

一様非拡大性をもつ写像列について

On a uniformly nonexpansive sequence

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治

Koji Aoyama

Graduate School of Social Sciences,

Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.

Keywords and phrases. 一様非拡大列, 強非拡大列, 強非拡大写像。

1 はじめに

不動点理論において強非拡大性をもつ写像は一つの研究対象である [2, 9–15, 18–20, 22, 24, 26, 28, 29]。さらに, 不動点の近似法の研究では, 強非拡大性をもつ写像列を意識すると見通しよく問題を解決できることが多い [1, 3, 5–9, 14, 16, 17, 23, 27, 28]。強非拡大性をもつ写像列には様々な種類や例があるが, その一部はさらにより (強い) 性質をもっている [4, 25]。本稿では, そのよい性質をもった写像列 (一様非拡大性をもつ写像列) に関する結果を述べる。

2 準備

本稿では, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E のノルム, C を E の空でない部分集合, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, $\mathbb{R}_+$ を非負実数の集合とする。

写像 $T: C \rightarrow E$ が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。写像 $T: C \rightarrow E$ が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, 任意の $x, y \in C$ と $r > 0$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|r(x - y) + (1 - r)(Tx - Ty)\|$$

が成り立つときをいう [21]。写像 $T: C \rightarrow E$ が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [20]。

- T は非拡大である。
- $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \rightarrow 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n) \rightarrow 0$ となる。

定義より直ちに、堅非拡大写像は非拡大であり、 E 上の恒等写像は堅非拡大であり、強非拡大であることがわかる。また、 E が一様凸 (uniformly convex) のとき、堅非拡大写像は強非拡大であることが知られている [20, Proposition 2.1]。さらに、次の強非拡大写像の特徴付けが知られている。

補助定理 2.1 ([4, Lemma 2.1]). 写像 $T: C \rightarrow E$ について、以下は同値である。

- (1) T は強非拡大である。
- (2) 任意の $M > 0$ と $\epsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ が存在し

$$x, y \in C, \|x - y\| \leq M, \|x - y\| - \|Tx - Ty\| < \delta \Rightarrow \|x - y - (Tx - Ty)\| < \epsilon$$

が成り立つ。

補助定理 2.1 の (2) は、文献 [19] の強擬非拡大 (strongly quasinonexpansive) 写像の定義からヒントを得たもので、この強非拡大写像の特徴付けが、次節で扱う一様非拡大列を導入するきっかけになった。強擬非拡大写像について詳しくは、[2, 18, 26] を参照されたい。

$\{T_n\}$ を C から E への写像の列とする。 $\{T_n\}$ が強非拡大性をもつ、または、強非拡大列 (strongly nonexpansive sequence) であるとは、次の 2 条件が成り立つときをいう [7, 8]。

- 各 T_n は非拡大である。
- $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|T_n x_n - T_n y_n\| \rightarrow 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して、 $x_n - y_n - (T_n x_n - T_n y_n) \rightarrow 0$ となる。

強非拡大性をもつ写像列について詳しくは、文献 [7, 8, 23] を参照されたい。

後の節で以下の補助定理を用いる。

補助定理 2.2 ([18, Lemma 3.2]). K を空でない集合、 f と g を上に有界な K から $\mathbb{R}_+$ への関数とし、 $\alpha = \sup\{f(x) : x \in K\}$ とおく。このとき、以下は同値である。

- (1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ が存在して

$$x \in K, g(x) < \delta \Rightarrow f(x) < \epsilon$$

が成り立つ。

- (2) $\{x_n\}$ が K の点列で、 $g(x_n) \rightarrow 0$ ならば、 $f(x_n) \rightarrow 0$ である。
- (3) 有界な非減少関数 $\gamma: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}_+$ が存在し、任意の $x \in K$ に対して $\gamma(f(x)) \leq g(x)$ であり、任意の $t \in (0, \alpha]$ に対して $\gamma(t) > 0$ となる。

3 一様非拡大性をもつ写像列

この節では、一様非拡大性をもつ写像列 (一様非拡大列) の定義を述べた後、その例および基本性質を説明する。以下、 E を Banach 空間、 C を E の空でない部分集合とする。

C から E への写像の列 $\{T_n\}$ が一様非拡大性をもつ、または、一様非拡大列 (uniformly nonexpansive sequence) であるとは、任意の $M > 0$ と $\epsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ が存在し

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}, x, y \in C, \|x - y\| \leq M, \|x - y\| - \|T_n x - T_n y\| < \delta \\ \Rightarrow \|x - y - (T_n x - T_n y)\| < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つときをいう [4, 25]。補助定理 2.1 より、 $\{T_n\}$ が一様非拡大列ならば、各 T_n は強非拡大 (非拡大) であることがわかる。

一様非拡大列については次のことが知られている。

- 一様非拡大列は、強非拡大列である [4, Lemma 3.2]。しかし、強非拡大列は、一様非拡大列とは限らない [4, Example 3.4]。
- 一つの強非拡大写像 T からなる列 $T, T, \dots$ は一様非拡大列である [4, Example 3.3]。
- 強非拡大写像の列が一様非拡大列とは限らない。
- E が一様凸なとき、堅非拡大写像の列は一様非拡大列である [4, Example 3.5]。

一様非拡大列のその他の例については、[4, Example 3.6], [25, 例 3.1]などを参照されたい。

二つの強非拡大写像の合成は強非拡大であることが知られているが [20]、一様非拡大列もこれと似た性質をもつ。

定理 3.1 ([4, Theorem 3.7]). C と D を E の空でない部分集合、 $\{S_n\}$ を D から E への写像の列、 $\{T_n\}$ を C から E への写像の列とし、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(C) \subset D$ とする。このとき、 $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ が一様非拡大列ならば、 $\{S_n T_n\}$ も一様非拡大列である。

定理 3.1 の「一様非拡大列」を「強非拡大列」に置き換えられることが知られている ([7, Theorem 3.4] および [8, Theorem 3.2] を参照)。

E が一様凸のとき、強非拡大写像と非拡大写像の凸結合は、強非拡大になることが知られているが [20]、一様非拡大列もこれと似た性質をもつ。

定理 3.2 ([4, Theorem 3.11]). $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列, $\{S_n\}$ を C から E への非拡大写像の列, $\{U_n\}$ を C から E への一様非拡大列とし, $\inf_n \alpha_n > 0$ であり, E は一様凸であるとする。このとき, $\{\alpha_n U_n + (1 - \alpha_n) S_n\}$ は一様非拡大列である。

強非拡大列に関して, 定理 3.2 と類似の結果が知られている ([7, Theorem 3.11] および [8, Theorem 3.7] を参照)。

I を E 上の恒等写像とする。 $S_n \equiv I$ のとき $\{S_n\}$ は一様非拡大列だから, 定理 3.2 より直ちに次の系が得られる。

系 3.3 ([4, Lemma 3.9]). $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列, $\{S_n\}$ を C から E への非拡大写像の列, I を E 上の恒等写像とし, $\inf_n \alpha_n > 0$ であり, E は一様凸であるとする。このとき, $\{\alpha_n I + (1 - \alpha_n) S_n\}$ は一様非拡大列である。

$\alpha_n \neq 1$ のとき, $z = S_n z \Leftrightarrow z = [\alpha_n I + (1 - \alpha_n) S_n] z$ 。つまり, $z \in C$ が S_n の不動点であることと, z が $\alpha_n I + (1 - \alpha_n) S_n$ の不動点であることは同値である。したがって, 系 3.3 より, E が一様凸であるとき, 所与の非拡大写像の列から, 共通不動点集合が一致する一様非拡大列を容易に作り出せることがわかる。

4 一様非拡大性をもつ写像列の特徴付け

本節では, 一様非拡大性をもつ写像列の特徴付けに関する結果を紹介する。以下, E を Banach 空間, C を E の空でない部分集合, $\{T_n\}$ を C から E への写像の列とする。

まず, 補助定理 2.2 を使って次の定理を証明する。これは, [4, Theorem 4.1] と似た結果である。

定理 4.1. 次は同値である。

- (1) $\{T_n\}$ は一様非拡大列である。
- (2) 各 T_n は非拡大であり, さらに, 任意の $M > 0$ に対して, 以下の条件を満たす有界な非減少関数 $\gamma: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}_+$ が存在する。
 - $t \in (0, \alpha]$ のとき, $\gamma(t) > 0$ であり,
 - $n \in \mathbb{N}, x, y \in C, \|x - y\| \leq M$ のとき

$$\gamma(\|x - y - (T_n x - T_n y)\|) \leq \|x - y\| - \|T_n x - T_n y\|$$

となる。ここで

$$\alpha = \sup \{\|x - y - (T_n x - T_n y)\| : x, y \in C, \|x - y\| \leq M, n \in \mathbb{N}\}$$

である。

証明. $M > 0$ を所与とし, $K = \{(u, v, n) \in C \times C \times \mathbb{N} : \|u - v\| \leq M\}$ とおき, K から $\mathbb{R}_+$ への関数 f と g を, $(x, y, n) \in K$ に対して

$$f(x, y, n) = \|x - y - (T_n x - T_n y)\| \quad \text{および} \quad g(x, y, n) = \|x - y\| - \|T_n x - T_n y\|$$

で定義する。(1) および (2) いずれの場合も各 T_n は非拡大であるから, 任意の $(x, y, n) \in K$ に対して

$$f(x, y, n) \leq \|x - y\| + \|T_n x - T_n y\| \leq 2\|x - y\| \leq 2M \quad (4.1)$$

が成り立つ。さらに, 任意の $(x, y, n) \in K$ に対して, $g(x, y, n) \leq \|x - y\| \leq M$ である。ゆえに, f と g は上に有界である。よって, 補助定理 2.2 の (1) と (3) の同値性より, (1) と (2) が同値であることがわかる。□

上記の定理 4.1 より次の系が得られる。

系 4.2. 次は同値である。

- (1) $\{T_n\}$ は一様非拡大列である。
- (3) 各 T_n は非拡大であり, さらに, 任意の $M > 0$ に対して, 以下の条件を満たす非減少関数 $\gamma_2: [0, 2M] \rightarrow [0, M]$ が存在する。
 - $t \in (0, 2M]$ のとき, $\gamma_2(t) > 0$ であり,
 - $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in C$, $\|x - y\| \leq M$ のとき

$$\gamma_2(\|x - y - (T_n x - T_n y)\|) \leq \|x - y\| - \|T_n x - T_n y\|$$

となる。

証明. 定理 4.1 (2) と系 4.2 (3) が同値であることを示す。

まず, 系 4.2 (3) ならば定理 4.1 (2) については, (4.1) より $\alpha \leq 2M$ なので, $t \in [0, \alpha]$ のとき $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ として γ を定義すればよい。

次に, 定理 4.1 (2) ならば系 4.2 (3) であることを示す。 $K = \{(u, v, n) \in C \times C \times \mathbb{N} : \|u - v\| \leq M\}$ とおく。(i) $\alpha = f(x, y, n)$ となる $(x, y, n) \in K$ が存在するとき, $\gamma_2: [0, 2M] \rightarrow [0, M]$ を, $t \in [0, 2M]$ に対して

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [0, \alpha]; \\ M, & t \in (\alpha, 2M] \end{cases}$$

で定義し, (ii) 任意の $(x, y, n) \in K$ に対して $f(x, y, n) < \alpha$ のとき, $\gamma_2: [0, 2M] \rightarrow [0, M]$ を, $t \in [0, 2M]$ に対して

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [0, \alpha); \\ M, & t \in [\alpha, 2M] \end{cases}$$

で定義する。いずれの場合も, $\gamma_2([0, 2M]) \subset [0, M]$ であり, γ_2 が非減少であり, $0 < t \leq 2M$ のとき $\gamma_2(t) > 0$ であり, $(u, v, n) \in K$ のとき $\gamma_2(f(u, v, n)) \leq g(u, v, n)$ であることが示せる。以上で, 定理 4.1 (2) ならば系 4.2 (3) であることが示せた。□

系 4.2 は, [4, Theorem 4.1] を微修正したものである。[4, Theorem 4.1] では T_n が非拡大であると明示していないが, 各 T_n が非拡大ならば

$$n \in \mathbb{N}, x, y \in C, \|x - y\| \leq M \Rightarrow \|x - y - (T_n x - T_n y)\| \leq 2M$$

であるから, 系 4.2 では「各 T_n が非拡大であること」を仮定した。

系 4.2 より直ちに次の系を得る。

系 4.3. T を C から E への非拡大写像とする。このとき, 以下は同値である。

- (1) T が強非拡大である。
- (2) 任意の $M > 0$ に対して, 非減少関数 $\gamma: [0, 2M] \rightarrow [0, M]$ が存在し, 以下が成り立つ。

- $t \in (0, 2M]$ のとき, $\gamma(t) > 0$ であり,
- $x, y \in C, \|x - y\| \leq M$ のとき

$$\gamma(\|x - y - (Tx - Ty)\|) \leq \|x - y\| - \|Tx - Ty\|$$

となる。

系 4.3 は, 文献 [20] で示唆されているが, そこでは T を非拡大に限定していない (ように読める)。 T が非拡大のとき, $\|x - y\| \leq M \Rightarrow \|x - y - (Tx - Ty)\| \leq 2M$ となるので, 系 4.3 では, それを仮定した。

参考文献

- [1] K. Aoyama, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III (ISBFS 2009), 2011, pp. 343–350.

- [2] ———, *Strongly quasinonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2016, pp. 19–27.
- [3] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 168–180.
- [4] ———, *Uniformly nonexpansive sequences*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 179–187.
- [5] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.
- [6] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.
- [7] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.
- [8] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, 2008, pp. 1–18.
- [9] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.
- [10] ———, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.
- [11] ———, *Cutter mappings and subgradient projections in Banach spaces*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 457–473.
- [12] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.
- [13] ———, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2009, pp. 7–26.
- [14] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.
- [15] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

- [16] K. Aoyama and M. Toyoda, *Approximation of zeros of accretive operators in a Banach space*, Israel J. Math. **220** (2017), 803–816.
- [17] ———, *Approximation of common fixed points of strongly nonexpansive sequences in a Banach space*, J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), Art. 35, 16.
- [18] K. Aoyama and K. Zembayashi, *Strongly quasinonexpansive mappings, II*, J. Nonlinear Convex Anal. **19** (2018), 1655–1663.
- [19] R. E. Bruck, *Random products of contractions in metric and Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **88** (1982), 319–332.
- [20] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.
- [21] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.
- [22] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, 1996, pp. 313–318.
- [23] 青山耕治, 強非拡大写像列について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1667** (2009), 28–38.
- [24] ———, 擬非拡大写像列の共通不動点問題に関する収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1819** (2012), 1–8.
- [25] ———, 一様非拡大性をもつ写像列, 実解析学シンポジウム 2015 報告集 **45** (2015), 101–106.
- [26] ———, 強擬非拡大写像について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2011** (2016), 36–41.
- [27] ———, *An iterative method for generalized split feasibility problems*, 京都大学数理解析研究所講究録 **2065** (2018), 19–29.
- [28] ———, *Hilbert 空間における非拡大写像と擬非拡大写像の不動点近似について*, 京都大学数理解析研究所講究録 **2019** (2114), 29–35.
- [29] 青山耕治, 高橋渉, 擬非拡大写像の族に関する強収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1570** (2007), 14–25.