

離散凸解析の数理解済学への応用

田村 明久 (Akihisa TAMURA)

京都大学 数理解析研究所

(RIMS, Kyoto University)

要旨

離散最適化の一般的な枠組である離散凸解析は、数理解済学の道具として認識されつつある。本稿では、離散凸解析の数理解済学への応用に関する近年の進捗について報告する。

1 はじめに

離散凸解析は、室田 [17, 18] により提案された離散最適化の一般的な枠組である。近年、離散凸解析の数理解済学への応用に関する研究がなされている。本稿の目的は、次に述べる近年の進歩を紹介することである。

室田 [17, 18] より提案された M 凸関数と室田-塩浦 [22] により提案された $M^\sharp$ 凸関数は、離散凸解析では中心的役割を演じ、数理解済学の観点からも有益な離散凸関数として認識され始めている。例えば、藤重-楊 [9] は、集合関数に対して、 $M^\sharp$ 凸性が粗代替性や単改良性（これらは集合関数に対して互いに等価な条件である [11]）と等価なことを示している。粗代替性や単改良性は、Kelso-Crawford [14] により提案されたモデルなどの幾つかのマッチングモデルでのコアの存在性を保証するもので、良い性質として知られている。これら3つの性質の関係は、Danilov-Koshevoy-Lang [1] や室田-田村 [25] により、一般の場合に拡張されている。

一方、 $M^\sharp$ 凹効用関数を用いた経済モデルも提案されている。Danilov-Koshevoy-Murota [3] は、離散凸解析を用いた最初の経済モデルを提案し、各経済主体の効用関数が貨幣に関して準線形な $M^\sharp$ 凹関数となる効用関数をもつような不可分財を扱った交換経済に競争均衡が存在することを示した。室田-田村 [26] は、この Danilov-Koshevoy-Murota モデルの競争均衡を求める効率的なアルゴリズムを提案している。Danilov-Koshevoy-Lang [2] は、不可分財が代替財と補完財からなるようなモデルにおいて競争均衡が存在する十分条件を与えている。B. Lehmann-D. Lehmann-Nisan [15] は、 $M^\sharp$ 凹効用関数を有する組合せオークションを議論している。江口-藤重 [4] は、Gale-Shapley [10] の安定結婚モデルを離散凸解析の枠組へと拡張した。この江口-藤重のモデルは、江口-藤重-田村 [5] により無差別を許し、同一の男女の組が複数のパートナーシップを結ぶことができるモデルへと拡張した。藤重-田村 [8] は、 $M^\sharp$ 凹効用関数を導入す

ることで安定結婚モデルと Shapley–Shubik [27] の割当モデルの統一モデルを提案し、このモデルに常に安定解が存在することを示している。

本稿の構成は以下の通りである。2節では、M 凹関数および $M^\natural$ 凹関数に関して簡単な解説を与える。3節では、粗代替性、単改良性と $M^\natural$ 凹性の関係を議論する。4節、5節、6節、7節、8節では、上で述べて離散凸解析を用いた経済モデルを紹介する。

また本稿は [30] の簡略版であるので、詳しくは [30] を参照されたい。

2 M 凹性と $M^\natural$ 凹性

まず M 凹関数および $M^\natural$ 凹関数の概念と幾つかの結果を紹介する。V を有限集合とし、Z と R をそれぞれ整数全体と実数全体の集合とする。V を添字集合とする整数ベクトル $x = (x(v) : v \in V)$ 全体を Z^V と記す。ただし、 $x(v)$ はベクトル x の v 成分とする。また、V を添字集合とする実ベクトル全体を R^V と記す。ベクトル $z = (z(v) : v \in V) \in Z^V$ の正の台と負の台を

$$\text{supp}^+(z) = \{v \in V \mid z(v) > 0\}, \quad \text{supp}^-(z) = \{v \in V \mid z(v) < 0\}.$$

と定義する。部分集合 $S \subseteq V$ に対して、その特性ベクトル χ_S を

$$\chi_S(v) = \begin{cases} 1 & (v \in S) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (v \in V)$$

と定義し、簡単のために V の各要素 u については $\chi_{\{u\}}$ の代わりに χ_u と表記する。ベクトル $p \in R^V$ と関数 $f : Z^V \rightarrow R \cup \{\pm\infty\}$ に対して、変数 $x \in Z^V$ に関する関数 $\langle p, x \rangle$ と $f[p](x)$ を

$$\langle p, x \rangle = \sum_{v \in V} p(v)x(v), \quad f[p](x) = f(x) + \langle p, x \rangle.$$

と定義する。また、 f の最大解全体 $\arg \max f$ と実効定義域 $\text{dom} f$ を

$$\begin{aligned} \arg \max f &= \{x \in Z^V \mid f(x) \geq f(y) \quad (\forall y \in Z^V)\}, \\ \text{dom} f &= \{x \in Z^V \mid -\infty < f(x) < +\infty\} \end{aligned}$$

と定義する。

関数 $f : Z^V \rightarrow R \cup \{-\infty\}$ が M 凹関数 [17, 18] であるとは、 $\text{dom} f \neq \emptyset$ であって、 f が交換公理

(-M-EXC) 任意の $x, y \in \text{dom} f$ と任意の $u \in \text{supp}^+(x - y)$ に対して、ある $v \in \text{supp}^-(x - y)$ が存在して

$$f(x) + f(y) \leq f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)$$

を満たすことと定義する。条件 (-M-EXC) から、M 凹関数の実効定義域は成分和が一定の超平面 $\{x \in R^V \mid x(V) = \text{constant}\}$ (ただし $x(V) = \sum_{v \in V} x(v)$) の上に乗っている。

1次元高い空間で定義された M 凹関数からある座標軸方向に沿った射影によって得られる関数を $M^{\natural}$ 凹関数と呼ぶ. すなわち, V とこれに含まれない新しい要素 0 の和集合を $\hat{V} = \{0\} \cup V$ としたとき, 関数 $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が $M^{\natural}$ 凹関数 [22] であるとは, $\text{dom } f \neq \emptyset$ であって, f がある M 凹関数 $\hat{f}: \mathbf{Z}^{\hat{V}} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ によって

$$f(x) = \hat{f}(x_0, x) \quad (\text{ただし } x_0 = -x(V))$$

と表現されることと定義する. 逆に, $M^{\natural}$ 凹関数 f によって対応する M 凹関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(x_0, x) = \begin{cases} f(x) & (x_0 = -x(V)) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases} \quad ((x_0, x) \in \mathbf{Z}^{\hat{V}})$$

と定めることもできる. また, $M^{\natural}$ 凹関数は交換公理により特徴付けられる.

定理 1 ([22]) 実効定義域が非空である関数 $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が $M^{\natural}$ 凹であるための必要十分条件は f が交換公理

($-M^{\natural}$ -EXC) 任意の $x, y \in \text{dom } f$ と任意の $u \in \text{supp}^+(x - y)$ に対して,

$$f(x) + f(y) \leq \min \left\{ f(x - \chi_u) + f(y + \chi_u), \min_{v \in \text{supp}^-(x - y)} [f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)] \right\}$$

を満たすことである.

$M^{\natural}$ 凹性の概念は M 凹性の概念と等価であるが, 定理 1 と M 凹性の定義から M 凹関数は $M^{\natural}$ 凹関数となる. すなわち,

$$f: (-M^{\natural}\text{-EXC}) \iff \hat{f}: (-M\text{-EXC}) \implies \hat{f}: (-M^{\natural}\text{-EXC})$$

という関係が成り立つことを強調しておく.

以降では, $M^{\natural}$ 凹関数に焦点を絞り, またそれぞれの整数点においてその関数値は定数時間で計算できると仮定する.

$M^{\natural}$ 凹関数の最大解の判定に関しては良い特徴付けが存在する.

定理 2 ([17, 18]) $M^{\natural}$ 凹関数 $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と点 $x \in \text{dom } f$ に対して, $x \in \arg \max f$ である必要十分条件はすべての $u, v \in \{0\} \cup V$ に対して $f(x) \geq f(x - \chi_u + \chi_v)$ となることである.

定理 2 は, 与えられた点 x が f の最大解であるかどうかを $O(|V|^2)$ 時間で判定可能であることを主張している. さらに, $M^{\natural}$ 凹関数 f を最大化する問題については, $|V|$ と $\log L$ に関する多項式時間アルゴリズムが知られている ([29, 28] 参照). ただし, $L = \max\{\|x - y\|_{\infty} \mid x, y \in \text{dom } f\}$ とする.

2つの $M^{\natural}$ 凹関数の和は一般に $M^{\natural}$ 凹になるとは限らない. すなわち, 2つの $M^{\natural}$ 凹関数の和の最大解を特徴付けるためにはより洗練された条件が必要となる.

定理 3 ([17]) $M^{\natural}$ 凹関数 $f_1, f_2 : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と点 $x^* \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$ に対して, $x^* \in \arg \max(f_1 + f_2)$ である必要十分条件はある $p^* \in \mathbf{R}^V$ が存在し, $x^* \in \arg \max f_1[+p^*]$ と $x^* \in \arg \max f_2[-p^*]$ を満たすことである. さらに, この p^* に対して,

$$\arg \max(f_1 + f_2) = \arg \max(f_1[+p^*]) \cap \arg \max(f_2[-p^*])$$

が成立する.

ここでは, 2つの $M^{\natural}$ 凹関数の和を最大化する問題を $M^{\natural}$ 凸交わり問題と呼ぶ. 整数値を取る $M^{\natural}$ 凹関数に対して, $M^{\natural}$ 凹交わり問題は多項式時間で解けることが知られている ([13, 12] 参照).

関数の有限族 $\{f_i \mid i \in I\}$ について,

$$f(x) = \sup \left\{ \sum_{i \in I} f_i(x_i) \mid \sum_{i \in I} x_i = x, x_i \in \mathbf{Z}^V (\forall i \in I) \right\} \quad (x \in \mathbf{Z}^V)$$

と定義される関数 f をこれらの関数の (整数) 合成積と呼ぶ. $M^{\natural}$ 凹関数の合成積も再び $M^{\natural}$ 凹となることが知られている [17]. また, 与えられた x に対して $f(x)$ を計算する問題は $M^{\natural}$ 凹交わり問題に変換できる (例えば [21] 参照).

3 数理経済学における $M^{\natural}$ 凹性

ここでは, 数理経済学の観点から, $M^{\natural}$ 凹関数の性質の良さを紹介する.

関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して, その凹閉包 $\underline{f}$ を

$$\underline{f}(z) = \inf_{p \in \mathbf{R}^V, \alpha \in \mathbf{R}} \{ \langle p, z \rangle + \alpha \mid \langle p, y \rangle + \alpha \geq f(y) \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^V) \} \quad (z \in \mathbf{R}^V)$$

と定義する. 関数 f がすべての $x \in \mathbf{Z}^V$ に対して $f(x) = \underline{f}(x)$ を満たすとき, f は凹拡張可能と呼ばれる. $M^{\natural}$ 凹関数は凹拡張可能である.

補題 4 ([17]) $M^{\natural}$ 凹関数は凹拡張可能である.

効用関数は, 一般的に限界効用が逓減するが, 離散の場合にはこれは劣モジュラ性と等価となる. $M^{\natural}$ 凹関数もこの性質をもつ.

補題 5 ([24]) $M^{\natural}$ 凹関数 f は劣モジュラである, すなわち,

$$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y) \quad (x, y \in \text{dom } f)$$

を満たす. ここで, ベクトル $x \vee y$ と $x \wedge y$ は

$$(x \vee y)(v) = \max\{x(v), y(v)\}, \quad (x \wedge y)(v) = \min\{x(v), y(v)\} \quad (v \in V)$$

と定義される.

次に, Kelso-Crawford [14] によって提案された粗代替性と Gul-Stacchetti [11] によって提案された単改良性の自然な拡張を考える.

(-GS_w) $p, q \in \mathbf{R}^V$ と $x \in \text{dom } f$ が $p \leq q$, $x \in \arg \max f[-p]$ と $\arg \max f[-q] \neq \emptyset$ を満たすならば, ある $y \in \arg \max f[-q]$ が存在して, $p(v) = q(v)$ ならば $y(v) \geq x(v)$ を満たす.

(-GS) $(p_0, p), (q_0, q) \in \mathbf{R}^{\{0\} \cup V}$ と $x \in \text{dom } f$ が $(p_0, p) \leq (q_0, q)$, $x \in \arg \max f[-p + p_0 \mathbf{1}]$ と $\arg \max f[-q + q_0 \mathbf{1}] \neq \emptyset$ を満たすならば, ある $y \in \arg \max f[-q + q_0 \mathbf{1}]$ が存在して, $p(v) = q(v)$ ならば $y(v) \geq x(v)$, と $p_0 = q_0$ ならば $y(V) \leq x(V)$ を満たす. ただし, $\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 であるベクトルを表す.

(-SWGS) $p \in \mathbf{R}^V$, $x \in \arg \max f[-p]$ と $v \in V$ に対して, 次のうち一方が成り立つ.

(i) すべての $\alpha > 0$ に対して $x \in \arg \max f[-p - \alpha \chi_v]$,

(ii) ある $\alpha > 0$ と $y \in \arg \max f[-p - \alpha \chi_v]$ が存在して, $y(v) = x(v) - 1$ かつ $u \in V \setminus \{v\}$ に対して $y(u) \geq x(u)$.

(-SI_w) $p \in \mathbf{R}^V$ と $x \in \text{dom } f$ が $x \notin \arg \max f[-p]$ を満たすならば, ある $u, v \in \{0\} \cup V$ が存在して $f[-p](x) < f[-p](x - \chi_u + \chi_v)$.

(-SI) $p \in \mathbf{R}^V$ と $x, y \in \text{dom } f$ が $f[-p](x) < f[-p](y)$ を満たすならば,

$$f[-p](x) < \max_{u \in \text{supp}^+(x-y) \cup \{0\}} \max_{v \in \text{supp}^-(x-y) \cup \{0\}} f[-p](x - \chi_u + \chi_v).$$

我々は主に実効定義域 $\text{dom } f$ が有界な場合に興味があり, この場合は任意の $q \in \mathbf{R}^V$ に対して $\arg \max f[-q]$ は非空である. 上記の性質は以下のように解釈できる. ここで, V は不可分財の集合を表し, $x \in \mathbf{Z}^V$ はある消費者が消費するそれぞれの不可分財 v の個数 $x(v)$ を意味し, f はこの消費者の効用関数を表すとする. 条件 (-GS_w) は, 価格ベクトルが p から q へ増加したとき, 消費者は価格が据え置かれた財については価格が増加する前と少なくとも同じ個数を欲することを意味している. (-GS) は, 価格が増加したとき ($p \leq q$ かつ $p_0 = q_0$), 消費者は価格据え置き of 財は同量以上欲し, 財の総個数は増加しないことを主張する. さらに, (-GS) は, すべての価格が一定量減少したとき ($p = q$ かつ $p_0 < q_0$), 消費者はどの財も価格変更前と同量以上を欲することも主張している. 明らかに, 条件 (-GS) は条件 (-GS_w) より強い. 条件 (-SWGS) は次のように解釈できる: 不可分財 v の価格がわずかに増えたとき, 消費者は (i) 同じ消費または (ii) v の個数がちょうど 1 減少し他の財の個数は減らない消費を望む. 条件 (-SI_w) は, 非最適な任意の消費量 x を (i) 一つの財を除く, (ii) 一つの財を加える, あるいは (iii) この両方を行なうことで厳密に改善できることを意味する. さらに, 条件 (-SI) は (-SI_w) よりも, 消費者は任意の消費量 x をより良い任意の消費量 y に近付けられるという意味で強い.

$\{0, 1\}$ -超立方体上の関数に対しては, 条件 (-GS_w) と (-SI_w) は, それぞれ粗代替性と単改良性に対応している. 集合関数に対する粗代替性と単改良性の等価性は Gul-Stacchetti [11]

により示され, 集合関数に対する単改良性と M^h 凹性の等価性は藤重-楊 [9] によって最初に示された. 条件 $(-SWGS)$ は Danilov-Koshevoy-Lang [1] で与えられ, その他の性質は室田-田村 [25] による. M^h 凹関数はこれらの条件を満たすが, さらにこれらの条件を用いることで特徴付けすることもできる.

定理 6 ([25]) 有界で非空な実効定義域を持つ凹拡張可能な関数 $f: Z^V \rightarrow R \cup \{-\infty\}$ が M^h 凹である必要十分条件は, それが $(-GS)$ を満たすことである.

定理 7 ([1]) 非空な実効定義域を持つ凹拡張可能な関数 $f: Z^V \rightarrow R \cup \{-\infty\}$ が M^h 凹である必要十分条件は, それが $(-SWGS)$ を満たすことである.

定理 8 ([25]) 非空な実効定義域を持つ関数 $f: Z^V \rightarrow R \cup \{-\infty\}$ が M^h 凹である必要十分条件は, それが $(-SI)$ を満たすことである.

集合関数については, 上記で紹介した条件はすべて等価となる.

定理 9 ([25]) 非空な実効定義域を持つ関数 $f: \{0, 1\}^V \rightarrow R \cup \{-\infty\}$ に対して, 以下が成立する.

$$(-M^h-EXC) \Leftrightarrow (-SI) \Leftrightarrow (-SI_w) \Leftrightarrow (-GS) \Leftrightarrow (-GS_w).$$

4 Arrow-Debreu 型モデル

本節では Arrow-Debreu 型のモデルを扱う. 経済主体としては生産者と消費者が区別されているとして, 生産者の集合を L , 消費者の集合を H と表す (L, H ともに有限集合と仮定する). 財としては, 複数個の不可分財と貨幣を考え, 不可分財の集合を K とする (K も有限集合と仮定する). 生産者 $l \in L$ の供給量ベクトルを $y_l = (y_l(k) : k \in K) \in Z^K$, 消費者 $h \in H$ の需要量ベクトルを $x_h = (x_h(k) : k \in K) \in Z^K$ とする. ただし, 生産者 l の消費する財 i については $y_l(i)$ は負の値を取り, 生産する財 j については $y_l(j)$ は正の値を取るとする. 逆に, 消費者 h の消費する財 i については $x_h(i)$ は正の値を取り, 労働のような供給する財 j については $x_h(j)$ は負の値を取るとする. 生産者と消費者は, 与えられた価格ベクトル $p = (p(k) : k \in K) \in R^K$ の下で, それぞれ独立に自分の利益や満足度を最大にするように行動して財の生産量や消費量を決める.

生産者 $l \in L$ は, 不可分財を $y \in Z^K$ だけ生産するための費用関数 $C_l: Z^K \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ によって記述される. 価格 $p \in R^K$ が与えられたとき, 生産者 $l \in L$ は, 利潤 $\langle p, y \rangle - C_l(y)$ を最大化するように生産量 $y_l \in Z^K$ を定める. 生産者 $l \in L$ の供給関数 $S_l: R^K \rightarrow 2^{Z^K}$, 利潤関数 $\pi_l: R^K \rightarrow R$ を

$$S_l(p) = \arg \max_{y \in Z^K} \{\langle p, y \rangle - C_l(y)\} \quad (p \in R^K), \quad (1)$$

$$\pi_l(p) = \max_{y \in Z^K} \{\langle p, y \rangle - C_l(y)\} \quad (p \in R^K) \quad (2)$$

と定義すると, $y_l \in S_l(p)$ である. ここで, $S_l(p) = \emptyset$ の可能性もあり, その場合には供給量 y_l は定義されないと解釈する. 供給関数 S_l を供給対応と呼ぶこともある. また, 集合 $S_l(p) \subseteq \mathbf{Z}^K$ を生産者 $l \in L$ の供給集合と呼ぶ.

消費者 $h \in H$ は, 初期段階で不可分財と貨幣を保有しているとし, その保有量を $(x_h^0, m_h^0) \in \mathbf{Z}_+^K \times \mathbf{R}_+$ で表す. 本モデルでは生産者の利潤は消費者に分配されるとする. 生産者 $l \in L$ の利潤 $\pi_l(p)$ は, 一定の分配率 θ_{lh} で消費者 $h \in H$ に分配される. ここで, θ_{lh} はすべての $l \in L$ と $h \in H$ に対して非負であり, $\sum_{h \in H} \theta_{lh} = 1$ がそれぞれの $l \in L$ について成り立つ. よって消費者 h の所得は, 関数 $\beta_h: \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$

$$\beta_h(p) = \langle p, x_h^0 \rangle + m_h^0 + \sum_{l \in L} \theta_{lh} \pi_l(p) \quad (p \in \mathbf{R}^K)$$

により表現される. 財 $(x_h, m_h) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R}$ に対する消費者 $h \in H$ の満足度は効用関数 $\bar{U}_h: \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ によって表現されるものとし, さらに, 効用関数の準線形性

$$\bar{U}_h(x, m) = U_h(x) + m \quad ((x, m) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R})$$

を仮定する. $U_h: \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は財の価値の貨幣への換算を意味する. どの消費者も無限の財を消費することは望まないであろうから, $\text{dom} U_h$ は有界であると仮定しても不自然ではない. ここではさらに, 各消費者 h の初期保有量における貨幣の量 m_h^0 が十分に大きいと仮定する. 消費者 h は予算制約の下で自らの効用を最大化するように財の消費量 $(x_h, m_h) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R}$ を決定する. よって, 消費者 h の行動は最適化問題

$$\begin{aligned} & \text{最大化} \quad U_h(x) + m \\ & \text{制約条件} \quad \langle p, x \rangle + m \leq \beta_h(p), \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

として定式化できるが, $\text{dom} U_h$ が有界で m_h^0 が十分大きいという仮定の下では, $m = \beta_h(p) - \langle p, x \rangle$ と置くことにより, 上記の問題は制約なしの最適化問題

$$\text{最大化} \quad U_h(x) - \langle p, x \rangle$$

に帰着できる. すなわち, 消費者 $h \in H$ の需要関数 $D_h: \mathbf{R}^K \rightarrow 2^{\mathbf{Z}^K}$ を

$$D_h(p) = \arg \max_{x \in \mathbf{Z}^K} \{U_h(x) - \langle p, x \rangle\} \quad (p \in \mathbf{R}^K)$$

と定義すると, $x_h \in D_h(p)$ かつ $m_h = \beta_h(p) - \langle p, x_h \rangle$ である. 需要関数 D_h を需要対応と呼ぶこともある. また, 集合 $D_h(p) \subseteq \mathbf{Z}^K$ を消費者 $h \in H$ の需要集合と呼ぶ.

消費量 $x_h \in \mathbf{Z}^K$, 生産量 $y_l \in \mathbf{Z}^K$, 価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^K$ から成る組 $((x_h \mid h \in H), (y_l \mid l \in L), p)$ は, 条件

$$x_h \in D_h(p) \quad (h \in H), \quad (3)$$

$$y_l \in S_l(p) \quad (l \in L), \quad (4)$$

$$\sum_{h \in H} x_h = \sum_{h \in H} x_h^0 + \sum_{l \in L} y_l, \quad (5)$$

$$p \geq 0 \quad (6)$$

を満たすとき、競争均衡あるいは均衡と呼ばれ、そのときの価格ベクトルは均衡価格ベクトルと呼ばれる。すなわち、それぞれの経済主体は望むことを実現し、需給バランスが成り立ち、均衡価格ベクトルは非負となる。

関数 $U: \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は、すべての $x, y \in \text{dom}U$ に対して、 $x \leq y \Rightarrow U(x) \leq U(y)$ を満たすとき単調非減少と呼ばれる。Gul と Stacchetti [11] は、効用関数が粗代替性と単調非減少性をもつ交換経済 ($L = \emptyset$ の場合) における均衡の存在を示した。定理 9 から、次の定理 10 はこの結果の拡張となる。定理 10 と定理 11 は、[3] の結果より導き出せるが、[20, 21] において陽に述べられている。本節で扱ったモデル (各 C_l が $M^{\natural}$ 凸で各 U_h が $M^{\natural}$ 凹である Arrow-Debreu 型モデル) を Danilov-Koshevoy-Murota モデルあるいは単に DKM モデルとここでは呼ぶ。

定理 10 ([3, 20, 21]) 交換経済 ($L = \emptyset$ のとき) において、各効用関数 U_h が単調非減少かつ $M^{\natural}$ 凹ならば、任意の初期総保有量 $x^{\circ} \in \sum_{h \in H} \text{dom}U_h$ に対して、均衡が存在する。

定理 11 ([3, 20, 21]) DKM モデルにおいて、すべての財を分割可能とした連続モデルにおいて与えられた初期総保有量に対して均衡が存在するならば、不可分財から成る均衡も存在する。ここで、連続モデルでの費用関数は C_l の凸拡張であり、効用関数は U_h の凹拡張であるとする。

均衡価格ベクトル全体も良い性質をもつ凸多面体 ($L^{\natural}$ 凸多面体と呼ばれるもの) となることが知られている。凸多面体 $P \subseteq \mathbf{R}^K$ が $L^{\natural}$ 凸多面体 [7, 23] であるとは、

$$p, q \in P \Rightarrow (p - \alpha \mathbf{1}) \vee q, p \wedge (q + \alpha \mathbf{1}) \in P \quad (0 \leq \forall \alpha \in \mathbf{R}) \quad (7)$$

を満たすことと定義する。

定理 12 ([20, 21]) DKM モデルにおいて、初期総保有量 x° に対して均衡が存在すると仮定する。均衡価格ベクトル全体からなる集合 $P^*(x^{\circ})$ は $L^{\natural}$ 凸多面体となる。特に、(7) において $\alpha = 0$ とした場合により、

$$p, q \in P^*(x^{\circ}) \Rightarrow p \vee q, p \wedge q \in P^*(x^{\circ}) \quad (8)$$

となる。(8) より最小均衡価格ベクトルが存在し、さらには、 $P^*(x^{\circ})$ が有界ならば最大均衡価格ベクトルも存在する。

均衡を求めるために、経済体系全体の生産費用と効用を集約した関数 $\Psi': \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$\Psi'(z) = \sup \left\{ - \sum_{l \in L} C_l(y_l) + \sum_{h \in H} U_h(x_h) \mid \sum_{h \in H} x_h - \sum_{l \in L} y_l = z \right\}.$$

を用いる。条件 (3), (4) と (5) を満たす解は $\Psi'(x^{\circ})$ を達成し、また逆も示せる。 Ψ' は $M^{\natural}$ 凹関数の族 $\{-C_l \mid l \in L\} \cup \{U_h \mid h \in H\}$ の合成積であるという事実を用いて、室田-田村 [26] は均衡が存在するかを判定し、存在するならばその一つを求める効率的なアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは 2 つのフェーズより成り、第 1 フェーズは $M^{\natural}$ 凹交わり問題を解くことで条件 (3), (4) と (5) を満たす供給量と消費量を求め、第 2 フェーズは最短路問題を解くことで均衡価格を求める。

5 代替財と補完財より成るモデル

DKM モデルはすべてが代替財からなるモデルとみなすことができる. Danilov-Koshevoy-Lang [2] は, 代替財と補完財から成るモデルを提案し, ある条件の下で均衡が存在することを示した. 4節の設定において, 彼らのモデルは以下のことを仮定している:

- $K = L \times H$,
- 各生産者 $l \in L$ について, C_l は $\{0, 1\}^{l \times H}$ で定義され, すべての $l' \in L \setminus \{l\}$ と $h \in H$ に対して $y_l(l', h) = 0$ とする,
- 各消費者 $h \in H$ について, U_h は $\{0, 1\}^{L \times \{h\}}$ で定義され, すべての $l \in L$ と $h' \in H \setminus \{h\}$ に対して $x_h(l, h') = 0$ とする,
- 各消費者 $h \in H$ について, $x_h^0 = 0$,
- 均衡は条件 (3), (4) と (5) で定義し, 均衡価格の非負性は仮定しない.

彼らのモデルの特徴は生産者集合 L が L_s と L_c に分割されている点で, 均衡存在のための十分条件として以下を与えている. (i) 各 $l \in L_s$ に対して, C_l は M^1 凸である, (ii) 各 $l \in L_c$ に対して, C_l は劣モジュラである, (iii) 各 $h \in H$ に対して, U_h は $L_s \times \{h\}$ 上の M^1 凹集合関数と $L_c \times \{h\}$ 上の優モジュラ集合関数 (関数値の符号を反転したものが劣モジュラ集合関数) の和である.

定理 13 ([2]) 上記の条件 (i), (ii), (iii) の下で, 本節でのモデルは均衡を持つ.

6 組合せオークション

本節では, 組合せオークションについて簡単に触れる. ある競売者により競売される不可分財の集合を V とし, 買い手の集合を B とする. 各買い手 $i \in B$ は, f_i という個別の貨幣価値に換算された効用を持つとする. すなわち, V のすべての部分集合 X に対して, i が X を手に入れたときは $f_i(X)$ を支払うとする. 競売者の目的は, 最適な割当を求めることで, ここで割当とは互いに交わりを持たない V の部分集合の族 $\{V_i \mid i \in B \cup \{0\}\}$ への V の分割 (V_0 は売らない財集合とみなす) であり, 最適割当とは $\sum_{i \in B} f_i(V_i)$ を最大化する割当である.

B. Lehmann-D. Lehmann-Nisan [15] は, 効用関数の幾つかのクラスに対する組合せオークションについて議論し, f_i がすべて M^1 凹である場合は, 次のようにして最適割当が効率的に求まることを述べている. ここでは, 部分集合とその特性ベクトルを同一視する. $\{0, 1\}^V$ 上で値 0 を取る関数を f_0 とする (この関数は M^1 凹である). このとき, 最適割当を求める問題は次の関数値

$$f(1) = \max \left\{ \sum_{i \in \{0\} \cup B} f_i(x_i) \mid \sum_{i \in \{0\} \cup B} x_i = 1, x_i \in \{0, 1\}^V (\forall i \in \{0\} \cup B) \right\}.$$

を達成する解を求める問題として定式化できる. f は M^b 凹関数の族 $\{f_i \mid i \in \{0\} \cup B\}$ の合成積であるので, この問題は M^b 凹交わり問題に変換できる. さらに, すべての $i \in \{0\} \cup B$ について $\text{dom} f_i = \{0, 1\}^V$ である. このような問題は一般の M^b 凹交わり問題よりもやさしく, 室田 [16, 19] により $|V|$ に関する多項式時間アルゴリズムが与えられている.

7 安定結婚モデルの一般化

江口-藤重 [4] は, 離散凸解析を用いた安定結婚モデルの一般化を提案し, さらに江口-藤重-田村 [5] はこれを無差別を許し, 同一の男女の組が複数のパートナーシップを結ぶことができるモデルへと拡張した. 本節では, [5] のモデルを紹介する.

M と W を交わりを持たない 2 つの経済主体の集合とし, E を有限集合とする. このモデルでは, M と W の効用はそれぞれ E 上で定義される 2 つの M^b 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ で表現される. さらに, f_M と f_W は次の条件を満たすと仮定する.

(A) 実効定義域 $\text{dom} f_M$ と $\text{dom} f_W$ は, 有界かつ遺伝的であり共通最小点 0 を持つ.

ここで, 実効定義域が遺伝的とは, $0 \leq x_1 \leq x_2 \in \text{dom} f_M (\text{dom} f_W)$ ならば $x_1 \in \text{dom} f_M (\text{dom} f_W)$ であることを意味する.

このモデルの安定性は以下のように定義される. ここで z を

$$\text{dom} f_M \cup \text{dom} f_W \subseteq \{y \in \mathbf{Z}^E \mid 0 \leq y \leq z\}. \quad (9)$$

を満たす整数ベクトルとする. $x \in \text{dom} f_M \cap \text{dom} f_W$ が $f_M f_W$ -安定解であるとは, $z_M, z_W \in \mathbf{Z}^E$ が存在し,

$$z = z_M \vee z_W, \quad (10)$$

$$x \in \arg \max \{f_M(y) \mid y \leq z_M\}, \quad (11)$$

$$x \in \arg \max \{f_W(y) \mid y \leq z_W\}. \quad (12)$$

を満たすことと定義する. この安定性は安定結婚モデルの安定性の拡張となっている ([5, 30] 参照).

江口-藤重-田村は $f_M f_W$ -安定解の存在を示した.

定理 14 ([5]) 仮定 (A) を満たす M^b 凹効用関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して, 上記のモデルは常に $f_M f_W$ -安定解を持つ.

8 ハイブリッドモデルの一般化

藤重-田村 [8] は, Eriksson-Karlander [6] や [4, 5] でのアイデアを利用して, 安定結婚モデルと割当モデル (割当ゲーム) の統合モデルを提案した.

このモデルでは、7節の設定において、 M と W の (貨幣価値に換算された) 効用は仮定 (A) を満たす M^h 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ で表現され、さらに E が2つの部分集合 F と R に分割されているとする。

z を条件 (9) を満たす整数ベクトルとする。 E 上のベクトル d と部分集合 $S \subseteq E$ に対して、 $d|_S$ は d の S への制限を意味するとする。 $x \in \text{dom} f_M \cap \text{dom} f_W$ が分割 (F, R) に関する $f_M f_W$ -安定解であるとは、次の条件を満たす $p \in \mathbf{R}^E$ と $z_M, z_W \in \mathbf{Z}^R$ が存在することと定義する：

$$p|_R = 0, \quad (13)$$

$$z|_R = z_M \vee z_W, \quad (14)$$

$$x \in \arg \max \{f_M[+p](y) \mid y|_R \leq z_M\}, \quad (15)$$

$$x \in \arg \max \{f_W[-p](y) \mid y|_R \leq z_W\}. \quad (16)$$

条件 (13) は R のすべての要素に対して貨幣のやりとりがないことを意味する。明らかに、 $E = R$ であるときこのモデルは7節のモデルと一致する。

[8] では以下のことが示されている。

定理 15 ([8]) 仮定 (A) を満たす任意の M^h 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と任意の E の分割 (F, R) に対して、 (F, R) に関する $f_M f_W$ -安定解が常に存在する。

参考文献

- [1] Danilov, V., Koshevoy, G. and Lang, C., Gross substitution, discrete convexity, and submodularity, *Discrete Appl. Math.*, **131** (2003), 283–298.
- [2] Danilov, V., Koshevoy, G. and Lang, C., Substitutes, complements and equilibrium in two-sided market models, in: Sertel, M. R. and Koray, S., eds., *Advances in Economic Design*, (Springer-Verlag, Berlin, 2003), 105–125.
- [3] Danilov, V., Koshevoy, G. and Murota, K., Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money, *Math. Social Sci.*, **41** (2001), 251–273.
- [4] Eguchi, A. and Fujishige, S., An extension of the Gale-Shapley matching algorithm to a pair of M^h -concave functions, Discrete Mathematics and Systems Science Research Report 02-05, Osaka University, 2002.
- [5] Eguchi, A., Fujishige, S. and Tamura, A., A generalized Gale-Shapley algorithm for a discrete-concave stable-marriage model, in: Ibaraki, T., Katoh, N. and Ono, H., eds., *Proceedings of the 14th International Symposium ISAAC2003, LNCS, 2906* (Springer-Verlag, Berlin, 2003), 495–504.

- [6] Eriksson, K. and Karlander, J., Stable matching in a common generalization of the marriage and assignment models, *Discrete Math.*, **217** (2000), 135–156.
- [7] Fujishige, S. and Murota, K., Notes on L-/M-convex functions and the separation theorems, *Math. Programming*, **88** (2000), 129–146.
- [8] Fujishige, S. and Tamura, A., A general two-sided matching market with discrete concave utility functions, RIMS Preprints No. 1401, Kyoto University, 2003.
- [9] Fujishige, S. and Yang, Z., A note on Kelso and Crawford's gross substitutes condition, *Math. Oper. Res.*, **28** (2003), 463–469.
- [10] Gale, D. and Shapley, L. S., College admissions and the stability of marriage, *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962), 9–15.
- [11] Gul, F. and Stacchetti, F., Walrasian equilibrium with gross substitutes, *J. Econom. Theory*, **87** (1999), 95–124.
- [12] Iwata, S., Moriguchi, S. and Murota, K., A capacity scaling algorithm for M-convex submodular flow, Department of Mathematical Informatics, METR 2003-42, The University of Tokyo, 2003.
- [13] Iwata, S. and Shigeno, M., Conjugate scaling algorithm for Fenchel-type duality in discrete convex optimization, *SIAM J. Optim.*, **13** (2002), 204–211.
- [14] Kelso, Jr. A. S. and Crawford, V. P., Job matching, coalition formation, and gross substitutes, *Econometrica*, **50** (1982), 1483–1504.
- [15] Lehmann, B., Lehmann, D. and Nisan, N., Combinatorial auctions with decreasing marginal utilities, *Games Econom. Behav.*, to appear.
- [16] Murota, K., Valuated matroid intersection, II: Algorithms, *SIAM J. Discrete Math.*, **9** (1996), 562–576.
- [17] Murota, K., Convexity and Steinitz's exchange property, *Adv. Math.*, **124** (1996), 272–311.
- [18] Murota, K., Discrete convex analysis, *Math. Programming*, **83** (1998), 313–371.
- [19] Murota, K., *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [20] Murota, K., *Discrete Convex Analysis -- An Introduction* (in Japanese), Kyoritsu Publishing Co., Tokyo, 2001.

- [21] Murota, K., *Discrete Convex Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- [22] Murota, K. and Shioura, A., M-convex function on generalized polymatroid, *Math. Oper. Res.*, **24** (1999), 95–105.
- [23] Murota, K. and Shioura, A., Extension of M-convexity and L-convexity to polyhedral convex functions, *Adv. in Appl. Math.*, **25** (2000), 352–427.
- [24] Murota, K. and Shioura, A., Relationship of M-/L-convex functions with discrete convex functions by Miller and by Favati–Tardella, *Discrete Appl. Math.*, **115** (2001), 151–176.
- [25] Murota, K. and Tamura, A., New characterizations of M-convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities, *Discrete Appl. Math.*, **131** (2003), 495–512.
- [26] Murota, K. and Tamura, A., Application of M-convex submodular flow problem to mathematical economics, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **20** (2003), 257–277.
- [27] Shapley, L. S. and Shubik, M., The assignment game I: The core, *Internat. J. Game Theory*, **1** (1972), 111–130.
- [28] Shioura, A., Fast scaling algorithms for M-convex function minimization with application to the resource allocation problem, *Discrete Appl. Math.*, **134** (2004), 303–316.
- [29] Tamura, A., Coordinatewise domain scaling algorithm for M-convex function minimization, in: Cook, W. J. and Schulz, A. S., eds., *Proceedings of the 9th International IPCO Conference, LNCS, 2337* (Springer-Verlag, Berlin, 2002), 21–35.
- [30] Tamura, A., Applications of Discrete Convex Analysis to Mathematical Economics, *Publications of RIMS*, to appear.