

ねじれ振動を伴う建物の地震応答解析のための層方向縮約法

正会員 ○足立冬樹^{*1} 同 吉富信太^{*1} 同 辻 聖晃^{*1} 同 竹脇 出^{*1}

2. 構造—2. 振動

偏心 ねじれ振動 地震応答解析 縮約モデル 逆問題型定式化

1. 序

建物の平面的な偏心が建物の耐震性にとって重要な要因であることは広く認識されており、これまでも多くの研究によりその重要性が指摘されている。平面的な偏心を有する建物でも、偏心率がそれほど大きくない場合には、偏心がないものとして地震応答解析が行われることが多い。しかし、偏心率が大きい場合や、低層部と高層部で平面規模が異なるセットバック建物の場合にはねじれを考慮する必要がある。

建物の地震応答を評価するには、一般に時刻歴応答解析による検討が必要となるが、ねじれを考慮することで自由度が大きくなり、計算機に大きな負荷が要求される。そこで、計算機の容量や時間的制約などの困難点を克服した精度の高い数値解析法が求められている。

本論文の目的は、建物が動的な地震外力を受ける場合について、ねじれを考慮した多自由度モデルを層方向に関して少自由度モデルに縮約し、簡易かつ高精度な時刻歴応答解析が可能な方法を提案することにある。本論文では、全層において平面形が同一で、重心位置と剛心位置が全層で同じ建物を扱う。地震入力方向とし、地震入力方向の並進運動と回転方向の運動のみを考慮する。

2. 主体構造の縮約法

逆問題型定式化に基づき多自由度モデルを少自由度モデルに縮約する。縮約前のモデルを原モデル、縮約後のモデルを縮約モデルと呼ぶ。また、一般層の表記を、原モデルでは第 i 層、縮約モデルでは第 j 層とする。図1のように正の向きを定義し、原モデルの X, Y 方向の長さは全層で等しく、それぞれ L_x, L_y とする。本論文では地震動の入力は Y 方向のみとする。偏心率 R_{yi} は全層で等しいとし、偏心距離も全層で等しくなり、これを e とする。また、 Y 方向の剛性に対する X

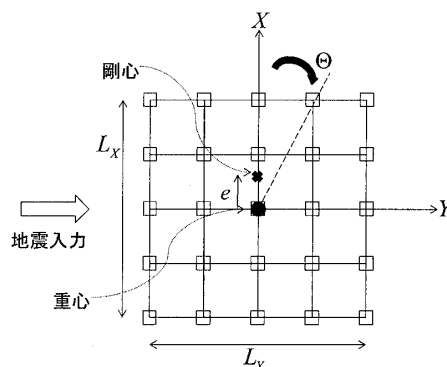


図1 正の向き

方向の剛性の比を α とする。

ここでは縮約過程の明快な提示のため、図2のように原モデルの第 i 層の質量 m_i 、回転慣性 I_i 、並進剛性 k_i 、偏心距離 e_i 、ねじれ剛性 K_i が指定された2層モデルを1層モデルに縮約する場合を示す。 $(\bar{\cdot})$ は縮約モデルに関する量を表す。

縮約モデルに関して非減衰自由振動時の運動方程式を書くと、並進運動に関しては次式となる。

$$\bar{m}_1 \ddot{\bar{y}}_1 + \bar{k}_1 (\bar{y}_1 + \bar{e}_1 \bar{\theta}_1) = 0 \quad (1a)$$

一方、回転運動に関しては次式となる。

$$\bar{I}_1 \ddot{\bar{\theta}}_1 + \bar{K}_1 \bar{\theta}_1 + \bar{e}_1 \bar{k}_1 (\bar{y}_1 + \bar{e}_1 \bar{\theta}_1) = 0 \quad (1b)$$

縮約モデルの変位と回転角が1次振動成分のみを用いて表されるとすると、 A を未定定数として次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{Bmatrix}^T = A \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(1)} \\ \bar{\varphi}_1^{(1)} \end{Bmatrix}^T e^{i\bar{\omega}^{(1)} t} \quad (2)$$

(2)式を(1a,b)式に代入すると、

$$-\bar{\omega}^{(1)2} \bar{m}_1 \bar{y}_1 + \bar{k}_1 (\bar{y}_1 + \bar{e}_1 \bar{\theta}_1) = 0 \quad (3a)$$

$$-\bar{\omega}^{(1)2} \bar{I}_1 \bar{\theta}_1 + \bar{K}_1 \bar{\theta}_1 + \bar{e}_1 \bar{k}_1 (\bar{y}_1 + \bar{e}_1 \bar{\theta}_1) = 0 \quad (3b)$$

(3a,b)式から縮約モデルの並進剛性 $\bar{k}_1$ 、ねじれ剛性 $\bar{K}_1$ は次式で表される。

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{m}_1 \bar{y}_1}{\bar{y}_1 + \bar{e}_1 \bar{\theta}_1} \bar{\omega}^{(1)2}, \quad \bar{K}_1 = \frac{\bar{I}_1 \bar{\theta}_1 - \bar{e}_1 \bar{m}_1 \bar{y}_1}{\bar{\theta}_1} \bar{\omega}^{(1)2} \quad (4a,b)$$

縮約モデルの層の位置は、原モデルの特定の層の位置に対応させ、これらの特定の層の位置を縮

約代表位置と呼ぶ。ここでは、縮約代表位置として原モデルの第2層を選択し、縮約モデルの第1層を対応させている。縮約モデルの質量と回転慣性は、原モデルの縮約代表位置間の質量と回転慣性を上側の縮約代表位置へ単純和したものとす。つまり、 $\bar{m}_1 = m_1 + m_2$, $\bar{I}_1 = I_1 + I_2$ であり、既知量として扱う。また、縮約モデルの偏心距離については、原モデルと等しくなるようにし、 $\bar{e}_1 = e$ とする。

縮約モデルの並進剛性とねじれ剛性は、原モデルとの等価性条件を逆問題的に解くことにより決定する。ここでは、未知量である縮約モデルの並進剛性 $\bar{k}_1$ とねじれ剛性 $\bar{K}_1$ を、以下の等価性条件に基づき決定する。すなわち、原モデルの1次固有円振動数と縮約モデルの1次固有円振動数が等しく、原モデルの縮約代表位置における重心の変位と回転角の1次モード成分比と、それに対応する縮約モデルの重心の変位と回転角の1次モード成分比が等しいことを等価性条件とする。この等価性条件を式で表すと次の2式となる。

$$\bar{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)}, \quad \frac{\bar{\varphi}_1^{(1)}}{\bar{u}_1^{(1)}} = \frac{\varphi_2^{(1)}}{u_2^{(1)}} \quad (5a,b)$$

(2)式を(4a,b)式に代入し、(5a,b)式を用いることにより縮約モデルの並進剛性 $\bar{k}_1$ とねじれ剛性 $\bar{K}_1$ を次式で決定することができる。

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{m}_1}{1 + \bar{e}_1} \frac{\varphi_2^{(1)}}{u_2^{(1)}} \omega^{(1)2}, \quad \bar{K}_1 = \frac{\bar{I}_1}{u_2^{(1)}} \frac{\varphi_2^{(1)}}{u_2^{(1)}} \omega^{(1)2} - \bar{e}_1 \bar{m}_1 \omega^{(1)2} \quad (6a,b)$$

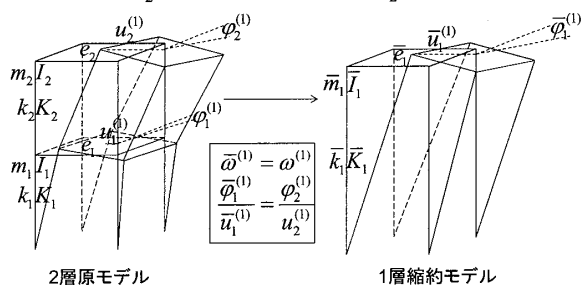


図2 等価性条件

ただし、1次の刺激係数が両モデルでは異なるため、単純に地震動を入力するだけでは両者に無視できない程度の差が生じる。この誤差を近似的に解消するために次の地震時慣性力の縮約を行う。

3. 地震時慣性力の縮約法

構造物に地震動 $\ddot{u}_g(t)$ が入力された時の原モデルの運動方程式は次式で表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ はそれぞれ原モデルの質量行列、減衰行列、剛性行列を表し、 $\mathbf{y}(t)$ は重心の水平変位ベクトルと回転角ベクトルを縦に並べたベクトルを表す。また、 $\mathbf{r}$ は成分の数が原モデルの層数の2倍の影響係数ベクトルを表す。その成分の上半分は全て1、他は0である。

図3のように、(7)式の右辺の第*i*成分 $-m_i\ddot{u}_g(t)$ を原モデルの第*i*層に作用する地震時慣性力(実際の慣性力の一部)と定義する。本論文で扱う時刻歴応答解析では、この地震時慣性力が原モデルの各層に作用する外力となる。

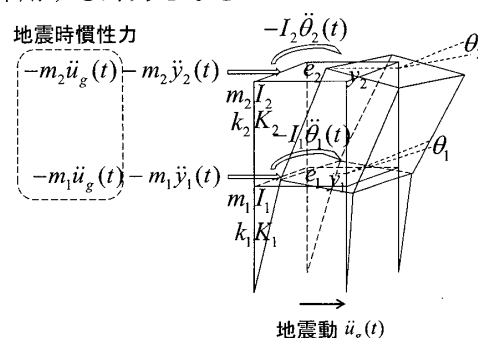


図3 地震時慣性力

地震時慣性力の縮約においては、主体構造の復元力のみで抵抗するようなモデルを考え、これを復元力抵抗モデルと呼ぶ。多層モデルを縮約する際、復元力抵抗モデルを用いた重心の変位と回転角の等価性条件により地震時慣性力を縮約する。縮約された地震時慣性力を縮約地震時慣性力と呼ぶ¹⁾。ここでも、図4のように2層モデルを原モデルとし、1層モデルに縮約する場合を示す。

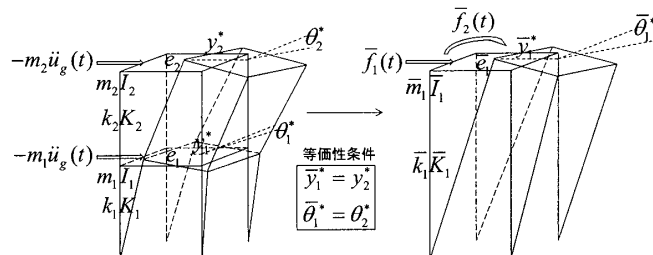


図4 縮約地震時慣性力

原モデルの第*i*層に対して時刻*t*における地震時慣性力 $-m_i\ddot{u}_g(t)$ を静的に作用させたときの原モデルの重心の水平変位ベクトルと回転角ベクトルを縦に並べたベクトルを $\mathbf{y}^*$ として力のつり合いを書くと次式となる。

$$\mathbf{K}\mathbf{y}^* = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (8)$$

$\mathbf{r}$ は 2 層モデルでは次のように表される.

$$\mathbf{r} = \{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (9)$$

縮約モデルに作用する並進方向に関する縮約地震時慣性力を $\bar{\mathbf{f}}_1(t)$, 回転方向に関する縮約地震時慣性力を $\bar{\mathbf{f}}_2(t)$ とする. 縮約モデルにこれらを静的に作用させたときの縮約モデルの重心の水平変位ベクトルと回転角ベクトルを縦に並べたベクトルを $\bar{\mathbf{y}}^*$ として力の釣り合いを書くと次式となる.

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{y}}^* = \bar{\mathbf{f}}(t) \quad (10)$$

ただし, $\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{f}}(t)$ は縮約モデルの剛性行列および縮約地震時慣性力ベクトルである.

原モデルの縮約代表位置における重心の水平変位と回転角が, それに対応する縮約モデルの重心の水平変位と回転角に等しいという等価性条件から縮約地震時慣性力を導く. ここでは, 等価性条件は次式となる.

$$\bar{y}_1^* = y_2^*, \quad \bar{\theta}_1^* = \theta_2^* \quad (11a,b)$$

この等価性条件を, ベクトルと行列を用いて表現すれば次式となる.

$$\bar{\mathbf{y}}^* = \mathbf{T}\mathbf{y}^* \quad (12)$$

$\mathbf{T}$ は縮約変換行列と呼ばれ次式で表される.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(8),(10),(12)式から縮約地震時慣性力 $\bar{\mathbf{f}}(t)$ は次式で表される.

$$\bar{\mathbf{f}}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (14)$$

原モデルには地震時慣性力は並進方向のみに作用しているのに対して, 縮約モデルには並進方向の縮約地震時慣性力に加えて回転方向の縮約地震時慣性力も作用する. ただし, 質量や回転慣性と同じく, 原モデルに作用する地震時慣性力を縮約する層ごとに単純に加えたもの(単純和地震時慣性力と呼ぶ)を縮約モデルに作用する地震時慣性力とした場合には, 縮約モデルには並進方向の地震時慣性力しか作用しない. これは, 縮約モデルに地震動を入力した場合に相当する.

4. 数値例題

2,3 節で示した縮約法の精度を検証するために 10 層モデルを原モデルとし, 1 層モデルに縮約する例を示す. 入力地震動には El Centro NS 1940 記録地震波を用い, 0.002 秒刻みで Newmark- β 法による時刻歴応答

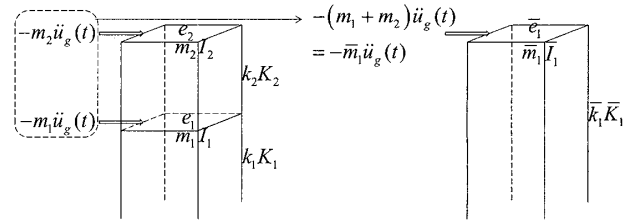


図5 単純和地震時慣性力

解析を行う. 原モデル, 縮約モデルの構造減衰は 2%とし, 剛性比例型減衰とする. ここでは, $L_X = L_Y = 40, R_{yi} = 0.2, \alpha = 0.5$ とする. 原モデルの質量は 1m^2 あたり 1t とし, 並進剛性はねじれを考慮しない場合の 1 次固有振動モードが逆三角形分布となるように決定する. 固有周期は 1s とする. 原モデルと縮約モデルの必要諸元を表 1,2 に示す.

表 1 原モデルの諸元

層	m_i (kg) $\times 10^6$	I_i ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$) $\times 10^8$	k_i (N/m) $\times 10^9$	e_i (m)	K_i (N · m/rad) $\times 10^{11}$	r_{ni} (m)
1	1.60	4.27	3.47	3.40	10.0	17.0
2	1.60	4.27	3.41	3.40	9.84	17.0
3	1.60	4.27	3.28	3.40	9.47	17.0
4	1.60	4.27	3.10	3.40	8.93	17.0
5	1.60	4.27	2.84	3.40	8.20	17.0
6	1.60	4.27	2.53	3.40	7.29	17.0
7	1.60	4.27	2.15	3.40	6.20	17.0
8	1.60	4.27	1.71	3.40	4.92	17.0
9	1.60	4.27	1.20	3.40	3.46	17.0
10	1.60	4.27	0.63	3.40	1.82	17.0

表 2 縮約モデルの諸元

層	$\bar{m}_j$ (kg) $\times 10^7$	$\bar{I}_j$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$) $\times 10^9$	$\bar{k}_j$ (N/m) $\times 10^8$	$\bar{e}_j$ (m)	$\bar{K}_j$ (N · m/rad) $\times 10^{11}$	$\bar{r}_{yj}$ (m)
1	1.60	4.27	6.32	3.40	1.82	17.0

原モデルに地震動を入力した時の頂部の重心の水平変位, 回転角, 隅柱位置の変位と, 縮約モデルに縮約地震時慣性力・単純和地震時慣性力を作用させた時の頂部の重心の水平変位, 回転角, 隅柱位置の変位を比較する. 図 6 に時刻歴応答解析の結果を示し, 表 3 に頂部の最大応答値を示す.

縮約モデルに縮約地震時慣性力を作用させた場合には, 重心の変位, 回転角, 隅柱位置の変位ともに原モデルと縮約モデルの応答が良好に一致している. しかし, 縮約モデルに単純和地震時慣性力を作用させた場合は, 応答のピーク値における差が大きくなり, 原モデルの応答を縮約モデルで精度良く表現することができない.

また, 縮約モデルの層数を増やすことにより, 縮約の精度を向上できるという結果を得た.

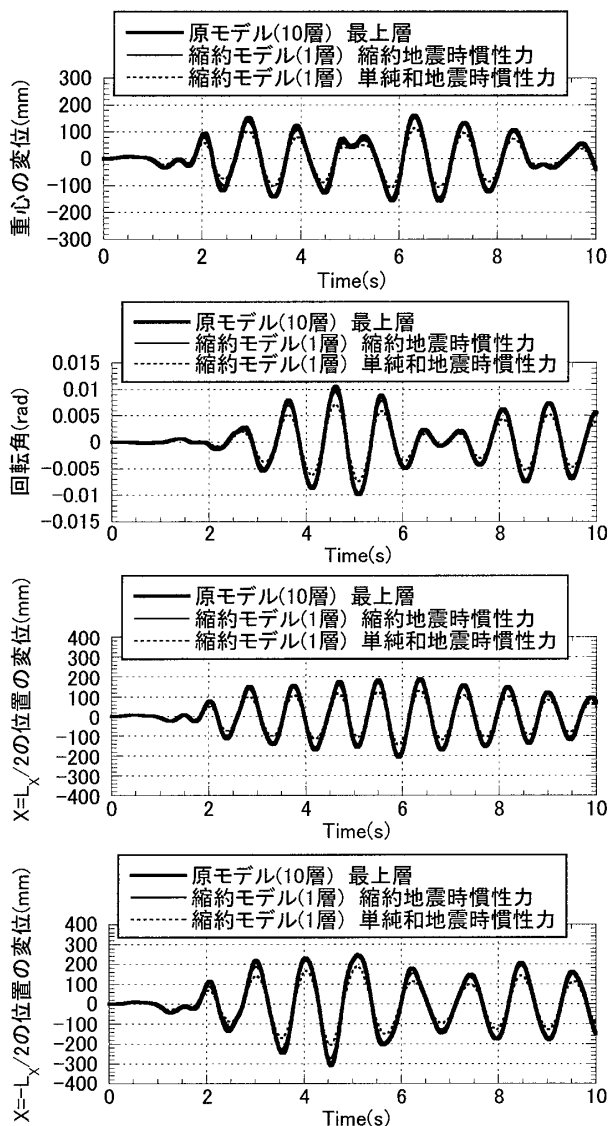


図6 解析結果

表3 最上層の最大応答値の比較

	原モデル	縮約モデル (縮約地震時 慣性力)	誤差 (%)	縮約モデル (単純和地震 時慣性力)	誤差 (%)
重心の変位 (mm)	161	153	-4.73	115	-28.8
回転角 ($\times 10^{-3}$ rad)	10.5	9.85	-6.28	7.36	-29.9
変位(mm) 正側隅柱位置	207	192	-6.94	144	-30.4
変位(mm) 負側隅柱位置	307	274	-10.9	205	-33.4

5. 非比例減衰の例題

ここでは非比例減衰の例題を示す。前節と同じモデルで下5層の重心を通る構面にダンパーを付加する。これを1層モデルに縮約する。表4に結果を示す。

表4 最上層の最大応答値の比較

	原モデル	縮約モデル (縮約地震時 慣性力)	誤差 (%)	縮約モデル (単純和地震 時慣性力)	誤差 (%)
重心の変位 (mm)	91.9	83.7	-8.89	62.6	-31.9
回転角 ($\times 10^{-3}$ rad)	5.26	4.70	-10.5	3.52	-33.1
変位(mm) 正側隅柱位置	132	119	-9.83	89.1	-32.6
変位(mm) 負側隅柱位置	148	131	-11.7	97.7	-34.0

6. 結論

- 1) ねじれを伴う建物の地震動入力に対する時刻歴応答解析用縮約モデルを提案した。具体的には、1次固有周期と1次固有振動モードに関する等価性条件を用いた逆問題型定式化により、多自由度モデルから少自由度モデルへの層方向に関する主体構造の縮約法を提案した。
- 2) 復元力抵抗モデルを用いた原モデルと縮約モデルの静的な意味での重心の変位と回転角の等価性条件から地震動入力効果を縮約する方法を提案した。この地震動入力効果の縮約の導入により、主体構造の縮約だけでは十分でない格段の精度向上が可能となる。
- 3) 数値例題として10層構造物を扱い、提案縮約モデルは、原モデルの最上層の重心の水平変位、回転角、および隅柱位置の変位を精度良く表現することが可能であることを明らかにした。
- 4) 提案手法は非比例減衰モデルに対しても同様に適用できることを示した。

参考文献

- 1) 辻 聖晃他, 非線形復元力特性を有する制振ダンパーの構造縮約モデルを用いた最適配置法, 構造系論文集, 2010年12月。