

Moduli spaces of complex Fermi curves and the Willmore functional

大阪市立大学・大学院理学研究科 大仁田 義裕 (Yoshihiro Ohnita)

Department of Mathematics,

Osaka City University

日本大学・工学部 乙藤 隆史 (Takashi Otofujii)

College of Engineering,

Nihon University

日本大学・医学部 宇田川 誠一 (Seiichi Udagawa)

School of Medicine,

Nihon University

安藤-谷口両氏の論説 (AT)) では, 論文 [Sch] の前半部が解説された. 本稿では, その後半部 (大体第3章以降) における主張を概観してみたい. 大変興味深い主張や概念がいくつも与えられているが, 我々にとっては難解であり, まだ十分に理解できていない部分も多々ある, 相当に粗い概説であることをご容赦願いたい. しかしながら, この理論に対する興味は尽きず, 今後も検討を重ねて行く所存である.

準備

$L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ によって, トーラス面 $\mathbb{R}^2/\Lambda$ 上の複素数値 L^2 -関数全体からなるヒルベルト空間を表わす:

$$L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) := \{V : \mathbb{R}^2/\Lambda \longrightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} |V(\mathbf{x})|^2 dx dy < \infty\}.$$

ここで, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ と表わす.

$\mathbb{R}^2/\Lambda$ から 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への C^∞ -はめ込み (immersion) 全体の集合を

$$\text{Imm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) := \{F : \mathbb{R}^2/\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid C^\infty\text{-はめ込み}\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3)$$

によって表わすとき, Willmore 汎関数 (Willmore functional) は,

$$\mathcal{W} : \text{Imm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) \ni F \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} H^2 dA \in \mathbb{R}$$

である. ここで, H は, はめ込み F の平均曲率を, dA は, はめ込み F による誘導計量に関する面積要素を表わす. Willmore 汎関数が $\mathbb{R}^3$ の共形変換によるはめ込み F の変更で不変であることは, 基本的特徴の一つである.

$\mathcal{T}_1 \cong \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ でジーナス 1 のリーマン面のタイヒミュラー空間を表わす. 各 $\tau \in \mathcal{T}_1$ に対して, 格子 $\Lambda = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\tau$ によってトーラス面 $\mathbb{R}^2/\Lambda$ に共形構造が定め, $\mathbb{R}^2/\Lambda$ から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への共形 C^∞ -はめ込み (conformal immersion) 全体の集合を,

$$\begin{aligned} & \text{CImm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) \\ & := \{F : \mathbb{R}^2/\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \text{共形 } C^\infty\text{-はめ込み}\} \subset \text{Imm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

とおく.

Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の $\text{CImm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3)$ への制限もまた

$$\mathcal{W} : \text{CImm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) \ni F \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} H^2 dA \in \mathbb{R}$$

で表わす. 安藤-谷口の論説において, 各 $F \in \text{CImm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3)$ に対して, F の第 1 基本形式と平均曲率から定まるポテンシャル U を持つディラック作用素を経由して, 複素 Fermi 曲線と呼ばれる $\mathbb{C}^2$ の複素解析曲線 $\mathcal{F}(U, U)$ が構成された. このとき, $\mathcal{F}(U, U)$ が $\mathbb{R}^3$ の共形変換による共形はめ込み F の変更で不変であることが, [Gri-Sch] において主張されている (複素 Fermi 曲線の共形不変性).

今後、当分の間はめ込み F を忘れて、ポテンシャル U から出発し、対応するディラック作用素、そして複素 Fermi 曲線を構成するという枠組みで考える。また、さらにディラック作用素を一般化して、 $L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ の元 V, W に対応するディラック作用素、そして複素 Fermi 曲線を構成する。安藤氏と谷口氏の論説 [A-T] の定理 3.2 で述べられている通り、 V, W が $L^\infty(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ の元ならば、 $\mathcal{F}(V, W)$ が $\mathbb{C}^2$ の余次元 1 の解析的集合であることが示される。Schmidt 氏の論文 [Sch] は一般の $L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ の元 V, W に対しても同様の結果が成立することを主張している。[A-T] 5 節でも指摘されている通り、我々は未だこれを確認していない。本論説においてはこの主張が正しいものとして、話を進めることにする。

さて、モジュライ空間

$$(0.1) \quad \mathcal{M}_\Lambda := \{\mathcal{F}(V, W) \mid V, W \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)\}$$

とおく。安藤-谷口の論説にあるように、2重周期的ポテンシャルの対から複素 Fermi 曲線への対応

$$(0.2) \quad \mu: L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \ni (V, W) \mapsto \mathcal{F}(V, W) \in \mathcal{M}_\Lambda$$

が与えられる。

任意の $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_\Lambda$ に対して、

$$\mu^{-1}(\mathcal{F}) \subset L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$$

が等スペクトル集合 (isospectral set) である。

$\mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ の正規化 (normalization) を $\mathcal{N}(V, W)$ 、正規化写像 (normalization map) を、

$$\nu: \mathcal{N}(V, W) \longrightarrow \mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$$

によって表わす。

ここで実構造を導入しておく。 $\mathbb{C}^2$ 上の2個の反正則対合：

$$\rho: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, k \mapsto \bar{k}, \quad \eta: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, k \mapsto -\bar{k}$$

は、複素 Fermi 曲線の間の同型：

$$\rho: \mathcal{F}(V, W) \cong \mathcal{F}(\bar{V}, \bar{W}), \quad \eta: \mathcal{F}(V, W) \cong \mathcal{F}(\bar{W}, \bar{V})$$

を誘導し、特に、各 $U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ に対し、 $\mathcal{F}(U, \bar{U})$ 上に $\eta: k \mapsto -\bar{k}$ で定まる反正則対合が、そして、 U が実数値関数のときは、 $\mathcal{F}(U, U)$ 上に $\rho: k \mapsto \bar{k}$ で定まる反正則対合が存在する。また、 $\sigma = \eta \circ \rho: k \mapsto -k$ は正則対合であり、同型

$$\sigma: \mathcal{F}(V, W) \cong \mathcal{F}(W, V)$$

を誘導する。

例: $V, W = 0$ の場合の複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(0, 0)$

$D(0, 0, k) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{[k]} \\ -\bar{\partial}_{[k]} & 0 \end{pmatrix}$ である。(ここで、 $\partial_{[k]}, \bar{\partial}_{[k]}$ は準運動量 $k \in \mathbb{C}^2$ を持つ $\mathbb{R}^2$ 上の準周期的関数に作用する $\partial, \bar{\partial}$ を表す。)

$\psi_k(x) := \exp(2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2))$ とする。

$$\partial_{[k]} \psi_k = \pi(k_2 + \sqrt{-1}k_1) \psi_k, \quad \bar{\partial}_{[k]} \psi_k = (-k_2 + \sqrt{-1}k_1) \psi_k$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} \psi_k(x) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ が } 0\text{-固有関数} \Leftrightarrow -k_2 + \sqrt{-1}k_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_k(x) \end{pmatrix} \text{ が } 0\text{-固有関数} \Leftrightarrow k_2 + \sqrt{-1}k_1 = 0$$

が分かる。 ψ_k は準運動量 $k + \gamma$, $\gamma \in \Lambda^*$ を持つので、

$$\mathcal{F}(0,0) = \left(\bigcup_{\kappa \in \Lambda^*} \{\kappa + k \in \mathbb{C}^2 \mid -k_2 + \sqrt{-1}k_1 = 0\} \right) \cup \left(\bigcup_{\kappa \in \Lambda^*} \{\kappa + k \in \mathbb{C}^2 \mid k_2 + \sqrt{-1}k_1 = 0\} \right)$$

となる。したがって、 $\mathcal{F}(0,0)/\Lambda^*$ は非連結和

$$\{k \in \mathbb{C}^2 \mid -k_2 + \sqrt{-1}k_1 = 0\} \sqcup \{k \in \mathbb{C}^2 \mid +k_2 + \sqrt{-1}k_1 = 0\}$$

において次の各対 (k_κ^-, k_κ^+) を通常二重点として同一視した複素空間である：

$$k_\kappa^- = \left(-\frac{\kappa_1}{2} - \sqrt{-1}\frac{\kappa_2}{2}, -\frac{\kappa_2}{2} + \sqrt{-1}\frac{\kappa_1}{2} \right)$$

$$k_\kappa^+ = \left(\frac{\kappa_1}{2} - \sqrt{-1}\frac{\kappa_2}{2}, \frac{\kappa_2}{2} + \sqrt{-1}\frac{\kappa_1}{2} \right) = k_\kappa^- + \kappa$$

これを正規化すると $\mathbb{C}$ のコピー 2 つとなる： $\mathcal{N}(0,0) = \mathbb{C} \sqcup \mathbb{C}$

一般の V, W に対する $\mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ は、その有限部分領域

$$(\mathcal{F}(V, W) \cap \{k \in \mathbb{C}^2 \mid \|k\| < \delta^{-1}\})/\Lambda^*$$

(δ は小さな定数) を除いたところでは、 $\mathcal{F}(0,0)/\Lambda^*$ (の有限部分領域を除いた部分) 上の通常 2 重点のうち、有限個または無限個をハンドルに解消したものとなっている ($z_1 z_2 = 0 \rightarrow z_1 z_2 = \varepsilon$)。 $\mathcal{N}(V, W)$ はこれを正規化したものなので、

ハンドルに解消した通常 2 重点が有限個ならば、 $\mathcal{N}(V, W)$ の種数は有限

ハンドルに解消した通常 2 重点が無限個ならば、 $\mathcal{N}(V, W)$ の種数は無限

である。

(Dirac 作用素のかわりに Schrödinger 作用素、熱作用素に対する同様の議論が [F-K-T] でなされている。)

スペクトル射影

ディラック作用素 $D(V, W, k) = \begin{pmatrix} V & \partial_{[k]} \\ -\bar{\partial}_{[k]} & W \end{pmatrix}$ の λ -固有関数 Ψ が

$$\Psi(\mathbf{x}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle k, \mathbf{x} \rangle) \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi \in L^2_1(\mathbb{R}^2/\Lambda, k)$$

と表せるとき, Ψ は Bloch 関数である.

簡単な計算により

$$D(V, W, k)\Psi(\mathbf{x}) = \lambda\Psi(\mathbf{x})$$

と

$$\tilde{D}(V, W, k)\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x})$$

は同値であることがわかる. ここで

$$\tilde{D}(V, W, k) = \begin{pmatrix} V & \partial + \pi(k_2 + \sqrt{-1}k_1) \\ -\bar{\partial} + \pi(k_2 - \sqrt{-1}k_1) & W \end{pmatrix}$$

である. $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ である. $k \rightarrow k + \gamma$, $\gamma \in \Lambda^*$, としても Ψ は不変であるので, k は同値クラス $[k]$ に置き換えてよい.

今, $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{C}^2)$ を

$$\tilde{D}(V, W, [k])\psi = \lambda\psi, \quad \tilde{D}^*(V, W, [k])\varphi = \lambda\varphi$$

を満たすものとする. Δ を $\mathbb{R}^2$ における格子 Λ の基本領域とすると, $L^2(\Delta) \times L^2(\Delta)$ 上の有限階数の作用素に値を持つ $\mathcal{B}(V, W)/\Lambda^*$ 上で定義された有理型関数 P を次で定める:

各 $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ に対して,

$$P([k], \lambda) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} := \frac{\langle \langle \varphi([k], \lambda), \chi \rangle \rangle}{\langle \langle \varphi([k], \lambda), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle} \begin{pmatrix} \psi_1([k], \lambda) \\ \psi_2([k], \lambda) \end{pmatrix}.$$

ここで, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ である. これは固有関数への射影を表す. $\lambda \neq \lambda'$ に対して,

$$\langle \langle \varphi([k], \lambda'), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle = 0$$

であることに注意すると,

$$(0.3) \quad P([k], \lambda)P([k], \lambda') = P([k], \lambda')P([k], \lambda) = 0$$

が得られる. また, P は階数 1 のスペクトル射影に値をもち, $Pdk_1 \wedge dk_2$ は正則形式であることがわかる. 次に, 格子 Λ の基底 $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ を固定して,

$$p_1 = \langle \gamma_1, k \rangle, \quad p_2 = \langle \gamma_2, k \rangle$$

とおくと, Λ^* の双対基底 $\{\kappa_1, \kappa_2\}$ を用いて,

$$k = p_1 \kappa_1 + p_2 \kappa_2$$

と表せる. p_1 および p_2 は複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ の局所座標系を与える. $\kappa_1 = \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix}$, $\kappa_2 = \begin{pmatrix} \kappa_{21} \\ \kappa_{22} \end{pmatrix}$ とするとき,

$$k_1 = p_1 \kappa_{11} + p_2 \kappa_{21}, \quad k_2 = p_1 \kappa_{12} + p_2 \kappa_{22}$$

である. よって

$$\frac{\partial \tilde{D}(V, W, [k])}{\partial p_2} = \begin{pmatrix} 0 & \pi(\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}) \\ \pi(\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}) & 0 \end{pmatrix}$$

を得る. 今, $\tilde{D}(V, W, [k])\psi([k], \lambda) = \lambda \psi([k], \lambda)$ の両辺を p_2 で微分すると,

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial p_2} \psi + \tilde{D} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial p_2}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} & \langle \langle \varphi([k], \lambda), (\tilde{D} - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \tilde{D}^t \varphi([k], \lambda), \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \rangle \rangle - \lambda \langle \langle \varphi([k], \lambda), \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \rangle \rangle = 0 \end{aligned}$$

を使って,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \langle \langle \varphi([k], \lambda), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle = \langle \langle \varphi([k], \lambda), \frac{\partial \tilde{D}(V, W, [k])}{\partial p_2} \psi([k], \lambda) \rangle \rangle \\ &= \pi \{ (\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}) \langle \varphi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} + (\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}) \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle_{L^2} \} \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\langle \varphi_a, \psi_b \rangle_{L^2}$ は関数 φ_a, ψ_b ($a, b = 1, 2$) の $\mathbb{R}^2/\Lambda$ 上の通常の L^2 -内積を表す。 $\gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}$ とおけば,

$$\kappa_2 = \frac{1}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \begin{pmatrix} -\gamma_{12} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}$$

と表せるから,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \langle \langle \varphi([k], \lambda), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle \\ &= \frac{\pi}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \{ (\gamma_{11} - \sqrt{-1}\gamma_{12}) \langle \varphi_1, \psi_2 \rangle + (\gamma_{11} + \sqrt{-1}\gamma_{22}) \langle \varphi_2, \psi_1 \rangle \} \end{aligned}$$

が得られる。新しい内積

$$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\gamma_1} := \frac{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}}{\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$$

を定めると,

$$\langle \langle \varphi([k], \lambda), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle_{\gamma_1} = (\gamma_{11} - \sqrt{-1}\gamma_{12}) \langle \varphi_1, \psi_2 \rangle + (\gamma_{11} + \sqrt{-1}\gamma_{22}) \langle \varphi_2, \psi_1 \rangle$$

であるから,

$$(0.4) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \langle \langle \varphi([k], \lambda), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle = \frac{\pi}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \langle \langle \varphi([k], \lambda), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle_{\gamma_1}$$

と表せる。ここで、さらに

$$P_{\gamma_1}([k], \lambda) \chi := \frac{\langle \langle \varphi([k], \lambda), \chi \rangle \rangle_{\gamma_1}}{\langle \langle \varphi([k], \lambda), \psi([k], \lambda) \rangle \rangle_{\gamma_1}} \psi([k], \lambda)$$

と定義すると、 P と同様に P_{γ_1} も階数 1 の射影に値をもち、もし $([k], \lambda) \neq ([k'], \lambda)$, $\langle \gamma_1, k \rangle \equiv \langle \gamma_1, k' \rangle \pmod{\mathbb{Z}}$ ならば

$$(0.5) \quad P_{\gamma_1}([k], \lambda) P_{\gamma_1}([k'], \lambda) = 0 = P_{\gamma_1}([k'], \lambda) P_{\gamma_1}([k], \lambda)$$

が成り立つ。さらに式 (0.4) により、 P と P_{γ_1} の零点と極は一致するので、 $P_{\gamma_1} dp_1 \wedge d\lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \right) P_{\gamma_1} dp_1 \wedge dp_2$ も $\mathcal{B}(V, W)/\Lambda^*$ 上の正則 2 次微分形式であり、 $P_{\gamma_1} dp_1$ は $\mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ 上の正則 1 次微分形式である。また、 $L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ 上の有限階数の作用素に値を持つ $\mathcal{B}(V, W)/\Lambda^*$ 上の有理型関数 $\tilde{P}_{\gamma_1}$ を

$$\tilde{P}_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} \psi_{-k} & 0 \\ 0 & \psi_{-k} \end{pmatrix} P_{\gamma_1} \begin{pmatrix} \psi_k & 0 \\ 0 & \psi_k \end{pmatrix}$$

により定義することができる。ここで、 $\psi_k(\mathbf{x}) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle \mathbf{x}, k \rangle)$ とおく。このとき、 $\tilde{P}_{\gamma_1} dp_1 \wedge d\lambda$ も正則 2 次微分形式である。

1 有限種数の複素 Fermi 曲線

1.1 抽象 Fermi 曲線

ポテンシャルの組 (V, W) は, 次の 2 条件を満たすとき, 有限型であると呼ばれる:

有限型ポテンシャル (i): $\mathcal{N}(V, W)$ は無限遠において 2 点を付加することでコンパクト・リーマン面にコンパクト化できる.

有限型ポテンシャル (ii): 正規固有関数 ψ の引き戻し $\nu^*\psi$ は, $\mathcal{N}(V, W)$ の上で有限個の極のみをもつ.

有限型条件を仮定するならば, $\mathcal{N}(V, W)$ の正規化に 2 点 (∞^-, ∞^+) を付け加えてコンパクトリーマン面 Y が得られ, モノドロミー関数 $k = (k_1, k_2)$ が Y 上の多価有理型関数を定めることを見た. さらに, この対応の逆対応の構成をも見た.

すなわち, $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ を,

(a) Y はコンパクト純 1 次元複素解析空間である.

(b) $\pm\infty$ は, 2 個の非特異点 $\pm\infty$ である.

(c) 非特異部分の各連結成分は, $\pm\infty$ のどちらか 1 個を含み, k は多価有理型関数で $Y \setminus \{\infty^-, \infty^+\}$ で正則である.

なる組とする. 下の準運動量条件 (i),(ii) をみたす $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ から出発して,

$$(1.1) \quad \mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k) := Y - \{\infty^-, \infty^+\} \text{ の } k \text{ による像 } (\subset \mathbb{C}^2)$$

と定める. このような $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ を抽象 Fermi 曲線 (abstract Fermi curve) と呼ぶ. 反正則対合 ρ, η や正則対合 σ は, 抽象 Fermi 曲線 Y に対しても定義される.

補題 ([Sch], Lemma 2.27). Y は, 連結コンパクト・リーマン面であると仮定する. もし, 抽象 Fermi 曲線 $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ が準運動量条件 (i),(ii),(iii) を満たすならば, 実解析的な複素ポテンシャル U が存在して,

$$\mathcal{F}(U, \bar{U}) = \mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k).$$

1.2 準運動量条件

準運動量条件 (i)(Quasi-momenta(i)): k は, 1 位の極を持つ. この関数のある分岐に対して, $k_1 - \sqrt{-1}k_2$, $k_1 + \sqrt{-1}k_2$ は, それぞれ ∞^- , ∞^+ において零になる.

準運動量条件 (ii)(Quasi-momenta(ii)): k の任意の二つの分岐の差は, Λ^* の元になる. さらに, Λ^* のすべての元を与える.

準運動量条件 (iii)(Quasi-momenta(iii)): Y には, 固定点のない反正則対合的同型 η が与えられている. η^*k の任意の分岐は, $-\bar{k}$ のある分岐に等しい.

準運動量条件 (iv)(Quasi-momenta(iv)): Y には, 正則対合的同型 σ が与えられている. σ^*k の任意の分岐は, $-k$ のある分岐に等しい.

準運動量条件 (v)(Quasi-momenta(v)): $Y \setminus \{\infty^-, \infty^+\}$ の開被覆で, k の各分岐のこの開被覆に属する開集合への制限は, この近傍から $\mathbb{C}^2$ のある 1 次元複素解析空間の上への複素解析同型である.

2 モジュライ空間

2.1 複素 Fermi 曲線の変分

写像

$$\mu: L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \ni (V, W) \mapsto \mathcal{F}(V, W) \in \mathcal{M}_\Lambda$$

のポテンシャル (V, W) の小さな変分の下での挙動を調べる. ポテンシャル (V, W) の変分 $(\delta V, \delta W)$ で, 複素 Fermi 曲線を不変にするものを調べたい. それには, 複素 Fermi 曲線の変分から定義される 1 次微分形式を考えて, それが恒等的に零になるものを見つけられればよい. そのようなものを以下構成する. 点 $(V, W) \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ における無限小変形 $\delta(V, W) = (\delta V, \delta W)$ に対する写像 μ の微分

$$d\mu_{(V,W)}: L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \oplus L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \longrightarrow T_{\mathcal{F}(V,W)}\mathcal{M}_\Lambda$$

を,

$$d\mu_{(V,W)}((\delta V, \delta W)) = \Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W)$$

とおこう. ここで, 変分を定める $\mathcal{F}(V, W)$ 上の 1 次微分形式 $\Omega_{(V,W)}$ を,

$$\Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W) := \delta p_2 dp_1 - \delta p_1 dp_2$$

によって定義する. Bloch 多様体の部分多様体として, $\mathcal{F}(V, W)$ は局所的に $\lambda(p_1, p_2) = 0$ と表せる. ここで, 変分のパラメータを t とすると $p_1 = p_1(t)$, $p_2 = p_2(t)$ であり,

$$\delta p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \delta p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

と書ける. $\lambda(p_1(t), p_2(t)) \equiv 0$ ($|t| < \epsilon$) であるから, 複素 Fermi 曲線上で次の恒等式が成り立つ (λ 自身も変分で動かすが, 簡単のため λ のまま書く):

$$\begin{cases} \delta\lambda(p_1, p_2) + \frac{\partial\lambda(p_1, p_2)}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial\lambda(p_1, p_2)}{\partial p_2}\delta p_2 = 0 \\ d\lambda(p_1, p_2) = \frac{\partial\lambda(p_1, p_2)}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial\lambda(p_1, p_2)}{\partial p_2}dp_2 = 0. \end{cases}$$

この2式より次を得る:

$$\delta p_2 dp_1 - \delta p_1 dp_2 = -\frac{\delta\lambda(p_1, p_2)}{\frac{\partial\lambda}{\partial p_2}}dp_1 = \frac{\delta\lambda(p_1, p_2)}{\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}}dp_2$$

ここで, 特に $\delta p_1 = 0$ の場合を考える.

$$(2.1) \quad \Omega_{(V, W)}(\delta V, \delta W) = \delta p_2 dp_1 = \frac{\partial p_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} dp_1 \Big|_{t=0}.$$

一方,

$$P \frac{\partial D}{\partial t} \psi = \frac{\langle \langle \varphi, (\lambda - D) \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle \rangle + \langle \langle \varphi, \frac{\partial \lambda}{\partial t} \psi \rangle \rangle}{\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle} \psi = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \psi$$

であり, P の値は階数1のスペクトル射影であるから

$$(2.2) \quad \text{trace} \left(P \frac{\partial D}{\partial t} \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

を得る. ここで

$$\begin{aligned} & P \circ \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21} \\ \kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21} & 0 \end{pmatrix} \frac{\pi}{\frac{\partial \lambda}{\partial p_2}} \chi \\ &= P \circ \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{11} - \sqrt{-1}\gamma_{12} \\ \gamma_{11} + \sqrt{-1}\gamma_{12} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \frac{\pi}{\frac{\partial \lambda}{\partial p_2}} \chi \\ &= \frac{\pi}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \frac{(\gamma_{11} - \sqrt{-1}\gamma_{12})\langle \varphi_1, \psi_2 \rangle + (\gamma_{11} + \sqrt{-1}\gamma_{12})\langle \varphi_2, \psi_1 \rangle}{\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle \frac{\partial \lambda}{\partial p_2}} \psi \\ &= \frac{\langle \langle \varphi, \chi \rangle \rangle_{\gamma_1}}{\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle_{\gamma_1}} \psi = P_{\gamma_1} \chi \end{aligned}$$

であるから, 次を得る:

$$(2.3) \quad \frac{\partial p_2}{\partial \lambda} P = \frac{1}{\pi} P_{\gamma_1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{1}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix}$$

(2.1),(2.2),(2.3) より

$$\begin{aligned}
 \Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W) &= \frac{\partial p_2}{\partial \lambda} \text{trace} \left(P \circ \frac{\partial D}{\partial t} \right) dp_1 \Big|_{t=0} \\
 (2.4) \quad &= \text{trace} \left(P_{\gamma_1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{1}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta V & 0 \\ 0 & \delta W \end{pmatrix} \right) \frac{dp_1}{\pi} \\
 &= \text{trace} \left(P_{\gamma_1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \right) \frac{dp_1}{\pi}
 \end{aligned}$$

を得る.

補題 1 ([Sch], Lemma 3.1). $\delta V, \delta W \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ を V, W の変分とする. このとき,

$$(2.5) \quad \Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W) = \text{trace} \left(P_{\gamma_1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \right) \frac{dp_1}{\pi}$$

は複素 Fermi 曲線上の正則 1 次微分形式であり, Λ の基底 $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ のとり方に依らない.

証明. $P_{\gamma_1} dp_1$ は正則 1 次微分形式であったから, $\Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W)$ もその形から正則 1 次微分形式であることがわかる. Λ の基底のとり方に依らないことは, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ と
して

$$\begin{cases} \gamma'_1 = a\gamma_1 + b\gamma_2 \\ \gamma'_2 = c\gamma_1 + d\gamma_2 \end{cases}$$

とする. ここで $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ も Λ の基底である. このとき $p'_1 = \langle \gamma'_1, k \rangle, p'_2 = \langle \gamma'_2, k \rangle$ とおくと,
 $p'_1 = ap_1 + bp_2, p'_2 = cp_1 + dp_2$ であるから,

$$\begin{cases} dp'_1 = adp_1 + bdp_2, & dp'_2 = cdp_1 + ddp_2 \\ \frac{\partial}{\partial p'_1} = d\frac{\partial}{\partial p_1} - c\frac{\partial}{\partial p_2}, & \frac{\partial}{\partial p'_2} = -b\frac{\partial}{\partial p_1} + a\frac{\partial}{\partial p_2} \end{cases}$$

を得る. $\mathcal{F}(V, W)$ 上で $d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} dp_2 = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad \frac{dp'_1}{\frac{\partial \lambda}{\partial p'_2}} &= \frac{adp_1 + bdp_2}{a\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} - b\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}} = \frac{a\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} dp_1 + b\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} dp_2}{\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} (a\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} - b\frac{\partial \lambda}{\partial p_1})} \\
 &= \frac{(a\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} - b\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}) dp_1}{\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} (a\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} - b\frac{\partial \lambda}{\partial p_1})} = \frac{dp_1}{\frac{\partial \lambda}{\partial p_2}}
 \end{aligned}$$

を得る. これより主張は確かめられる. □

次に, $\langle \kappa_2, \kappa_2 \rangle \neq 0$ ならば $\begin{pmatrix} 0 & \kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21} \\ \kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21} & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつので,
 $\tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, \cdot)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, p_1) \\
 (2.7) \quad & := \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21} \\ \kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
 & \quad \left(D(V, W, 0) + p_1 \pi \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{12} + \sqrt{-1}\kappa_{11} \\ \kappa_{12} - \sqrt{-1}\kappa_{11} & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 & = \begin{pmatrix} \frac{p_1 \pi (\kappa_{12} - \sqrt{-1}\kappa_{11}) - \bar{\theta}}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} & \frac{W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & \frac{p_1 \pi (\kappa_{12} + \sqrt{-1}\kappa_{11}) + \theta}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

すると次のような書き換えが可能であることがわかる (Schmidt 氏の原論文では $-p_2\pi$ は $p_2\pi$ となっているが誤りと思われる):

$$\begin{aligned}
 & \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, p_1) \tilde{\psi} = -p_2\pi \tilde{\psi} \\
 (2.8) \quad & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V & p_1 \pi (\kappa_{12} + \sqrt{-1}\kappa_{11}) + \theta \\ p_1 \pi (\kappa_{12} - \sqrt{-1}\kappa_{11}) - \bar{\theta} & W \end{pmatrix} \tilde{\psi} \\
 & = -p_2\pi \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21} \\ \kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\psi} \\
 & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V & \theta + \pi(\kappa_2 + \sqrt{-1}\kappa_1) \\ -\bar{\theta} + \pi(\kappa_2 - \sqrt{-1}\kappa_1) & W \end{pmatrix} \tilde{\psi} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \tilde{D}(V, W, k) \tilde{\psi} = 0
 \end{aligned}$$

ここで, $k = p_1\kappa_1 + p_2\kappa_2$ と表せたことに注意する.

補題 ([Sch], Lemma 3.2). f は, $\mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ のある開近傍 $\mathcal{U}$ 上で有限個の極をもつ有理型関数とする. このとき, バナッハ空間の間の有界作用素 $L^p(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^p(\mathbb{R}^2/\Lambda) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^{p'}(\mathbb{R}^2/\Lambda)$, $(1 < p' < p < \infty)$ に値をもつ複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $\tilde{A}_f$ が存在して以下のことが成り立つ:

(1) すべての $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}$ とすべての $p_1 \in \mathbb{C}$ に対して

$$(2.9) \quad \tilde{A}_f(p_1) \psi_{n_1\kappa_1 + n_2\kappa_2} = \psi_{n_1\kappa_1 + n_2\kappa_2} \tilde{A}_f(p_1 + n_1)$$

が成り立つ.

(2) 交換子 $[\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, p_1)]$ は点 p_1 に依存せず, 次の形の作用素に等しい:

$$(2.10) \quad \delta \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, \cdot) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W_f}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V_f}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix}$$

ここで, $\delta V_f, \delta W_f \in \cap_{q < \infty} L^q(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ は等号を成立させる f に依存するある変分である. さらに, この形の変分は複素 Fermi 曲線を不変にする.

(3) すべての変分 $\delta V, \delta W \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ に対して, 次の成り立つ:

$$(2.11) \quad \text{Res}_U(f \cdot \Omega_{(V, W)}(\delta V, \delta W)) = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{-1}} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} (\delta V \delta W_f - \delta W \delta V_f) dx dy$$

証明. f は 1 点 $[k'] \in \mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ でのみ極を持つ場合に証明すればよい. 一般の f はそれらの線形結合で得られる. 射影 $\pi: \mathcal{F}(V, W)/\Lambda^* \ni [k] \rightarrow p_1 \in \mathbb{C}$ に対して, $\pi^{-1}(p_1) \ni [k']$ であるとし,

$$\tilde{F}(\cdot) = \sum_{\pi^{-1}(p_1)} f \cdot \tilde{P}_{\gamma_1}$$

とすると, これは $p'_1 = \pi([k'])$ の近傍で定義された, $L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ 上の有限階数の作用素に値を持つ, 有理型関数である. その特異部分 $\tilde{F}_{\text{sing}}(\cdot)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で定義された有理型関数である. このとき

$$(2.12) \quad \tilde{A}_f(p_1) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \psi_{n_1 \kappa_1 + n_2 \kappa_2} \tilde{F}_{\text{sing}}(p_1 + n_1) \psi_{-n_1 \kappa_1 - n_2 \kappa_2}$$

の右辺の無限和は強い作用素位相で収束し等号成立が確かめられるが詳細は省略する. この式から (1) の主張が得られる.

(2) すべての $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ とすべての点 $p_1 \in \mathbb{C}$ に対して, 作用素として

$$(2.13) \quad \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, p_1) \psi_{n_1 \kappa_1 + n_2 \kappa_2} = \psi_{n_1 \kappa_1 + n_2 \kappa_2} \left(\tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, p_1 + n_1) + n_2 \pi \mathbf{1} \right)$$

が成り立つことが簡単な計算により確かめられる. 従って, この式を使うと

$$(2.14) \quad \begin{aligned} & [\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)] \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} [\psi_{n_1 \kappa_1 + n_2 \kappa_2} \tilde{F}_{\text{sing}}(p_1 + n_1) \psi_{-n_1 \kappa_1 - n_2 \kappa_2}, \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)] \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \psi_{n_1 \kappa_1 + n_2 \kappa_2} [\tilde{F}_{\text{sing}}(p_1 + n_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1 + n_1)] \psi_{-n_1 \kappa_1 - n_2 \kappa_2} \end{aligned}$$

となる. 式 (2.7) において, p_1 の項以外は, $\tilde{F}$ と可換なので消えてしまうので, $\tilde{F}_{-1}$ を $\tilde{F}(p_1)dp_1$ の, 点 $p_1 = p'_1$ における留数を表すすると,

$$(2.15) \quad [\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)] = \pi \sum_{\kappa \in \Lambda^*} \psi_{\kappa} [\tilde{F}_{-1}, \begin{pmatrix} \frac{\kappa_{12} - \sqrt{-1}\kappa_{11}}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_{12} + \sqrt{-1}\kappa_{11}}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} \end{pmatrix}] \psi_{-\kappa}$$

を得る. このとき右辺は点 p_1 に依存しないことに注意. いま仮に $\tilde{F}_{-1} = \begin{pmatrix} w & u \\ v & z \end{pmatrix}$ と表すと, 簡単な計算により

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)] &= \pi \sum_{\kappa \in \Lambda^*} 2i \text{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda) \frac{1}{\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2} \begin{pmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2i\pi}{\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2} \begin{pmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. そこで, f に付随したポテンシャルの変分 $\delta V, \delta W$ を

$$(2.16) \quad [\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W_f}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V_f}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} = \delta \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}$$

により定める. そうすると

$$\begin{aligned} \Omega_{(V, W)}(\delta V_f, \delta W_f) \\ = \text{trace}(\tilde{P}_{\gamma_1} \delta \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}) \frac{dp_1}{\pi} = \text{trace}(\tilde{P}_{\gamma_1} [\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)]) \frac{dp_1}{\pi} \end{aligned}$$

が $p_1 \neq p'_1$ なるすべての点で成り立つ. $[\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)]$ は点 p_1 に依存しなかったから, 点 p_1 を $\tilde{P}_{\gamma_1}$ と $\tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)$ が可換になるように選べば, $\Omega_{(V, W)}(\delta V_f, \delta W_f) = 0$ が $\mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ の開部分集合上で成り立つようにできる. 正則微分形式なので $\mathcal{F}(V, W)/\Lambda^*$ 上で $\Omega_{(V, W)}(\delta V_f, \delta W_f) \equiv 0$ である.

(3) 式 (2.5) より

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathcal{U}}(f \cdot \Omega_{(V, W)}) &= \text{Res}_{\mathcal{U}} \left(\text{trace} \left(f \cdot \tilde{P}_{\gamma_1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \right) \frac{dp_1}{\pi} \right) \\ &= \text{trace} \left(\text{Res}_{p_1=p'_1} \left(\tilde{F}(p_1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \frac{dp_1}{\pi} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \text{trace} \left(\tilde{F}_{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

一方, 変分 $\delta V_f, \delta W_f$ の定義から

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\kappa \in \Lambda^*} \psi_\kappa \tilde{F}_{-1} \psi_{-\kappa}, \begin{pmatrix} \frac{\kappa_{12} - \sqrt{-1}\kappa_{11}}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_{12} + \sqrt{-1}\kappa_{11}}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} \end{pmatrix} \right] &= \frac{1}{\pi} [\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(p_1)] \\ &= \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta W_f}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta V_f}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi \text{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda)} \sum_{\kappa \in \Lambda^*} \psi_\kappa \tilde{F}_{-1} \psi_{-\kappa} \\ &= \frac{1}{\pi \text{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda)} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2}{2\sqrt{-1} \text{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda)} \begin{pmatrix} * & \frac{\delta \delta W_f}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta - \delta V_f}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & * \end{pmatrix} \\ &= \frac{\langle \kappa_2, \kappa_2 \rangle}{2\pi^2 i} \begin{pmatrix} * & \frac{\delta \delta W_f}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta - \delta V_f}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る. さらに, ここで

$$\sum_{\kappa \in \Lambda^*} \psi_\kappa \tilde{F}_{-1} \psi_{-\kappa} = \text{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda) \tilde{F}_{-1} \delta(p_1 - p'_1).$$

であるから ($\delta(\cdot)$ はディラックの δ 関数),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \text{trace} \left(\tilde{F}_{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta \delta W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta \delta V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda)} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} \text{trace} \left(\sum_{\kappa \in \Lambda^*} \psi_\kappa \tilde{F}_{-1} \psi_{-\kappa} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta \delta W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ \frac{\delta \delta V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{-1}} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} (\delta V \delta W_f - \delta V_f \delta W) dx dy \end{aligned}$$

が得られる. □

2.2 抽象 Fermi 曲線の変形

準運動量条件 (i), (ii), (v) を満たし算術種数が g である組 $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ 全体のモジュライ空間を考える:

$$\mathcal{M}_{g, \Lambda} := \{(Y, \infty^-, \infty^+, k) \mid \text{準運動量条件 (i), (ii), (v) を満たす.}$$

$$Y \text{ の算術種数} = g\}.$$

このとき, $\mathcal{M}_{g, \Lambda}$ の滑らか性が証明される:

命題 ([Sch], Proposition 3.7). (1) $\mathcal{M}_{g,\Lambda}$ は, $g+1$ 次元の複素多様体である.

(2) 点 $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ における $\mathcal{M}_{g,\Lambda}$ の接ベクトル空間は, ∞^-, ∞^+ を通常 2 重点に同一視した 1 次元複素解析空間 $\tilde{Y}$ 上の正則 1 形式のベクトル空間とみなせる.

この結果は, 一般 Willmore 汎関数の極小解となる抽象 Fermi 曲線の分類において使われる.

2.3 有限種数のモジュライ空間のコンパクト化

2.3.1 有限位相 (finite topology) とハウスドルフ距離 (Hausdorff distance)

コンパクト・ハウスドルフ位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合 $Cl(X)$ は, 有限位相に関してやはりコンパクト・ハウスドルフ位相空間になる. ここで, 有限位相とは,

$$\{A \in Cl(X) \mid A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}, \quad \{A \in Cl(X) \mid A \subset \mathcal{O}\}$$

ここで, $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$,

という形の $Cl(X)$ のすべての部分集合を開基とするような位相である. さらに, X が距離付け可能な位相空間ならば, $Cl(X)$ の有限位相もまた距離付け可能であり, ハウスドルフ距離の位相と一致する. X が可分な位相空間ならば, $Cl(X)$ の有限位相もまた可分である.

$\mathbb{C}^2$ の一点コンパクト化を $\overline{\mathbb{C}^2}$ とすると, この事実により,

補題 ([Sch], Lemma 3.10). $Cl(\overline{\mathbb{C}^2})$ は, 有限位相に関して可分なコンパクト・ハウスドルフ距離付け可能位相空間である.

次に, $\mathcal{F}(V, W)$ は定義より $\mathbb{C}^2$ 内の閉集合であり, $\mathbb{C}^2$ の一点コンパクト化 $\overline{\mathbb{C}^2}$ における閉包を $\overline{\mathcal{F}}(V, W)$ で表すことにする. 対応

$$\bar{\mu}: L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \ni (V, W) \mapsto \overline{\mathcal{F}}(V, W) \in Cl(\overline{\mathbb{C}^2})$$

において, 左辺の集合にレゾルベントから決まるコンパクト開位相, 右辺の集合に有限位相と呼ばれる位相を入れると, これは連続写像になる.

複素 Fermi 曲線の部分モジュライ空間として以下のものを定める:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\Lambda, \eta} &:= \{\mathcal{F}(U, \bar{U}) \mid U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)\}, \\
\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, w} &:= \{\mathcal{F}(U, \bar{U}) \mid U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda), 4\|U\|^2 \leq w\}, \\
\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma} &:= \{\mathcal{F}(U, \bar{U}) \mid U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \text{ real}\}, \\
\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, w} &:= \{\mathcal{F}(U, \bar{U}) \mid U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \text{ real}, 4\|U\|^2 \leq w\}, \\
\mathcal{M}_{g, \Lambda, \eta} &:= \{\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{\Lambda, \eta} \mid \mathcal{F}/\Lambda^* \text{ の幾何種数} \leq g\}, \\
\mathcal{M}_{g, \Lambda, \eta, w} &:= \{\mathcal{F}(U, \bar{U}) \mid U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda), 4\|U\|^2 \leq w\}
\end{aligned}$$

補題 ([Sch], Lemma 3.2) の応用として, 第1積分を, スペクトル・データ $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ から得られる複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ 上の有理型微分形式の留数で表す公式が得られる:

補題 ([Sch], Lemma 3.12). 準運動量条件 (i), (ii) を満たすデータ $(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ の複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ があるポテンシャルの組 (V, W) の複素 Fermi 曲線に等しいならば, 対応する第1積分の公式が次で与えられる:

$$\begin{aligned}
(2.17) \quad & 4 \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} V(\mathbf{x})W(\mathbf{x})dxdy \\
& = \mathcal{W}(Y, \infty^-, \infty^+, k) = 8\pi^2 \sqrt{-1} \text{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda) \text{Res}_{\infty^+}(k_1 dk_2)
\end{aligned}$$

証明. 零ポテンシャルに対応する複素 Fermi 曲線は

$$\langle k + \kappa, k + \kappa \rangle = 0, \quad (\kappa \in \Lambda^*)$$

の解の和集合で与えられるから, この場合公式は正しい. 次に, $\tilde{A}_f(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の場合を考えると, これは補題 ([Sch], Lemma 3.2) の (1), (2) を満たし, さらに

$$[\tilde{A}_f(p_1), \tilde{D}_{\gamma_1, \gamma_2}(V, W, p_1)] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2W}{\kappa_{22} - \sqrt{-1}\kappa_{21}} \\ -\frac{2V}{\kappa_{22} + \sqrt{-1}\kappa_{21}} & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $\delta V_f = -2V, \delta W_f = 2W$ で与えられることがわかる. このとき, 補題 ([Sch], Lemma 3.2) の式 (2.11) の右辺は

$$\frac{1}{2\pi^2 \sqrt{-1}} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} (2W\delta V + 2V\delta W) dxdy = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{-1}} \delta \left(\int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} V(\mathbf{x})W(\mathbf{x})dxdy \right)$$

となり, 第1積分の変分で書ける. この変分は $\mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ 上の有理型関数 f が ∞^+ の近傍で 1, ∞^- の近傍で -1 に等しい場合に対応しているので, 補題 ([Sch], Lemma 3.2) の式 (2.11) の左辺は

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\mathcal{U}}(f \cdot \Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W)) &= \operatorname{Res}_{\infty^+}(\Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W)) - \operatorname{Res}_{\infty^-}(\Omega_{(V,W)}(\delta V, \delta W)) \\ &= 2 \operatorname{Res}_{\infty^+}(\delta p_2 dp_1) \end{aligned}$$

となる. 従って, これら 2 式より

$$\int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} V(\mathbf{x})W(\mathbf{x})dxdy = 2\pi^2\sqrt{-1} \operatorname{Res}_{\infty^+}(p_2 dp_1)$$

を得る. 格子を共形一次変換で不変によって $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と変換すると公式 (2.17) が得られる. □

また, 幾何種数が g 以下の抽象 Fermi 曲線の集合を

$$\bar{\mathcal{M}}_{g,\Lambda,\eta} := \{\mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k) \mid \mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k) \text{ の幾何種数} \leq g\}$$

で表す. またその中で第1積分 $\mathcal{W}(Y, \infty^-, \infty^+, k)$ が w 以下のものの集合を

$$\bar{\mathcal{M}}_{g,\Lambda,\eta,w} := \{\mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k) \mid \mathcal{W}(Y, \infty^-, \infty^+, k) \leq w\}$$

で表す. すると,

$$\bar{\mathcal{M}}_{g,\Lambda,\eta} = \bigcup_{w>0} \bar{\mathcal{M}}_{g,\Lambda,\eta,w}$$

である.

定理 ([Sch], Theorem 3.13). $\bar{\mathcal{M}}_{g,\Lambda,\eta,w}$ は, $\mathcal{M}_{g,\Lambda,\eta,w}$ の $Cl(\overline{\mathbb{C}^2})$ における閉包に等しく, コンパクトである.

$\mathcal{M}_{\Lambda,\eta,w}$ は $Cl(\overline{\mathbb{C}^2})$ の部分集合である. 後者は可分コンパクト距離付け可能空間であり, 前者のそこでの閉包を $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,\eta,w}$ で表す. また

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda,\eta} := \bigcup_{w>0} \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,\eta,w}$$

とおく.

2.3.2 複素 Fermi 曲線の種数の有限性定理

上で述べた対合 σ は $\widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta}$ 上でも定義され, その固定点集合を $\widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma}$ と表す. $\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, w}$ も同様に定める.

このとき次が成り立つ:

系 ([Sch], Corollary 3.54). 各 $w > 0$ に対し, 格子 Λ と w に依存する自然数 $g_{\max}$ であつて, 次をみたすものが存在する: $\widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, w}$ の元 $\mathcal{F}$ は, もし実部分 ($=\mathcal{F}/\Lambda^*$ の正規化に作用する σ の固定点集合) の補集合の連結成分が 2 個であるならば, $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{g_{\max}, \Lambda, \eta, \sigma, w}$ である.

2.4 複素 Fermi 曲線の収束

2.4.1 有限階摂動 (Finite rank Perturbations)

$R(V, W, k, 0)$ の有限階摂動 (Finite rank Perturbations 3.22. [Sch, p99]) とは, 積分核

$$(2.18) \quad \Psi_D(z, k) S_D(k) \Phi_D(z', k) dx' \wedge dy'$$

をもつ線型作用素による摂動として定義される. ここで,

$D = \sum_{l=1}^L M_l z_l$ は $\mathbb{C}/\Lambda$ 上の整因子,

Ψ_D 行ベクトルで, その各成分は, $\Delta \setminus \{z_1, \dots, z_L\}$ 上で, $D(V, W, k)$ の核 (kernel) に属する.

Φ_D 列ベクトルで, その各成分は, $\Delta \setminus \{z_1, \dots, z_L\}$ 上で, $D(V, W, k)$ の余核 (cokernel) に属する.

各 $l = 1, \dots, L$ に対して, 点 z_l の充分小さい近傍において,

$$(2.19) \quad \begin{pmatrix} V(\bar{z} - \bar{z}_l)^{M_l} & \partial(\bar{z} - \bar{z}_l)^{M_l} \\ -\bar{\partial}(z - z_l)^{M_l} & W(z - z_l)^{M_l} \end{pmatrix} \Psi_D(z, k) = 0, \\ \begin{pmatrix} V(z - z_l)^{M_l} & \bar{\partial}(z - z_l)^{M_l} \\ -\partial(\bar{z} - \bar{z}_l)^{M_l} & W(\bar{z} - \bar{z}_l)^{M_l} \end{pmatrix} {}^t\Phi_D(z, k) = 0$$

が成り立つ.

$\mathcal{F}$ がレゾルベント $R(U, \bar{U}, k, 0)$ の有限階摂動の複素 Fermi 曲線ならば,

$$(2.20) \quad \mathcal{W}(\mathcal{F}) = 4\|U\|_{L^2}^2 + \sum_{l=1}^L \mathcal{W}_{\text{sing}, z_l}$$

が成り立つ.

2.4.2 ポテンシャルの収束定理

$L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ 内の列 U_n が U に弱収束する (注: 有界列からそのような部分列が取れる) ならば, $U_n \bar{U}_n$ は $\mathbb{R}^2/\Lambda$ 上の測度として, $U\bar{U} + \{\text{有限個の点測度}\}$ に弱収束する. そして対応するレゾルベントの列 $R(U_n, \bar{U}_n, k, 0)$ は $R(U, \bar{U}, k, 0)$ の有限階数摂動に収束する.

定理 ([Sch], p130, Theorem 3.48). $\{U_n\}$ を $L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ における複素ポテンシャルの有界列とする. このとき, その部分列 $\{U_{n_i}\}$ と $U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ が存在して次の性質をもつ:

- (1) $L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ において $\{U_{n_i}\}$ は $U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ に弱収束する.
- (2) そのレゾルベント $R(U_{n_i}, \bar{U}_{n_i}, k, 0)$ は, $R(U, \bar{U}, k, 0)$ の有限階数摂動に弱収束する.

2.4.3 コンパクト化モジュライ空間

得られている結果: 「 $\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, w}$ の任意の列は, 有限階数摂動 3.22 の複素 Fermi 曲線に収束する」を応用して, コンパクト化されたモジュライ空間の構造を議論する.

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, w} &:= \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, w} \text{ の閉包,} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta} &:= \bigcup_{w>0} \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, w}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma} &:= \bigcup_{w>0} \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, w}\end{aligned}$$

命題 ([Sch], Proposition 3.52). 各 $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta}$ は有限あるいは無限個の水平切断 (horizontal cuts) と有限個の平行切断 (parallel cuts) に沿った 2 個の複素平面 $\mathbb{C}_p^\pm$ の貼り合わせ (gluing) によって作られる.

複素 Fermi 曲線のこの構成法は, モジュライ空間 $\mathcal{M}_\Lambda$ の多様体構造の構成においても用いられる.

2.5 モジュライ空間 $\mathcal{M}_\Lambda$ の複素 Banach 多様体構造

準運動量条件 (i') (Quasi-momenta(i')): Y には, 正則対合的同型 σ が与えられている. σ^*k の任意の分岐は, $-k$ のある分岐に等しい.

準運動量条件 (vi) (Quasi-momenta(vi)): Y には, 正則対合的同型 σ が与えられている.
 σ^*k の任意の分岐は, $-k$ のある分岐に等しい.

今,

$$\ell_1(\Lambda^*) := \{t : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{C}, \sum_{\kappa \in \Lambda^*} |t(\kappa)| < \infty\},$$

$$\ell_1^+(\Lambda^*) := \{t \in \ell_1(\Lambda^*) \mid \text{各 } \kappa \in \Lambda^* \text{ に対して, } t(\kappa) \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

とおく. 充分小さい任意の $w > 0$ に対して, 写像

$$\mu : \{U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \mid 4\|U\|_{L^2}^2 \leq w\} \ni U \rightarrow \mathcal{F}(U, \bar{U}) \in \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, w}$$

の局所的記述が議論され, この写像 μ が, 写像

$$L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda) \ni U \mapsto t \in \ell_1^+(\Lambda^*), \quad t(\kappa) := |\hat{U}(\kappa)|^2 \quad (\kappa \in \Lambda^*)$$

の非線型摂動であることがわかる. ここで, $\hat{U}$ は U のフーリエ変換を表わす.

定理 ([Sch], Theorem 3.57). $\mathcal{M}_\Lambda$ は $\ell_1(\Lambda^*)$ をモデル Banach 空間とする複素 Banach 多様体である. さらに, コンパクト化されたモジュライ空間 $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta}$ は, 漸近的 $\ell_1^+(\Lambda^*)$ -構造をもつ. その上, 有限種数の複素 Fermi 曲線の集合は, 有限個の零でない成分のみをもつ $\ell_1^+(\Lambda^*)$ の元たちによってパラメータ付けされる. 特に, それらは, その相応の位相稠密に関して稠密である.

これは, 命題 ([Sch], Proposition 3.52) の改良された漸近的解析によって示される.

3 一般 Weierstrass 汎関数 (generalized Weierstrass functional)

定義. Weierstrass ポテンシャル ([Sch], Weierstrass potential 1.3): 実ポテンシャル $U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ は, そのディラック作用素 D_U の核は, 下の周期条件 (PC) をみたす非自明なスピノル $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ をもつとき, **Weierstrass ポテンシャル** と呼ばれる.

周期条件 (PC) ([Sch], Periodicity condition 1.1): 2 個の閉 1 次微分形式 $\psi_1^2 dz - \psi_2^2 d\bar{z}$, $\psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z}$ は, $\mathbb{R}^2/\Lambda$ のすべての 1-サイクルの上での積分が零になる.

定義. Weierstrass ポテンシャル U の複素 Fermi 曲線を, **Weierstrass 曲線** と呼ぶ.

定義. 特異性条件 (SC) ([Sch], Singularity condition 5.3): $[\kappa/2] \in \mathcal{F}(U, U)/\Lambda^*$ なる $\kappa \in \Lambda^*$ が存在する. さらに, 正規化 $\nu: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}/\Lambda^*$ における点 $[\kappa/2] \in \mathcal{F}/\Lambda^*$ の逆像 $\nu^{-1}([\kappa/2])$ は, dp_1, dp_2 両方の2個零点, または, 少なくとも6個の元, または, ちょうど4個の元を含む. その上, 最後の場合においては, 関数 dp_2/dp_1 は, η によって互いに移り合わない2個の異なる元において同じ値を取る.

そこで,

$$\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{SC}} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma} \mid \mathcal{F} \text{ は条件 (SC) を満たす}\}.$$

と定めると,

定理 ([Sch], Theorem 5.4).

$$\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{SC}} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma} \mid \mathcal{F} \text{ は Weierstrass 曲線}\}.$$

定義. 弱特異性条件 (WSC) ([Sch], Weak Singularity condition 4.2): $[\kappa/2] \in \mathcal{F}(U, U)/\Lambda^*$ なる $\kappa \in \Lambda^*$ が存在する. さらに, 正規化 $\nu: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}/\Lambda^*$ における点 $[\kappa/2] \in \mathcal{F}/\Lambda^*$ の逆像 $\nu^{-1}([\kappa/2])$ は, 少なくとも4個の多重点を含むか, または, 少なくとも2個のカスプを含む.

定義. 弱特異性条件 (WSC) を満たす $\tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma}$ に属する一般複素 Fermi 曲線を, 一般 Weierstrass 曲線と呼ぶ.

$$\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma} \mid \mathcal{F} \text{ は条件 (WSC) を満たす}\}.$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}} := \bigcup_{w>0} \tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}, w},$$

ただし,

$$\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}, w} := \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}} \cap \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, w},$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}, w} := \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}, w} \text{ の (有限位相に関する) 閉包.}$$

このとき, 次が成り立つ:

(a) 任意の $w > 0$ に対して, $\tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, w}$ は, 有限位相に関してコンパクトである.

(b) 第一積分 (first integral) の

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}, w} &:= \tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}} \cap \tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, w} \\ &= \overline{\mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, \text{WSC}} \cap \mathcal{M}_{\Lambda, \eta, \sigma, w}} \subset \tilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, w} \end{aligned}$$

への制限 $\mathcal{W}$ は、下半連続である。この汎関数 $\mathcal{W}$ を、一般 Weierstrass 汎関数 (generalized Weierstrass functional) と呼ぶ。

従って、一般 Weierstrass 汎関数 $\mathcal{W}$ は、 $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, w}$ 上で最小値をもつ。次に、その存在する最小解を分類決定する必要がある。

3.1 一般 Weierstrass 汎関数の極小解

主張：「一般 Weierstrass 汎関数 $\mathcal{W}$ の $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, WSC, w}$ 上でのすべての極小解 $\mathcal{F}$ は、分割された実部をもつ。」

定義. $\mathcal{F} \in \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma}$ は、 $\mathcal{F}/\Lambda^*$ の正規化 $\mathcal{N}$ における ρ の固定点集合 (実部) の補集合が 2 個の連結成分をもつとき、分割された実部 (dividing real part) をもつという。

系 ([Sch], Corollary 3.54) において、分割された実部をもつ $\mathcal{F} \in \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma}$ は有限種数をもつことが示されている。

一般 Weierstrass 汎関数の極小解の分類:

定理 ([Sch], Theorem 4.9). 一般 Weierstrass 汎関数 $\mathcal{W}$ の $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, WSC, w}$ 上での極小解 $\mathcal{F}$ は、次のクラスの一つに属する:

- (a) 分割された実部をもつ極小解.
- (b) 実 σ -超楕円的な極小解.
- (c) 非連結な正規化をもつ極小解.

これは、

1. 有限な幾何種数の複素 Fermi 曲線に極小解にもつ場合.
2. 無限な幾何種数の複素 Fermi 曲線に極小解をもつ場合.

のそれぞれの場合において議論される。有限な幾何種数の場合において、固定された有限種数の抽象 Fermi 曲線のモジュライ空間の多様体構造を証明した命題 ([Sch], Proposition 3.7) が本質的な役割をする。

結果として次が結論される ([Sch], p168):

「一般 Weierstrass 汎関数 $\mathcal{W}$ の $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, WSC}$ 上でのすべての極小解 $\mathcal{F}$ は、 $\mathcal{W}(\mathcal{F}) \leq w$ なる $w > 0$ に対して、 $\bar{\mathcal{M}}_{g_{\max}, \Lambda, \eta, \sigma, w}$ に属する。ここで、 $g_{\max}$ は系 ([Sch], Corollary 3.54) において導入された定数である。」

3.2 一般 Weierstrass 汎関数の最小解

$\mathcal{W}(\mathcal{F}) \leq 8\pi$ なる一般 Weierstrass 汎関数のすべての極小解を決定する.

$\widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma} = \bigcup_{w>0} \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma, w}$ とおく.

補題. 各 $[k'] \in \mathbb{R}^2/\Lambda^*$ に対して,

$$\{\bar{\mathcal{F}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma} \mid [k'] \in \mathcal{F}/\Lambda^* \subset \mathbb{C}^2/\Lambda^*\}$$

への第一積分の制限は, 唯一の最小解 $\mathcal{F}_{\min}([k'])$ をもつ. さらに, 連続写像

$$(3.1) \quad \mathcal{F}_{\min} : \mathbb{R}^2/\Lambda^* \ni [k'] \mapsto \mathcal{F}_{\min}([k']) \in \bar{\mathcal{M}}_{3, \Lambda, \eta, \sigma, 4\pi}$$

が得られ, 各 $\mathcal{F}_{\min}([k']) \in \bar{\mathcal{M}}_{3, \Lambda, \eta, \sigma, 4\pi}$ は, 実 σ -超楕円的な複素 Fermi 曲線である. そこで,

$$\bar{\mathcal{M}}_{3, \Lambda, \eta, \sigma, 4\pi, \text{hypell}} := \{\bar{\mathcal{F}} \in \bar{\mathcal{M}}_{3, \Lambda, \eta, \sigma, 4\pi} \mid \text{実 } \sigma\text{-超楕円的な複素 Fermi 曲線}\}$$

とおく. 第一積分の $\text{Im}(\mathcal{F}_{\min})$ への制限は, 同相

$$(3.2) \quad \bar{\mathcal{M}}_{3, \Lambda, \eta, \sigma, 4\pi, \text{hypell}} \supset \text{Im}(\mathcal{F}_{\min}) \cong [0, 4\pi]$$

を与える. それゆえ, 区間 $[0, 4\pi]$ によってこの変形族

$$(3.3) \quad \mathcal{F}_{\min} : [0, 4\pi] \ni w \mapsto \mathcal{F}_{\min}(w) \in \bar{\mathcal{M}}_{3, \Lambda, \eta, \sigma, 4\pi}$$

をパラメータ付けできる.

これから,

系 ([Sch], Corollary 4.14). 各 $0 \neq [\kappa/2] \in \Lambda^*/2\Lambda^*$ に対して,

$$\{\bar{\mathcal{F}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda, \eta, \sigma} \mid [\kappa/2] \in \mathcal{F}/\Lambda^* \subset \mathbb{C}^2/\Lambda^*\}$$

への第一積分の制限は, 唯一の最小解 $\mathcal{F}_{\min}(\kappa/2)$ が存在する. それらはすべて最小解は, σ -超楕円的であり, その幾何種数は 2 以下である.

この結果に基づいて, 第一積分が 8π 以下の一般 Willmore 汎関数のすべての極小解が分類され, その極小値は, $\mathcal{W}_{[\kappa/2]}$ ($\kappa \in (\Lambda^*/2\Lambda^*) \setminus \{0\}$) という値で与えられる. さらに, 一般 Willmore 汎関数の最小値が,

$$\min\{\mathcal{W}_{[\kappa/2]} \mid \kappa \in (\Lambda^*/2\Lambda^*) \setminus \{0\}\}$$

に等しいことがわかる.

トーラス面 $\mathbb{R}^2/\Lambda$ の共形構造 $\tau \in \mathcal{T}$ を変動させての一般 Willmore 汎関数の最小値を決定するための議論が, 詳細に行われる. 最終的に, Clifford トーラス面においてその最小値が取られていることが結論されている.

4 制限 Willmore トーラス面

定義. $\tau \in \mathcal{T}_1$ を固定する. 制限 Willmore 汎関数

$$\mathcal{W} : \text{CImm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) \ni F \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} H^2 dA \in \mathbb{R}$$

の臨界点となるようなはめ込み F を, 制限 Willmore トーラス面 (constrained Willmore torus) と呼ぶ.

系 ([Sch], Corollary 5.10). 制限 Willmore トーラス面はすべて有限型である.

さらに, 制限 Willmore 汎関数の最小解の存在が主張されている.

系 ([Sch], Corollary 5.11). 任意の $\tau \in \mathcal{T}_1$ に対して, 制限 Willmore 汎関数

$$\mathcal{W} : \text{CImm}(\mathbb{R}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) \ni F \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda} H^2 dA \in \mathbb{R}$$

は最小値をもち, 最小解は有限型である.

5 付記

トーラス面から 3 次元ユークリッド空間への共形はめ込み, ディラック方程式, 複素 Fermi 曲線のモジュライ空間と 3 種の対象のモジュライ空間とその間の対応を構成し, Willmore 汎関数を第一積分に結びつけ一般 Willmore 汎関数を定めその性質を議論するというこの理論は, まさに N. Hitchin の論文 [Hit] における, トーラス面から 3 次元標準球面への調和写像, Yang-Mills-Higgs 方程式の解のモジュライ空間, スペクトル曲線のモジュライ空間とそれらの間の対応, エネルギー汎関数公式を確立させた理論の無限次元版を想像させる. 議論や証明にいくつもの不明瞭さや不十分さを感じさせるが, このような理論を完成させることは, 確かに大変興味深く魅力的である.

複素 Fermi 曲線のモジュライ空間のコンパクト化, 特に無限種数のものも含めたコンパクト化の議論は充分なのか? 複素 Fermi 曲線の列の極限として得られる「一般複素 Fermi 曲線 (generalized complex Fermi curves)」は, どんな対象なのか? さらに, コンパクト化されたモジュライ空間上への Willmore 汎関数の拡張は正しいのか? また, コンパクト化の議論の際, 有限位相という非常に粗い位相に関する複素 Fermi 曲線の収束など議論されているが, 無限次元空間で使われて他の位相 (複素 $\ell_1(\Lambda^*)$ -多様体構造など) との関係は正しく適合しているのか?

このような点についても留意し、今後さらに検討を続けたい。

{ 共形はめ込み $\mathbb{R}^2/\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ }

$\uparrow$ Kenmotsu 型対応

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l} U \in C^\infty(\mathbb{R}^2/\Lambda)_{\mathbb{R}} \mid \exists \Psi \in \\ \text{Ker } D_U, \text{ 零点なし, (PC)} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)_{\mathbb{R}} \mid \exists \Psi \in \\ \text{Ker } D_U, \neq 0, \text{ (PC)} \\ \text{"Weierstraß ポテンシャル"} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} (V, W) \in (L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda))^2 \mid \\ \text{Ker } D_{V,W} \cap (W^{1,p}(\mathbb{R}^2/\Lambda))^2 \neq \emptyset \\ (1 < p < 2) \end{array} \right\} \\
 \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{Weierstraß 曲線 (=SC) を} \\ \text{みたく複雑素 Fermi 曲線) } \end{array} \right\} \subset \{ \text{複雑素 Fermi 曲線} \} \ni \mathcal{F}(V, W) \\
 \cap \qquad \qquad \qquad \cap \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{一般 Weierstraß 曲線 (=WSC) を} \\ \text{みたく一般複雑素 Fermi 曲線) } \end{array} \right\} \subset \{ \text{一般複雑素 Fermi 曲線} \} \\
 \cup \\
 \mathcal{F}(Y, \infty^-, \infty^+, k) \in \left\{ \begin{array}{l} \text{抽象複雑素 Fermi 曲線 (=有限種数の} \\ \text{一般複雑素 Fermi 曲線) } \end{array} \right\}
 \end{array}$$

参考文献

- [AT] 安藤直也, 谷口哲也: Willmore 予想およびその書き換え $\sim E^3$ にはめこまれたトーラス上の Dirac 作用素およびその複素 Fermi 曲線 $\sim$, 本講究録所収
- [F-K-T] J. Feldman, H. Knörrer, E. Trubowitz: Riemann surfaces of infinite genus. I-IV. ETH Zürich preprints (1993). a book, CRM Monograph Series 20 American Math. Soc. (2003)
- [Hit] N. Hitchin: Harmonic maps from 2-torus into the 3-sphere. J. Diff. Geom. 31 (1990), 627-710
- [Gri-Sch] P. Grinevich and M. U. Schmidt: Conformal invariant functionals of immersions of tori into $\mathbb{R}^3$. J. Geom. Phys. 26 (1998), 51-78.
- [Sch1] M. U. Schmidt: Integrable systems and Riemann surfaces of infinite genus. Memoirs of the American Math. Soc. 581 (1996).
- [Sch] M. U. Schmidt: A proof of the Willmore conjecture. math.DG/0203224.
215 ページ.
- [Ta] Iskander A. Taimanov: Two-dimensional Dirac operator and surface theory. math.DG/0512543
背景をたどるのに便利. [Sch] についてのコメントもある.

Y. Ohnita : Department of Mathematics, Osaka City University, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, JAPAN

e-mail : ohnita@sci.osaka-cu.ac.jp

T. Otofuji : College of Engineering, Nihon University, Koriyama, Fukushima, 963-8642 JAPAN

e-mail : otofuji@ge.ce.nihon-u.ac.jp

S. Udagawa : Department of Mathematics, School of Medicine, Nihon University, Itabashi, Tokyo 173-0032, JAPAN

e-mail : sudagawa@med.nihon-u.ac.jp