1.00	1.38E-03	7.6006	0.0115	0.0195
	1.25	1.92E-03	8.0815	0.0211	0.0462
	1.50	2.06E-03	8.2177	—	—
1.0	0.50	6.58E-03	0.5476	0.0036	0.0113
	1.00	1.32E-02	0.5670	0.0075	0.0233
	1.50	1.97E-02	0.5671	0.0114	0.0357
	2.00	2.63E-02	0.5671	0.0153	0.0490

- [2] T. Kinoshita, T. Kimura and M.T. Nakao: A posteriori estimates of inverse operators for initial value problems in linear ordinary differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(6), 1622-1636, 2011.
- [3] M.T. Nakao, T. Kinoshita and T. Kimura: On a posteriori estimates of inverse operators for linear parabolic initial-boundary value problems, to appear in *Computing*.
- [4] M.T. Nakao, K. Hashimoto, Y. Watanabe: A numerical method to verify the invertibility of linear elliptic operators with applications to nonlinear problems, *Computing*, 75, 1-14, 2005.
- [5] M.H. Schultz, Spline Analysis, *Prentice-Hall*, 1973.
- [6] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications II/A, *Springer-Verlag*, 1990.