

代数的数体のイデール群の構造について

名大 教養部 三宅 克哉

詳細は近々東北数学雑誌に掲載されるほかびになっている論文[3]にゆずることとし、ここでは主たる結果の $=$, $\equiv$ を報告することにする。

1. イデールの capitulation について

一般に、有限次代数的数体 F に対して、その絶対イデール類群を C_F 、絶対類体を $\tilde{F}$ としよう。

不分岐アーベル拡大 K/F に対し $l_{K/F}: C_F \rightarrow C_K$ を F のイデール $\alpha \in K$ へのもち上げから得られる準同型写像とすれば、 $P_F(K) = \text{Ker}(l_{K/F})$ は K において単項化する F のイデールのなす類からなる。この $P_F(K)$ が C_F の部分群としてどう特徴づけられるかが問題なのであるが、たとえば、

まず定量的に

問題. 拡大次数 $[K:F]$ は位数 $|P_F(K)|$ を割り切るか？
と問うてみると考え易いかもしれない。特に K/F が巡回拡大であればこれは肯定的である（ヒルベルトの定理 94）。

これらの問題に対する決定的な解答はまだ得られていないが、部分的とはいえ、 $\text{Hom}(C_F, N_{K/F}(C_K))$ のある部分群によって $P_F(K)$ をある程度分析することができたので報告する。ここで $N_{K/F}: C_K \rightarrow C_F$ は K/F のノルム写像であり、 $H_F(K) = N_{K/F}(C_K)$ は類体論で K に対応する C_F の部分群である。

まず、自然な準同型写像

$$\pi_{K/F}: H^1(\text{Gal}(\tilde{K}/F), C_K) \rightarrow \text{Hom}(C_F, H_F(K))$$

が存在することに注意しよう。実際、 $N_{K/F}: C_K \rightarrow C_F$ によってコホモロジー群の間の準同型写像

$$H^1(\text{Gal}(\tilde{K}/F), C_K) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\tilde{K}/F), H_F(K))$$

が得られる。後者において、 $\text{Gal}(\tilde{K}/F)$ は $H_F(K)$ に自明に作用するから、これは単に $\text{Hom}(\text{Gal}(\tilde{K}/F), H_F(K))$ にほかならない。しかも $H_F(K)$ はアーベル群であるから、この $\text{Gal}(\tilde{K}/F)$ を交換子群による剰余群でおきかえてよく、これは $\text{Gal}(\hat{F}/F)$ と同一視でき、よって C_F と同型である。以上のものを組みあわせて $\pi_{K/F}$ を得る。

この $\pi_{K/F}$ の像を $\widehat{X}_{K/F}$ と表わす。すなわち

$$\widehat{X}_{K/F} = \pi_{K/F}(H^1(\text{Gal}(\bar{K}/F), C_K)).$$

さらに $f \in \widehat{X}_{K/F}$ に対し

$$d(f) = |\text{Coker}(f)| = [H_F(K) : \text{Im}(f)]$$

とおく。

定理 1. 各 $f \in \widehat{X}_{K/F}$ に対して

$$\{x^{d(f)} \mid x \in \text{Ker}(f)\} \subset P_F(K).$$

特に $d(f) = 1$ となる f が存在すれば

$$[K:F] \mid |P_F(K)|.$$

自然な写像 $\iota_{K/F}: C_F \rightarrow C_K$ と $N_{K/F}: C_K \rightarrow C_F$ とを合成して得られる $\bar{\iota} = N_{K/F} \circ \iota_{K/F}$ は $\widehat{X}_{K/F}$ に含まれている。この $\bar{\iota}$ に定理 1 をあてはめれば、容易に次の結果が得られる:

$$n = [K:F],$$

$$C_F(n) = \{x \in C_F \mid x^n = 1\},$$

$$m = |C_F(n)| / n$$

とすれば $d(\bar{\iota}) = m$ であり,

定理 2. $C_F(n)^m \subset P_F(K) \subset C_F(n).$

註. 特に $K = \widehat{F}$ のとき $C_F(m) = C_F$, $m=1$ であり,
定理 2 より $P_F(\widehat{F}) = C_F$ を得る。これは単項化定理にほ
かならない。

2. イデール群の構造について

一般に有限次代数的数体 F のイデール群を $F_A^\times$ とし, その
アルキメデス的な部分を $F_\infty^\times$, その 1 に属する連続成分を
 $F_{\infty+}^\times$ とする。

有限次ガロワ拡大 L/F が与えられたとし, K を L にお
ける F の最大アーベル拡大とする。イデール群 $L_A^\times$ の開部分
群 V で $L^\times \cdot L_{\infty+}^\times$ を含み

$$(*) \quad V^\sigma = V \quad (\forall \sigma \in \text{Gal}(L/F))$$

を満足しているものをとり,

$$d(V) = [L_A^\times : F_A^\times \cdot V \cdot N_{L/F}^{-1}(F^\times)]$$

としよう。また $K_A^\times$ の開部分群 $U = K^\times \cdot N_{L/K}(V)$ に対
して

$$d(U) = [K_A^\times : F_A^\times \cdot U \cdot N_{K/F}^{-1}(F^\times)]$$

とする。ここで $K_A^\times, F_A^\times$ は自然に $L_A^\times$ にうめ込まれたも
のを見る。このとき $U \subset V$ であり $N_{K/F}^{-1}(F^\times) \subset$

$N_{L/F}^{-1}(F^x)$ となっている。

定理 3. $\{a^{d(V)} \mid a \in F_A^x \cap V \cdot N_{L/F}^{-1}(F^x)\} \subset F_A^x \cap V$.

さらに詳しく: $d = [L:K]$ とし $e(V)$ をアーベル群 $F_A^x \cdot U \cdot N_{K/F}^{-1}(F^x) / F_A^{x^d} \cdot U \cdot N_{K/F}^{-1}(F^x)$ の exponent とすれば $d(U) \cdot e(V) \mid d(V)$ であり,

$$\{a^{d(U) \cdot e(V)} \mid a \in F_A^x \cap V \cdot N_{L/F}^{-1}(F^x)\} \subset F_A^x \cap U.$$

また $[L:K]/e(V)$ は位数

$$[F_A^{x^{e(V)}} : F_A^{x^{e(V)}} \cap U \cdot N_{K/F}^{-1}(F^x)]$$

と互いに素である。

特に $d(V) = 1$ の場合に注目すれば、次の定理を得る。

定理 4. V のさらに

$$(**) \quad L_A^x = F_A^x \cdot V \cdot N_{L/F}^{-1}(F^x)$$

を満足するとき $U = K^x \cdot N_{L/K}(V)$ は

$$K_A^x = F_A^x \cdot U \cdot N_{K/F}^{-1}(F^x)$$

を満足し

$$F_A^x \cap V \cdot N_{L/F}^{-1}(F^x) = F_A^x \cap U \cdot N_{K/F}^{-1}(F^x) = F_A^x \cap V = F_A^x \cap U.$$

しかも $[L:K]$ は $[F_A^x : F_A^x \cap V]$ と互いに素であり,

$$[K:F] \mid [F_A^x \cap V : F^x \cdot N_{L/F}(V)].$$

$$\text{系. } L_A^* = V \cdot N_{L/F}^{-1}(F^*) \Rightarrow F_A^* \subset V.$$

この系は [1] の主定理であり、[2] における general principal ideal theorem の拡張に際しての key lemma である。

註. アーベル拡大 K/F に対しては、定理 3 ($L=K$ の場合) を、さらにさらに K/F が不分岐のときには §1 の定理 1 (のイデールのことばで表わされたもの) を、それぞれ特殊な場合として含むようなイデール群の構造定理が得られている ([3]).

参考文献

- [1] K. Miyake, On the structure of the idele group of an algebraic number field, Nagoya Math. J. 80(1980) 117-127.
- [2] ———, On the general principal ideal theorem, Proc. Japan Acad. 56, Ser A (1980) 171-174.
- [3] ———, On the structure of the idele groups of algebraic number fields. II, Tohoku Math. J. 34, no.1 (1982).