

群の Amenability と表現論

鹿児島大学 教養部 酒井幸吉

はじめに

群あるいは半群に対して, amenability という概念がある. これに関する本格的な研究は, J. Dixmier [13], E. Følner [20, 21] 及び M. M. Day [8, 9] 等により着手された. 以来, amenability ももつ群, 半群について, 多くの研究者により詳しく調べられている. 今後ともこの方面について豊富な理論展開が期待される. 本稿では局所 Compact 群に限定し, amenability が群のどのような性質と関連しているかについて述べる. 後半では, amenable な変換群及び extremely amenability についても触れることにする. 多くの結果は半群の場合にも拡張され, 議論が複雑になるとはいえ興味深いものがある. amenability は, 半群上の解析学において, 特に有効な役割を果たすものと思われる.

〈記号〉 本文では, 群 G といえば, 局所 Compact なものとす

る. G 上の関数 f に対して, $\bar{f}$, $\tilde{f}$, $\check{f}$ は, それぞれ $\bar{f}(g) = \overline{f(g)}$, $\tilde{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}$, $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ ($g \in G$) によって定まるものとする. また $s \in G$ に対して, sf , f_s は, それぞれ $sf(g) = f(sg)$, $f_s(g) = f(gs)$ ($g \in G$) と定める. 一般に, 位相空間 X に対して, X 上の有界連続関数全体及び有界関数全体で作る Banach 空間 (ノルムは sup. ノルム) をそれぞれ $CB(X)$, $B(X)$ で表わす. また X 上の関数族子に対して, $\mathcal{F}_r$ は子に属する実数値関数の全体とする. 一般に集合 E に対して, その特性関数も 1_E で表わすことにする.

§ 1 Amenability

G は群とする. G 上の関数族子にて, 任意の $s \in G$ に対して, $f \in \mathcal{F} \Rightarrow sf \in \mathcal{F}$ であるとき, 子は左不変であるという. いま $\mathcal{F}$ は $L^\infty(G)$ の左不変な閉部分空間であり, 更に次の条件

$$(1) \quad 1_G \in \mathcal{F} \quad \text{かつ} \quad f \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{F}$$

をみたすものとする. $\varphi \in \mathcal{F}^*$ が次の条件 (2) ~ (4) をみたすとき, $\mathcal{F}$ 上の mean という.

$$(2) \quad \varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)} \quad (\forall f \in \mathcal{F}), \quad (3) \quad \varphi(1_G) = 1,$$

$$(4) \quad \mathcal{F}_r \ni f, f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0.$$

ここで (4) の代りに $\|\varphi\| = 1$ としてもよい. 更に次の条件

$$(5) \quad \varphi(sf) = \varphi(f) \quad (\forall (s, f) \in G \times \mathcal{F})$$

をみたすとき, φ は $\mathcal{F}$ 上の left invariant mean (以下 LIM

と略記する) であるという。もし $L^\infty(G)$ 上に LIM が存在するとき, G は amenable であるという。

いま G 上の関数 f にて, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, G の単位元の近傍 U が存在して

$$|f(ug) - f(g)| < \varepsilon \quad (\forall (u, g) \in U \times G)$$

となるとき, f は左一様連続であるという。有界な左一様連続な関数の全体を $LUC(G)$ で表わす。このとき $CB(G)$, $LUC(G)$ は $L^\infty(G)$ の左不変な閉部分空間であり, 条件 (1) をみたすものである。 $L^\infty(G)$ 上の LIM は $CB(G)$, $LUC(G)$ 上の LIM とみなせるが, 逆に次の結果がある。

定理 1 (Greenleaf [34]). $CB(G)$ または $LUC(G)$ 上に LIM が存在すれば, G は amenable である。

いま $P(G) = \{\alpha \in L^1_r(G) : \alpha \geq 0, \|\alpha\|_1 = 1\}$ とおき, Hulanicki [40] で導入された, (5) より強い条件

$$(6) \quad \varphi(\alpha * f) = \varphi(f) \quad (\forall (\alpha, f) \in P(G) \times L^\infty(G))$$

を考える。 $L^\infty(G)$ 上の mean φ が (6) をみたすとき, topological left invariant mean (TLIM と略記) という。 TLIM は LIM であることは明らかであるが, つい最近次の結果がえられた。

定理 2 (Renaud [60]). $L^\infty(G)$ 上の LIM は, TLIM になる。

Compact 群 G 上の Haar 積分は $CB(G)$ 上の LIM であるから,

Compact 群は amenable である。また abel 群も amenable になる ([13])。更に次の定理より, solvable 群も amenable になることがわかる。

定理 3 (Rickert [62])。 (i) G が amenable ならば, その閉部分群も amenable である。

(ii) N は G の閉正規部分群とする。 G が amenable ならば, G/N も amenable になる。

(iii) G の閉正規部分群 N に対して, N 及び G/N が amenable ならば, G も amenable である。

定理 1 ~ 3 は amenable な群の研究において, 基本的な役割を果たすものである。

さて amenable でない群の例として, [13] で指摘されているように, 二つの生成元をもつ自由群 F_2 (discrete 群として) がある。更に Dixmier は discrete 群が amenable であるための必要十分条件は, F_2 を部分群として含まないことである。 ということと予想している。最近 Keller [42] がこの問題について一定のアプローチを試みているが, まだ解決をみるに至っていない。

以上 LIM だけを対象としてきたが, right invariant mean (RIM と略記) も同様に定義される。いま φ は $L^1(G)$ 上の LIM [RIM] とすると, $\check{\varphi}(f) = \varphi(\check{f})$ ($\forall f \in L^1(G)$) によ

って φ を定めると, これは $\text{RIM} [\text{LIM}]$ になる. 従って $L^\infty(G)$ 上の LIM の存在と RIM の存在は同値になる. 更に, LIM であると同時に RIM でもあるものが存在する. しかし半群の場合は, LIM の存在は必ずしも RIM の存在を意味しないので, *left amenable*, *right amenable* の区別がある.

§ 2. Dixmier の条件

群 G が *amenable* であるための条件として, Dixmier [13] 及び Følner [20] によって与えられたものについてのべる. いま任意の整数 $n \geq 1$ に対して, 次の型の関数を作る.

$$(7) \quad h = \sum_{k=1}^n (s_k f^k - f^k) \quad (s_k \in G, f^k \in CB_r(G)).$$

この様な型の関数の全体を $H(G)$ とする. このとき次の条件 (D) を考える.

$$(D): \quad \underline{\text{任意の } h \in H(G) \text{ に対して}} \quad \sup_{x \in G} h(x) \geq 0.$$

いま $CB(G)$ 上に $\text{LIM } \varphi$ が存在するとしよう. § 1 の (3), (

$$4) \text{ は } \inf_{x \in G} f(x) \leq \varphi(f) \leq \sup_{x \in G} f(x) \quad (\forall f \in CB_r(G)). \text{ と}$$

同値だから, $h \in H(G)$ に対して $0 = \varphi(h) \leq \sup_{x \in G} h(x)$ と

なる. 逆に条件 (D) が成立するとき, Hahn-Banach の定理よ

り, $\varphi(H(G)) = 0$, $\varphi(1_G) = 1$ かつ $\|\varphi\| = 1$ となる $\varphi \in CB(G)^*$

が構成される. これは $CB(G)$ 上の LIM である. すなわち,

定理 4. 条件 (D) は, G が *amenable* である: と同値である.

一般に $\mathfrak{F}$ は $L^\infty(G)$ の左不変な内部分空間とし, §1 の条件 (1) をみたすとする. この $\mathfrak{F}$ についても, (7) 型の関数を作り, 条件 (D) を考えることができる. これは $\mathfrak{F}$ 上に LIM が存在するための必要十分条件になる ([36], [63]).

さて, Dixmier は $CB(G)$ 上に LIM が存在するとき, これを利用して, G の有界表現は unitary 表現に similar になることを明らかにした. いま G の Hilbert 空間上への弱連続な表現 $g \rightarrow T_g$ ($g \in G$) が, $\sup_{g \in G} \|T_g\| < \infty$ をみたすとき, この表現は有界であるという.

定理 5. G が amenable ならば, G の有界な弱連続表現は unitary 表現に similar となる.

このことは, Compact 群に対してはよく知られているが, Haar 積分の代りに $CB(G)$ 上の LIM を用いて, Compact 群の場合と同様に示される. 更に Dixmier は, この定理の逆も成立することを予想している.

§ 3. Day の理論

ここでは, Day [9, §5] が discrete 半群に対して展開した理論を, 局所 compact 群 G の場合に適用してみよう. いまネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$ に対して, 次の条件を考える.

$$(DW): \quad \underline{w^* - \lim}_{\alpha} (s \varphi_\alpha - \varphi_\alpha) = 0 \quad (\forall s \in G).$$

$$(DS): \quad \underline{\lim}_{\alpha} \|s \varphi_\alpha - \varphi_\alpha\|_1 = 0 \quad (\forall s \in G).$$

$P(G) \subset L^\infty(G)^*$ とみなすと, $P(G)$ の各元は $L^\infty(G)$ 上の mean と考えることができる. 更に $P(G)$ は $L^\infty(G)$ 上の mean の全体の中で w^* -dense になる. このことより, $\varphi \in L^\infty(G)^*$ が LIM ならば, ネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$ で $\varphi = w^*\text{-}\lim_\alpha \varphi_\alpha$ となるものが存在し, このネットは (DW) をみたす. 逆に (DW) をみたすネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$ が存在すれば, $L^\infty(G)$ 上の mean 全体は w^* -compact だから, $\{\varphi_\alpha\}$ の w^* -cluster point が存在し, これは LIM になる. 従って

定理 6. G が amenable であるための必要十分条件は, (DW) をみたすネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$ が存在することである.

いま $P(G)$ の中に (DW) をみたすネットが存在すれば, (DS) をみたすネットも存在する. このことは, [9] でも示されているが, Namioka [54] による簡明な証明がある.

定理 7. G が amenable であるための必要十分条件は, (DS) をみたすネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$ が存在することである.

§4. Mitchell の理論

J. V. Neuman が群 G 上の almost periodic な関数に対して, 不変平均の存在証明に用いた方法のアナロジーによって, $LUC(G)$ 上に LIM が存在するための条件がえられる. いま, $f \in LUC_r(G)$ に対して, $\{f_s : s \in G\}$ の convex hull を作り, これの compact-様位相による閉包を $\Theta(f)$ で表わす. 任意の

$f \in LUC_r(G)$ に対して, $\Theta(f)$ が定数関数を含むとき, G は right stationary であるという. そこで $Z(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1_G \in \Theta(f)\}$ とおく. このとき次の定理が成り立つ.

定理 8. G が amenable であるための条件は, G が right stationary となることである. このとき, $f \in LUC_r(G)$, $\lambda \in Z(f)$ に対して, $\varphi(f) = \lambda$ となる $LUC(G)$ 上の LIM が存在する.

この定理は, まず discrete 群については Mitchell [50] により示され, 一般の場合は Granirer and Lau [33] により明らかにされた. 更に Wong [72] は, $L^\infty(G)$ 上に TLIM が存在するための条件として, 上と類似の結果を示した.

§ 5. Følner の条件

1955 年 Følner [21] は discrete 群 G に対して, 次の条件を考えた.

$(FC)_d$: 任意の $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) 及び G の有限集合 K に対して, G の有限集合 E で

$$|E \cap sE| > (1 - \varepsilon)|E| \quad (\forall s \in K)$$

となるものが存在する. ここで $|E|$ は E のカーディナル数である. このとき

定理 9. discrete 群 G が amenable であるための必要十分条件は, $(FC)_d$ が成立することである.

Følner は, Dixmier の条件 (D) を用いて, 上の定理の十分性を示したが, Day の理論からも明らかである. 一方, 必要性に関する Følner の証明は非常に複雑であるが, Namioka [54] は Day の理論 (定理 7) を用いて簡明な証明を与えている.

discrete 群については, 上の定理は, 次節でのべる Hulanicki-Reiter 理論の内容を完全に含んでいる. いま $f = |E|^{-1} 1_E$, $h = |E|^{-\frac{1}{2}} 1_E$ とおいて, $(FC)_d$ を書きかえてみよう. f に対しては, $f \in L^1(G)$ とみなすと, $f \geq 0$, $\|f\|_1 = 1$ であり,

$$\|f - s f\| < 2\varepsilon \quad (\forall s \in K).$$

となる. このことは, amenable な discrete 群は, §6 の条件 (P_1) を満たすことも示している. 一方, h に対しては, $h \in L^2(G)$ とみなすと, $\|h\|_2 = 1$ であり,

$$|h * \tilde{h}(s) - 1| < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

となる. これは, amenable な discrete 群 G では, G 上の定数関数 1_G が $h * \tilde{h}$ 型の正定値関数で compact 一様に近似できることを示すものであり, §6 の条件 (R) が成立しているのである.

さて条件 $(FC)_d$ を, 一般の局所 compact 群 G に拡張する試みは, Hulanicki [39] でも行われているが, 次の Emerson and Greenleaf [16] において与えられたものが自然である.

(FC): 任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の任意の compact 集合 K に対し

て, G の compact 集合 U で

$$0 < |U| < \infty, \quad |U \Delta sU|/|U| < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

をみたすものが存在する. ここで $|U|$ は U の Haar 測度であり, $U \Delta sU$ は U と sU の対称差である.

(A): 任意の $\varepsilon > 0$ 及び単位元を含む G の任意の compact 集合 K に対して, G の compact 集合 U で

$$0 < |U| < \infty, \quad |U \Delta KU|/|U| < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

をみたすものが存在する.

このとき, [16] は (FC) と (A) は同値であることを示し, 更に次の結果を証明している.

定理 10. 条件 (FC), (A) はいずれも G が amenable であることと同値である.

§ 6. Hulanicki - Reiter の理論

いま, 群 G に対して, 次の各条件を考える.

(R): G 上の compact な台をもつ連続関数のネット $\{h_\alpha\}$ が存在して, 正定値関数のネット $\{h_\alpha * \tilde{h}_\alpha\}$ が G 上の定数値関数 1_G に compact 一様収束する.

(R)': G の単位表現は, G の $L^2(G)$ 上の左正則表現に (Fell [18] の意味で) weakly contained である.

(R)'': G の任意の既約 unitary 表現は左正則表現に weakly contained である.

$1 \leq p < \infty$ に対して,

(P_p) : 任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の compact 集合 K に対して, $f \in L^p(G)$ で, $f \geq 0$, $\|f\|_p = 1$ かつ

$$\|f - sf\| < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

なるものが存在する. とに (P_1) は Reiter の条件 といわれるものである.

(J) : $L^\infty(G)$ 上に TLIM が存在する.

このとき, $(R) \Leftrightarrow (R)' \Leftrightarrow (R)''$ であることは Godement [25], Fell [18] の討論よりわかるが, Reiter [57] にて, $(R) \Leftrightarrow (P_1)$ なることが明らかにされた. 更に Glicksberg [24] の結果を用いて, Reiter [58] は, G が amenable ならば (P_1) が成立することを示した. 一方, Hulanicki [40] は, $(J) \Rightarrow (R) \Rightarrow (P_1) \Rightarrow (J)$ であることを明らかにした.

定理 11. 条件 (R) , (P_1) 及び (J) は, いずれも G が amenable であることと同値である.

なお $(J) \Leftrightarrow (\text{amenability})$ であることの直接的な証明は Namiooka [55] にあるが, Renaud [60] の結果より TLIM と LIM の区別は不要となったのである. また Stegeman [70] は, $(P_1) \Leftrightarrow (P_p)$ ($1 < p < \infty$) であることを示している.

さて, 上の定理より, G の amenability と G の unitary 表現の所謂 weakly containment property との間に密接な関

係があることがわかるが、更に Greenleaf [35] でも、これに関連する結果が示されている。いま次の条件を考える。

(WF1): G の任意の既約 Unitary 表現 T 及び任意の閉部分群 H に対して、 T は ${}_G L^{T|H}$ に weakly contained である。

ここで $T|H$ は T の H への制限であり、これを G の表現に誘導したもの ${}_G L^{T|H}$ としている。

このとき、次の定理が成立する。

定理 12. (WF1) は G が amenable であることと同値である。

このことは、Fell [19] で予想されていたものである。

§ 7. Fixed point property

G の amenability と所謂 fixed point property と密接に結びついている。いま次の条件を考える。

(FP)_c: 群 G が局所凸ベクトル空間の凸 compact 集合 Q 上に jointly 連続かつ affinely に変換群として作用しているとする。すなわち、 $G \times Q \rightarrow Q$ への連続写像 $(g, x) \rightarrow gx$ で、

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2) x, \quad ex = x \quad (g_1, g_2 \in G, x \in X),$$

$g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 g x_1 + \lambda_2 g x_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, x_1, x_2 \in X, g \in G$) なるものが与えられたとする。このとき、 Q の中に G -fixed point x_0 (i.e. $g x_0 = x_0$ ($\forall g \in G$)) が存在する。

$(FP)_S$: $(FP)_C$ にて, G の作用が *separately* 連続である
とおきかえた条件.

いま G が条件 $(FP)_C$ をみたせば, G は $LUC(G)$ 上の *mean* の
集合上に *jointly* 連続かつ *affinely* に作用しているから, *fixed*
point が存在する. これは *LIM* に外ならない. 従って G は
amenable になる. 逆に次の定理がある.

定理 13. 条件 $(FP)_C$, $(FP)_S$ はいずれも $LUC(G)$ 上に
LIM が存在することと同値であり, 従ってこれらは G が *amen-*
able であることと同値である.

このことは, まず *discrete* 群に対して Day [10] により
示され, 一般の場合には Rickert [62] で $(amenability) \Leftrightarrow$
 $(FP)_C$ となることが明らかにされた. 更に Mitchell [53] に
おいて $(FP)_C \Leftrightarrow (FP)_S$ であることが示された. なお *amenabi-*
lity と各種の *fixed point property* に関して, Argabright
[2], Huff [38], Mitchell [51, 52, 53], Simon [69] 等
により詳しく研究されている.

以上群の *amenability* を特徴づける種々の条件についで
のべてきたが, この外, Day [11], Gilbert [23], Leptin [47]
等により, *convolution operator* のある性質と *amenability*
が結びつくことが明らかにされている.

§ 8. Amenable な均値空間

群 G とその閉部分群 H に対して, 均相空間 $\mathbb{Z} = G/H$ を作り,
 $\mathbb{Z}$ 上に一つの quasi-invariant 測度 ν を固定し, $L^1(\mathbb{Z}), L^\infty(\mathbb{Z})$,
 $P(\mathbb{Z}) = \{f \in L^1(\mathbb{Z}) : f \geq 0, \|f\|_1 = 1\}$ など考える. 更に,
 $G \times \mathbb{Z}$ 上の関数 $\lambda(g, z)$ は

$$\int f(gz) d\nu(z) = \int f(z) \lambda(g, z) d\nu(z) \quad (\forall (g, z) \in G \times L^1(\mathbb{Z}))$$

なるものとする. $L^\infty(\mathbb{Z})$ 上の mean は §1 と同様に定義する.

また $\mathbb{Z}$ 上の関数 f に対して, G の作用 l_g ($g \in G$) を $l_g f(z) = f(gz)$ ($z \in \mathbb{Z}$) によって定める. いま $L^\infty(\mathbb{Z})$ 上の mean φ が $\varphi(l_g f) = \varphi(f)$ ($\forall (g, f) \in G \times L^\infty(\mathbb{Z})$) を満たすとき, G -invariant mean (G -IM と略記) いう.

もし $L^\infty(\mathbb{Z})$ 上に G -IM が存在するとき, $\mathbb{Z}$ は G -amenable であるという. 一方 $\mathbb{Z}$ 上の G -一様連続な有界関数の全体を, $LUC(\mathbb{Z})$ と表わすことにすると, $CB(\mathbb{Z}), LUC(\mathbb{Z})$ 上でも §1 と同様に, G -IM を考えることができる. このとき, 定理 1 のアナロジーとして次の結果がある.

定理 14 (Greenleaf [35]). $CB(\mathbb{Z})$ または $LUC(\mathbb{Z})$ 上に G -IM が存在すれば, $\mathbb{Z}$ は G -amenable である.

いま G 自身が amenable ならば, H も amenable であり, 更に $\mathbb{Z}$ も G -amenable になる. 逆に次の定理が成立する.

定理 15. $\mathbb{Z}$ が G -amenable で, H も amenable ならば, G は amenable になる.

さて, G の amenability を特徴づける諸条件は, 自然に $\mathbb{Z}$ の G -amenability を与える条件に拡張される. いま次の諸条件を考える.

$(D)_Z$: 任意の $(s_i, f_i) \in G \times CB_p(\mathbb{Z})$ ($i=1 \sim n, n=1, 2, \dots$) に対して, $\sup_{z \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^n (f_i(s_i z) - f_i(z)) \geq 0$ である.

いま $\varphi \in P(\mathbb{Z})$ に対して, $l_s^* \varphi(z) = \varphi(s^{-1}z) \lambda(s, z)$ ($(s, z) \in G \times \mathbb{Z}$) とおく.

$(DW)_Z$: ネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(\mathbb{Z})$ で $w^* - \lim_\alpha (l_s^* \varphi_\alpha - \varphi_\alpha) = 0$ ($\forall s \in G$) なるものが存在する.

$(DS)_Z$: ネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(\mathbb{Z})$ で $\lim_\alpha \|l_s^* \varphi_\alpha - \varphi_\alpha\| = 0$ ($\forall s \in G$) なるものが存在する.

$(P_1)_Z$: 任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の compact 集合 K に対して, $\|l_s^* \varphi - \varphi\| < \varepsilon$ ($\forall s \in K$) なる $\varphi \in P(\mathbb{Z})$ が存在する.

$(R)_Z$: G の単位表現は, G の $L^2(\mathbb{Z})$ 上に構成される準正則表現に weakly contained である.

$(FP)_Z^C$: G が局所凸ベクトル空間の凸 compact 集合 Q 上に, jointly 連続かつ affinely に変換群として作用し, 更に Q の中に H -fixed point があるとする. このとき, G -fixed point も存在する.

$(FP)_Z^S$: $(FP)_Z^C$ にて, G の作用が separately 連続であるとした条件.

このとき、次のことが成立する。

定理 16 (Greenleaf [35], Eymard [17]). 条件 $(\Theta)_Z$, $(\Theta W)_Z$, $(\Theta S)_Z$, $(P)_Z$, $(R)_Z$, $(FP)_Z^c$, $(FP)_Z^s$ は、いずれも Z が G -amenable であることと同値である。

この定理では、所謂 Følner 型の条件が除かれている。これは、 ν が特に invariant である場合に考えられる。

定理 17 ([35]). Z 上に G -invariant 測度 ν があるとする。このとき Z が G -amenable であるための必要十分条件は次の $(FC)_Z$ が成立することである。

$(FC)_Z$: 任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の compact 集合 K に対して、 Z の compact 集合 U で、

$$0 < \nu(U) < \infty, \quad \nu(U \Delta sU) / \nu(U) < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

となるものが存在する。

一般に位相空間 Z に、群が変換群として作用しているとき、 Z に対しても G -amenability を考えることができる。これに関しては、[35] で議論されているが、まだ残されている問題も多い。

§ 9. Extremely amenability

ここでは S は半群 (discrete) であるとする。 $B(S)$ 上の mean φ が $\varphi(f \cdot h) = \varphi(f) \varphi(h)$ ($\forall f, h \in B(S)$) をみたすとき、multiplicative であるという。もし $B(S)$ 上

に multiplicative な LIM (MLIM と略記) が存在するとき, S は extremely left amenable (ELA と略記) であるという. ELA な半群については, Mitchell [51], Granirer [30, 32, 33] において詳しく研究されている.

いま S に対して次の条件を考える.

(ED): 任意の $(s_i, f_i, g_i) \in S \times B(S) \times B(S)$ ($i=1, 2, \dots, n$, $n=1, 2, \dots$) に対して,

$$\sup_{s \in S} \sum_{i=1}^n f_i(s) (g_i(s_i s) - g_i(s)) \geq 0.$$

(EDS): S 上の dirac 測度のネット $\{\delta_{s_\alpha}\} \subset B(G)^*$ で

$$\lim_{\alpha} \|\delta_{s s_\alpha} - \delta_{s_\alpha}\| = 0 \quad (\forall s \in S)$$

なるものが存在する.

(F): 任意の $a, b \in S$ に対して, common right zero $c \in S$ が存在する. すなわち $ac = bc = c$ となる $c \in S$ が存在する.

(EFP): S の各元 s に対して, compact Hausdorff 空間 X 上の連続写像 $S: x \rightarrow sx$ ($x \in X$) を引き起し, $s_1(s_2 x) = (s_1 s_2)x$ ($s_1, s_2 \in S, x \in X$) であるとする. このとき, X は S -fixed point をもつ.

(EM): 任意の $f \in B_r(S)$ に対して, right orbit $\{f_s: s \in S\}$ の pointwise 閉包は S 上の定数値関数を含む.

このとき, 次の結果が成立する.

定理18 (Granirer [30]). 半群 S に対して, 上の各条件 (ED) , (EDS) , (F) , (EFP) , (EM) は, いずれも S が ELA であることと互に同値である.

なお, 条件 (ED) , (EDS) , (F) , (EM) は *extremely amenability* に対する, それぞれ Dixmier 型, Day 型, Følner 型, Mitchell 型の条件である. Lau [43, 44] は *extremely amenability* を一般化して, N -*extremely amenability* なる考えを導入している. 一方, 集合 X に対して, 半群 S が作用しているとして, X の S -*extremely amenability* を考えることができる. このとき, 上の条件 (ED) , (EDS) 及び (F) は, X の S -*extremely amenability* を特徴づける条件に拡張できる. この議論は, 筆者の [65] にある. 最後に ELA な群は, 単位元だけから成る *trivial* なものに限ることも注意しておく.

おわりに

本稿では, *amenability* を特徴づけること, すなわち LIM の存在条件を主にのべたが, LIM そのものの性質あるいは LIM の集合の構造についても広く調べられている. この方面からも *amenable* な群, 半群に関する情報がえられる. 次頁にある文献リストは, 本文で引用したものに限定せず, *amenability* に関連するものを, 入手できた範囲で作成したものである.

REFERENCES

- [1] L. Aragbright, Invariant means on topological semigroups, Pacific J. Math. 16(1966), 193-203.
- [2] _____, Invariant means and fixed points; a sequel to Mitchell's paper, Trans. A. M. S. 130(1968), 127-130.
- [3] J. Bunce, Representations of strongly amenable C^* -algebras, Proc. A. M. S. 32(1972), 241-246.
- [4] C. Chou, On the size of the set of left invariant means on a semigroup, Proc. A. M. S. 23(1969), 199-205.
- [5] _____, On a conjecture of E. Granirer concerning the range of an invariant mean, Proc. A. M. S. 26(1970), 105-107.
- [6] _____, On topologically invariant means on a locally compact group, Trans. A. M. S. 151(1970), 443-456.
- [7] _____, On a geometric property of the set on invariant means on a group, Proc. A. M. S. 30(1971), 296-302.
- [8] M. M. Day, Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semigroups, Trans. A. M. S. 69(1950), 276-291.
- [9] _____, Amenable semigroups, Illinois J. Math. 1(1957), 509-544.
- [10] _____, Fixed-point theorems for compact convex sets, (correction), Ibid. 5(1961), 585-589, (8(1964), 713).
- [11] _____, Convolutions, means, and spectra, Ibid. 8(1964), 100-111.
- [12] A. Derighetti, On the property P_1 of locally compact groups, Comment. Math. Helv. 46(1971), 226-239.
- [13] J. Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semigroupes et leurs applications, Acta. Sci. Math. (Szeged), 12(1950), 213-227.

- [14] R. Douglas, On the inversion invariance of invariant means, Proc. A. M. S. 16(1965), 642-644.
- [15] H. Dye, On the ergodic mixing theorem, Trans. A. M. S. 118 (1965), 123-130.
- [16] W. Emerson and F. Greenleaf, Covering properties and Følner conditions for locally compact groups, Math. Z. 102(1967), 370-384.
- [17] P. Eymard, Sur les moyennes invariantes et les representations unitaires, C. R. Acad. Paris, 272(1971), 1649-1652.
- [18] J. Fell, The dual spaces of C-algebras, Trans. A.M. S. 94 (1960), 365-403.
- [19] _____, Weak containment and induced representations of groups, II, Trans. A. M. S. 110(1964), 424-447.
- [20] E. Følner, Generalization of a theorem of Bogoliouboff to topological abelian groups with appendix on Banach mean values in non-abelian groups, Math. Scand. 2(1954), 5-18.
- [21] _____, On groups with full Banach mean value, Ibid. 3(1955), 243-254.
- [22] _____, Note on groups with and without full Banach mean value, Ibid. 5(1957), 5-11.
- [23] J. Gilbert, Convolution operators on $L^p(G)$ and properties of locally compact groups, Pacific J. Math. 24(1968), 257-268.
- [24] I. Glicksberg, On convex hulls of translates, Ibid. 13(1963), 97-113.
- [25] R. Godement, Les fonctions de types positif et la theorie des groupes, Trans. A. M. S. 63(1948), 1-84.
- [26] E. Granirer, On left amenable semigroups which admit countable

- left invariant means, Bull. A. M. S. 69(1963), 101-105.
- [27] _____, On amenable semigroups with a finite-dimensional set of invariant means I, II, Illinois J. Math. 7(1963), 32-48, 49-58.
- [28] _____, A theorem on amenable semigroups, Trans. A. M. S. 111(1964), 367-379.
- [29] _____, On the invariant means on topological semigroups and on topological groups, Pacific J. Math. 15(1965), 107-140.
- [30] _____, Extremely amenable semigroups I, II, Math. Scand. 17(1965), 177-197, 20(1967), 93-113.
- [31] _____, On the range of an invariant mean, Trans. A. M. S. 125(1966), 384-394.
- [32] _____, Functional analytic properties of extremely amenable semigroups, Trans. A. M. S. 137(1969), 53-76.
- [33] _____ and A. Lau, Invariant means on locally compact groups, Illinois J. Math. 15(1971), 249-257.
- [34] F. Greenleaf, Invariant means on locally compact groups and their applications, Van Nostrand Mathematical studies 16, 1969.
- [35] _____, Amenable actions of locally compact groups, J. Functional Analysis, 4(1969), 295-315.
- [36] E. Hewitt and K. Ross, Abstract harmonic analysis I, Springer Verlag, 1963.
- [37] R. Huff, Some applications of a general Lemma on invariant means, Illinois J. Math. 14(1970), 216-221.
- [38] _____, Existence and uniqueness of fixed-points for semigroups of affine maps, Trans. A. M. S. 152(1970), 99-106.

- [39] A. Hulanicki, Groups whose regular representation weakly contains all unitary representations, *Studia Math.* 24(1964), 37-59.
- [40] _____, Means and Folner condition on locally compact groups, *Ibid.* 27(1966), 87-104.
- [41] R. Kaufman, Remak on invariant means, *Proc. A.M. S.* 18(1967), 120-122.
- [42] G. Keller, Amenable groups and varieties of groups, *Illinois J. Math.* 16(1972), 257-269.
- [43] A. Lau, Topological semigroups with invariant means in the convex hull of multiplicative means, *Trans. A. M. S.* 148 (1970), 69-84.
- [44] _____, Functional analytic properties of topological semigroups and N-extreme amenability, *Ibid.* 152(1970), 431-439.
- [45] _____, Extremely amenable algebras, *Pacific J. Math.* 33(1970), 329-336.
- [46] _____, Invariant means on dense subsemigroups of topological groups, *Canad. J. Math.* 23(1971), 797-801.
- [47] H. Leptin, On locally compact groups with invariant means, *Proc. A. M. S.* 19(1968), 489-494.
- [48] S. Lloyd, A mixing condition for extreme left invariant means, *Trans. A. M. S.* 125(1966), 461-481.
- [49] S. Luthar, Uniqueness of the invariant mean on an abelian semigroup, *Illinois J. Math.* 3(1959), 28-44.
- [50] T. Mitchell, Constant functions and left invariant means on semigroups, *Trans. A. M. S.* 119(1965), 244-261.
- [51] _____, Fixed points and multiplicative left invariant means,

- Ibid. 122(1966), 195-202.
- [52] _____, Function algebras, means, and fixed points, Ibid. 130(1968), 117-126.
- [53] _____, Topological semigroups and fixed points, Illinois J. Math. 14(1970), 630-641.
- [54] I. Namioka, Følner's conditions for amenable semigroups, Math. Scand. 15(1964), 18-28.
- [55] _____, On a recent theorem by H. Reiter, Proc. A.M.S. 17 (1966), 1101-1102.
- [56] C. Rao, Invariant means on spaces of continuous or measurable functions, Trans. A.M.S. 114(1965), 187-196.
- [57] H. Reiter, Sur la propriété (P_1) et les fonctions de type positif, C.R. Acad. Paris, 258(1964), 5134-5135.
- [58] _____, On some properties of locally compact groups, Indag. Math. 27(1965), 697-701.
- [59] _____, Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford Mathematical monographs, 1968.
- [60] P. Renaud, Equivalent types of invariant means on locally compact groups, Proc. A.M.S. 31(1972), 495-498.
- [61] _____, Invariant means on a class of Von Neumann algebras, Trans. A.M.S. 170(1972), 285-291.
- [62] N. Rickert, Amenable groups and groups with the fixed point property, Ibid. 127(1967), 221-232.
- [63] G. Robison, Invariant integrals over a class of Banach spaces, Pacific J. Math. 4(1954), 123-150.
- [64] W. Rosen, On invariant means over compact semigroups, Proc. A.M.S. 7(1957), 1076-1082.

- [65] K. Sakai, Extremely amenable transformation semigroups,
to appear in Proc. Japan Acad.
- [66] _____, Amenable transformation groups, to appear in Sci.
Rep. Kagoshima Univ. 22(1973).
- [67] _____, Amenable transformation groups II, to appear in
Proc. Japan Acad.
- [68] I. Schochetman, Nets of subgroups and amenability, Proc.
A.M.S. 29(1971), 397-403.
- [69] B. Simon, A remark on groups with the fixed point property,
Ibid. 32(1972), 623-624.
- [70] J. Stegeman, On a property concerning locally compact groups,
Indag. Math. 27(1965), 702-703.
- [71] C. Wilde and K. Witz, Invariant means and the Stone-Čech
compactification, Pacific J. Math. 21(1967), 577-586.
- [72] J. Wong, Topologically stationary locally compact groups
and amenability, Trans. A.M.S. 144(1969), 351-363.
- [73] _____, Topological invariant means on locally compact groups
and fixed points, Proc. A.M.S. 27(1971), 572-578.
- [74] _____, Invariant means on locally compact semigroups,
Ibid. 31(1972), 39-45.