

G -多様体の K_G^* 群の 計算方法について

京大・理 松本 堯生

§0. 序

コンパクト・リ-群 G を 1 つ固定する。 G -多様体とは C^∞ -多様体であって, C^∞ な G の作用を 1 つ固定したものをいう。 ここでは G の閉部分群 H を H で表わすことにし, 例えば x での固定群 $\{g \in G; g \cdot x = x\}$ を H_x と書くことにする。

以下 §1, §2 で G -多様体は「よい」 G -CW複体構造をもつことを示し, そのフィルター付けから作られる Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列の E_2 -項の計算の仕方を示す。 §4 では §3 での G -ホモトピーの元を消す方法を用いてもう一つのスペクトル系列を作り, それが G -CW複体上では E_2 -項以上は Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列と一致することを示す。 §5 では以上の応用として G -多様体の軌跡空間の次元が 4 次元以下ならば, E_2 -項 =

E_∞ -項 であり、従って K_G^* 群加群として拡大の仕方を除いて定まることを示す。 §6 では Hirzebruch-Mayer の $O(n)$ -多様体, Jänich の結び系 $O(n)$ -多様体について計算例を示す。

§1. G -多様体の G -CW 分割.

G -多様体の軌跡空間は C.T. Yang の定理により単体分割をもつ、しかもそれは軌跡空間と軌跡型によって分割しその各々を単体分割したものを適当に合せて構成するのと同じに任意の単体の内部は同一の軌跡型に属しているといえる。この単体分割を単体毎に切片をとって G -多様体上に引き上げてやろうというのであるが、そのとき各単体の切片による像の内部（正確には単体の内部の切片による像）では軌跡型だけでなく固定群そのものが同一であるようにしたいのである。ところが実際に一度重心細分をとるとその各単体上には上の条件を満たす切片がとれること加次の Palais の補題を用いることにより証明される。証明は比較的長いので松論文[5]にゆずる。

補題 (Palais) 局所コンパクト、ハウスドルフ、可算な G -空間 X の軌跡空間が、ある G -空間の軌跡空間と Z とするとき $Z \times I$ に各点の軌跡型も込めて位相同型であるならば

実は $X \xrightarrow{G\text{-homeo.}} Y \times I$ なる G -空間 Y が存在する。
 $\searrow \quad \swarrow$
 $Z \times I$

上で得た切片の像を胞体とすることにより G -多様体は次の意味で G -CW複体となる。

定義 X をハウスドルフ G -空間, K を(南)胞体の集まり $\{e_\lambda \subset X; \lambda \in \Lambda\}$ とする。 (X, K) が次の条件 (a)-(f) と $(G-C), (G-W)$ を満たすとき G -CW複体という。

(a) $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ ($e_\lambda \cap e_{\lambda'} = \emptyset$ for $\lambda \neq \lambda'$)

(b) 各胞体は連続な特性写像 $\sigma_\lambda: \Delta_\lambda^n \rightarrow \overline{e_\lambda} \subset X$ であって,

(b1) $\sigma_\lambda|(\Delta_\lambda - \partial\Delta_\lambda)$ は e_λ の上への位相同型

(b2) $\sigma_\lambda(\partial\Delta_\lambda^n) \subset X^{n-1} = \bigcup_{\dim e_\lambda \leq n-1} e_\lambda$

(c) X/G がハウスドルフ空間

(d) $e \in K \Rightarrow ge \in K$ for $\forall g \in G$

(e) e の各点の固定群は同一, それを H_e と記す,

(f) $g \notin H_e \Rightarrow ge \cap e = \emptyset$

(G-C) (a)-(f) から X/G にも胞複体の構造を与えられるか, それが閉包有限

(G-W) X は 閉被覆 $\{Ge = \overline{Ge}; e \in K\}$ に

関して弱位相をもつ

§2. Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列

X を G -CW複体とすると, そのフィルタ-付け

$$X = X^\infty \supset \cdots \supset X^n \supset X^{n-1} \supset \cdots \supset X^1 \supset X^0 \supset X^{-1} = \phi$$

から, $H(p, q) = \sum K_G^n(X^{q-1}, X^{p-1})$ とおくことにし

$$E_\infty^{p, q} = G_p K_G^{p+q}(X) = K_{G, p}^{p+q}(X) / K_{G, p+1}^{p+q}(X)$$

$$K_{G, p}^n(X) = \text{Ker} (K_G^n(X) \rightarrow K_G^n(X^{p-1}))$$

なるスペクトル系列を得る。(cf. Cartan-Eilenberg [2] p.334)

その E_1 -項は $E_1^{p, q} = K_G^{p+q}(X^p, X^{p-1})$ であるから

G -CW複体の G -ホモトピー-拡張性質から $E_1^{p, q} \cong$

$$\sum_{\substack{e \in K/G \\ \dim e = p}} K_G^q(G/H_e) \quad \text{となる。但し } e = z \text{ なら } e \in K/G$$

とは胞体の G -軌跡の中から1つずつ

代表元となるべき胞体をとることとする。

また1次微分 d_1 であるが, 一般の G -CW複体では面倒なので以下 X を軌跡空間に単体分割を誘導するような G -CW複体とする。このとき軌跡空間の各胞体の特性写像は位相同型なので X の G -CW複体構造は軌跡空間の単体分割を §1 のように像の内部では同一の固定群をもつような切片(これを 'よい' 切片と呼ぼう)によつて持ち上げたものと考えられる。更に X が局所コンパクト・ハウスドルフ, かつ可算であると仮定すると, 単体上の 'よい' 切片としてその単体の内部の像で同一の固定群をもつばかりでなく, 境界上

の各単作の上に制限してもその単作の内部の像は固定群が同一であるようなものかといえる。このように G -CW複作構造をとり変えると幾何的境界作用素が d_1 と一致する。

より2 'よい' 切片のとり方によって上の同型がどのように変わるかを調べれば d_1 を幾何的に定めることができる。

実際同一の単作上で2つの 'よい' 切片の像の内部が空でない交わりをもてば全く同じ同型を与えることが容易に証明されるので、

$E_2^{p,q}$ の元を上の同型で p -胞作 e に $K_G^q(G/He)$ の元を対応させる G -同変な函数 φ ($K_G^q(g)\varphi(e) = \varphi(ge)$, $g: G/gHg^{-1} \rightarrow aHg^{-1} \mapsto aH \in G/H$) と同一視すると、(e の境界の G -CW複作構造を上のようにとり直した表記)

$$(d_1 \varphi)(e) = \sum_{\substack{\sigma \in K/G \\ \dim \sigma = n-1 \\ \sigma \subset \partial e}} \sum_{g \in G/He} [e, g\sigma] K_G^q(\pi) K_G^q(g) \varphi(\sigma)$$

$\pi: G/He \rightarrow G/Hg\sigma$, と書ける。この意味で E_2 -項を各胞作毎に異なる係数群 $K_G^q(G/He)$ をもつ

G -同変な鎖の d_1 によるコホモロジ-群と考えることができる。これは $E_2^{p,q} = H_G^p(X, K_G^q)$ と書いて表わすことにする。(注) 上の $(d_1 \varphi)(e)$ における和は有限和

であることが証明でき、意味をもつ。

§3. G -ホモトピーを消すこと

X を G -空間とする。 H を G の部分群とすると、 H によって定まる部分空間 $X^H = \{x \in X; hx = x \text{ for } \forall h \in H\}$ の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(X^H)$ の元 a が「原始的でない」とは H を真部分群として含む G の部分群 H' と $\pi_n(X^{H'})$ の元 a' が存在して $i_* a' = a$ となることであると定義する。ここで $i: X^{H'} \hookrightarrow X^H$ である。又、このような元 a' が存在しないとき a を原始的であると定義する。
 $a \in \pi_n(X^H)$ が原始的であるとは、 $\underbrace{gag^{-1}}_{\text{それと共役な元}} \in \pi_n(X^{gHg^{-1}})$ も原始的であるから次のような集合 Λ を考えることができる。

$$\Lambda = \bigcup_H (\pi_n(X^H) \text{ の原始的な元}) / \sim$$

但し、 $\pi_n(X^H) \ni a \sim gag^{-1} \in \pi_n(X^{gHg^{-1}})$

$a \in \pi_n(X^H)$ の原始的な元とする。その1つの代表元を $\sigma: \partial \Delta^{n+1} \rightarrow X^H$ とすれば、 G -同変化して G -同変な特性写像 $G\sigma: G/H \times \partial \Delta^{n+1} \rightarrow X$ を得る。これにより $H\sigma = H$ なるように G -胞体をくっつける。この操作により a と共役な元全てを同時に消したことになる。この操作を Λ の全ての元に対して行い、でき上がった G -空間を $\tilde{X}$ とおく。 a を消すことは同時に $i_* a$ という形の G -ホモトピーの元全てを同時に消すことにも

なっているが、 $\wedge$ の全2元を消すことは G -ホモトピー
の元全2元を消すことになつてゐる。つまり $X \hookrightarrow \tilde{X}$ の誘導
写像 $\pi_n(X^H) \rightarrow \pi_n(\tilde{X}^H)$ は任意の部分群 H に対し
同化写像である。

一方 $(\tilde{X}, X)$ が $(n+1)$ 次元の G -胞体ばかりから
なる相対 G -CW複体であることに注意すれば

$\pi_k(\tilde{X}^H, X^H) = 0$ for $k \leq n, \forall H \subset G$
を得る。(これは初等的にも証明できるが、 G -胞体近似
定理 [6] を $G/H \times S^k \rightarrow \tilde{X}/X$ に適用すれば明らか)

従つてホモトピー群の完全系列から任意の部分群 H に対し

$\pi_k(X^H) \rightarrow \pi_k(\tilde{X}^H) = \begin{cases} \text{iso.} & \text{for } k < n \\ \text{onto} & \text{for } k = n \end{cases}$
上の結果と合わせると、

$$\pi_k(\tilde{X}^H) \cong \begin{cases} \pi_k(X^H) & \text{for } k < n \\ 0 & \text{for } k = n \end{cases}$$

を得る。これにより $\tilde{X} \in X$ の n 次元 G -ホモトピー群を
消して得た G -空間であるといふことが出来る。

X の $(p+1)$ 次元以上の G -ホモトピー群を次々と消した
 G -空間を $X(0, p)$ とかく。 G -空間の圏でも写像
トランプを作ることにより Hurwicz の fibering が出来る。
 $X(0, q) \rightarrow X(0, p-1)$ ($p \leq q$) の写像トランプを

52

$X(p, q)$ とおくと, X が G -不変な基底をもつと仮定すれば, 道の空間 E とするににより G -空間の完全系列

$$\cdots \rightarrow \Omega X(r, t) \rightarrow \Omega X(r, s) \xrightarrow{\delta} X(s+1, t) \rightarrow X(r, t) \rightarrow X(r, s)$$

但し $r \leq s < t$, を得る。とくにこれから

$$\pi_k(X(p, q)^H) \cong \begin{cases} \pi_k(X^H) & \text{for } p \leq k \leq q \\ 0 & \text{上以外} \end{cases}$$

は直ちに従う。

§ 4. もう一つのスペクトル系列

[5] により $K_G(X) = [X, \mathbb{F}]_G$ ($[\cdot, \cdot]_G$ は G -写像の G -ホモトピー類のなす集合を表わす) と K_G 群を表現する G -空間 $\mathbb{F}$ が存在するから, Ω -スペクトラム

$$Y = \{ Y_q, h_q: Y_q \xrightarrow{\cong} \Omega Y_{q+1} \}$$

$$Y_q = \begin{cases} (\mathbb{F}, 1) & h_q = \begin{cases} \mathbb{F} \xrightarrow{\cong} \Omega^2 \mathbb{F} & \text{Bott 周期写像 } q \text{ 偶数} \\ \Omega \mathbb{F} \xrightarrow{\cong} \Omega \mathbb{F} & \text{恒等写像 } q \text{ 奇数} \end{cases} \\ \Omega(\mathbb{F}, 1) \end{cases}$$

$$\text{そこで, } \bar{H}(p, q) = \sum_n [X, Y_n(p+1, q-1)]_G$$

$$\text{とおくことにする。 } E_{\infty}^{p, q} = {}_p G K_G^{p+q}(X)$$

$$= {}_p K_G^{p+q}(X) / {}_{p+1} K_G^{p+q}(X), \quad {}_p K_G^n(X) = \text{Ker}$$

$$K_G^n(X) \rightarrow [X, Y_n(0, p-1)]_G \text{) なるスペクトル系列を}$$

得る。

Maunder [7] のように exact couple に基づく構成に書き直し

とやると同型 $\phi_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow \bar{E}_r^{p,q}$ ($r \geq 2$) の存在が証明される。 E_2 -項の同型が直接次の可換図で証明される。ことに注意すれば他は [7] の方法と全く同様である。

$$\begin{array}{ccccc}
 & K_G^{p+q-1}(X^{p-1}) & & K_G^{p+q}(X^{p+1}) & \\
 & \nearrow \delta & \xrightarrow{\text{exact}} & \searrow \delta & \\
 K_G^{p+q-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) & \xrightarrow{2} & K_G^{p+q}(X^p, X^{p-1}) & \xrightarrow{2} & K_G^{p+q+1}(X^{p+1}, X^p) \\
 & \parallel & & & \\
 & [X^p/X^{p-1}, Y_{p+q}(p)]_G & & & \\
 j \downarrow \text{onto} & \nearrow 2 & \xrightarrow{\text{exact}} & \searrow j \downarrow \text{onto} & \xrightarrow{\text{exact}} \\
 [X^{p-1}, Y_{p+q-1}(p-1)]_G & \xrightarrow{2} & [X^p, Y_{p+q}(p)]_G & & \\
 & \nearrow & \nwarrow & & \\
 & [X^{p+1}, Y_{p+q}(p)]_G & \xrightarrow{\text{inj.}} & [X, Y_{p+q}(p)]_G & \\
 & \parallel & & & \\
 & [X, Y_{p+q}(p)]_G & & & \\
 E_2^{p,q} = \text{Ker } \delta \circ h / \text{Im } \delta \circ h & \xrightarrow[\text{iso.}]{j} & [X, Y_{p+q}(p)]_G & = & \bar{E}_2^{p,q}
 \end{array}$$

(Id. $Y_{p+q}(p) = Y_{p+q}(p, p)$)

又、スペクトル系列 $\bar{E}_r$ の微分 $d_r : \bar{E}_r^{p,q} \rightarrow \bar{E}_r^{p+r, q-r+1}$ は $\delta = \delta \circ h_{p,q} : Y_{p,q}(p, p+r-2) \xrightarrow{h_{p,q}} \Omega Y_{p,q+1}(p+1, p+r-1) \xrightarrow{\delta} Y_{p,q+1}(p+r, p+r)$ の G -ホモトピー-類 $[\delta] \in [Y_{p,q}(p, p+r-2), Y_{p,q+1}(p+r, p+r)]_G$ の与える 'コホモロジー-作用素' から誘導されることも分る。

§5. まとめ

§2 で G -多様体 X の §1 で与えた G -(CW複体構造) に対し Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列の E_2 -項が $E_2^{p,q} = H_G^p(X, K_G^q)$ と表わせることを示したか、
 $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, $K_G^q(G/H) = 0$ for q odd

に注意すると偶数次の微分は零化写像であることが分る。

とくに $\dim X/G \leq 2$ と仮定すると $H_G^p(X; K_G^q) = 0$ for $p \geq 3$ であるから $d_r = 0$ ($r \geq 3$), 上と合わせると全2の微分が零化写像で $E_2 = E_\infty$ 。

更に §4 を応用すると次の定理が導かれる。

定理 $\dim X/G \leq 4$ ならば $d_r = 0$ ($r \geq 2$)

実際 d_3 だけを調べればよいのであるが、§4の結果と Y_q が奇数次又は偶数次のみ G -ホモトピー群をもつことから

$$d_3 = \bar{d}_3 = [\delta] \in [Y_{p+q}(p, p+1), Y_{p+q+1}(p+3)]_G$$

q は偶数と12よりから $Y_{p+q}(p, p+1) = Y_{p+q}(p)$ であり、

$$H_G^p(X, K_G^q) = [X, Y_{p+q}(p)]_G = [X, Y_{p+q}(p, p+1)]_G$$

の元を $[f]$, $f: X \rightarrow Y_{p+q}(p, p+1)$, とおけば

$$d_3[f] = [\delta \circ f] \in H_G^{p+3}(X; K_G^{q-2}) = [X, Y_{p+q+1}(p+3)]_G$$

である。 $\varphi = \delta \circ f$ とおき、 $\varphi_*^H: \pi_n(X^H) \rightarrow \pi_n(Y_{p+q+1}(p+3)^H)$ を考える。 $Y_{p+q+1}(p+3)^H = Y_{p+q+1}^H(p+3)$ と Y^H が $K(\cdot) \otimes K_G(\mathcal{G}_H)$

の表現スペクトラムであることに注意すると、 $\varphi^H = \delta^H \circ f^H$ は

$$f^H: X^H \rightarrow Y_{p+q}(p, p+1)^H = Y_{p+q}^H(p, p+1) \text{ に } K(\cdot) \otimes K_G(\mathcal{G}_H)$$

の Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の d_3 をほどこしたものである。

== 2 は $d_3 = Sq^3 \otimes \text{id}_{K_G(\mathcal{G}_H)}$ であることから、

$p = 0, 1, 2$ のとき $\varphi^H \simeq 0$ 従って $\varphi_*^H = 0$ を得る。

== 3 は全2の閉部分群 H と全ての n に対して成り立ち、 X が

G -CW複体であることにより $\varphi \simeq_G 0$ 従って $[\varphi] = 0$
 $\in H_G^{p+3}(X, K_G^{q-2})$ for $p = 0, 1, 2$ を得る。つまり
 d_3 は H_G^0, H_G^1, H_G^2 上 零化写像, 従って, 2 定理の
 条件の下には $d_3 = 0$. q.e.d.

(注.) $M_Q \in S'$ を 1 と見て $\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots, \frac{1}{p^q}, \dots$ を加えて

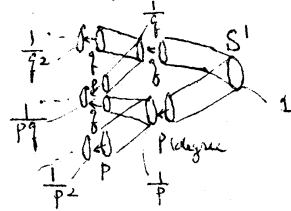
すなわち $\pi_1(M_Q) \cong \mathbb{Q}$ なる空間とする。

すると $K_G^*(X) \otimes \mathbb{Q} = [X, Y^* \wedge M_Q]$

となり上と同様の議論から Y の G -同変な

意味での k -不変量は全 2 零である。従って $Y \rightarrow Y \wedge M_Q$

は G -同変な Chern 指標 $K_G(X) \xrightarrow{\text{ch}_G} H_G^*(X, K_G^* \otimes \mathbb{Q})$
 を定める。



§ 6. 計算例

(1) Hirzebruch-Mayer の $O(n)$ -多様体 $W^{2n-1}(\alpha)$ [3]

あるいは具体的に G -CW 分割を与えて計算する方法を示した

から, ここでは軌跡空間の単体分割を用いて容易に計算する

方法を示そう。 $W^{2n-1}(\alpha)$ の軌跡空間は 2 次元円板 D^2 である

か $SO(n)$ による軌跡空間は境界をとり合した球面 S^2

になる。このようにするとき境界作用素は変なことを加行

うな K_G^* の軌跡空間とその軌跡型のみから $K_G^*(W^{2n-1}(\alpha))$ が

56

計算できる。しかも細かく単行分割したと12もコホモロジー

の計算が果たぬようにまとめ直すと



$$H_0 = O(n-2)$$

と12より。

$$H_0 = H_1 = O(n-1)$$

$$\text{従って } C_G^0 = R(O(n-1))$$

$$H_G^0 \cong R(O(n-1))$$

$$C_G^1 = R(O(n-1))$$

$$H_G^1 \cong \text{Ker}(R(O(n-1)) \rightarrow R(O(n-2)))$$

$$C_G^2 = R(O(n-2))$$

$$H_G^2 \cong \text{Coker}(R(O(n-1)) \rightarrow R(O(n-2))) = 0$$

($R(O(n-1)) \rightarrow R(O(n-2))$ が onto であることは $R(SO(k))$ の構造

と $O(k)$ の既約表現がよく分っているから $R(O(k))$ の構造を明ら

かに書き上げるとすぐできる。方法は違つか南氏の講演

を参照されたい)

$$\text{よって } K_{O(n)}^0(W^{2n-1}(\alpha)) \cong R(O(n-1)),$$

$$K_{O(n)}^1(W^{2n-1}(\alpha)) \cong \text{Ker}(R(O(n-1)) \rightarrow R(O(n-2)))$$

但し $R(G)$ は G の複素表現の作る Grothendieck 群を示す。

(2) Jänich の結び系 $O(n)$ -多様体 [4]

$S^1 \subset S^3$ の結び系と $D^4 \supset S^3 = \partial D^4 \supset S^1$ の差の各々が

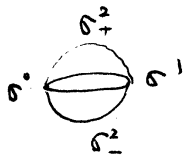
$O(n-3)$, $(O(n-2))$, $(O(n-1))$ の軌跡型ともつよな軌跡空間

をもつ $O(n)$ -多様体が1:1に対応する。この $O(n)$ -多様体

の $K_{O(n)}$ 群は結び系 S^1 と部分複体とあるよる S^3

の CW 分割をとればよと同様にして計算できる。自明な

結び系の場合には次のようになる。



S^2 中 $\Sigma \sigma^3_+$, $\Sigma \sigma^3_-$ $\in \Sigma S^3$ の CW 分解 | Σ する。
 Σ して σ^4 Σ 加え Σ , D^4 の求める CW 分解を得る。

$$H_{\sigma^0} = H_{\sigma^1} = 0(n-1), \quad H_{\sigma^2_+} = H_{\sigma^2_-} = H_{\sigma^3_+} = H_{\sigma^3_-} = 0(n-2), \quad H_{\sigma^4} = 0(n-3)$$

$$C^0_G = R(0(n-1))$$

$$H^0_G \cong R(0(n-1))$$

$$C^1_G = R(0(n-1))$$

$$H^1_G \cong \text{Ker}(R(0(n-1)) \rightarrow R(0(n-2)))$$

$$C^2_G = R(0(n-2)) \oplus R(0(n-2))$$

$$H^2_G = 0$$

$$C^3_G = R(0(n-2)) \oplus R(0(n-2))$$

$$H^3_G \cong \text{Ker}(R(0(n-2)) \rightarrow R(0(n-3)))$$

$$C^4_G = R(0(n-3))$$

$$H^4_G = 0$$

$$\text{従, } \Sigma \quad K^0_{0(n)} \cong R(0(n-1)),$$

$$0 \rightarrow \text{Ker}(R(0(n-2)) \rightarrow R(0(n-3))) \rightarrow K^1_{0(n)} \rightarrow \text{Ker}(R(0(n-1)) \rightarrow R(0(n-2))) \rightarrow 0$$

References

- [1] M. Atiyah and F. Hirzebruch : Vector bundles and homogeneous spaces,
Proc. Sympos. Pure Math., 3(1961), 7-38.
- [2] H. Cartan and S. Eilenberg : Homological algebra, Princeton Univ.
Press, 1956.
- [3] F. Hirzebruch and K. Mayer : $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten, exotische
Sphären und Singularitäten, Lecture Notes in Math., No.57,
Springer, 1968.
- [4] K. Jänich : Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand als Orbit-
räume differenzierbarer G -Mannigfaltigkeiten ohne Rand,
Topology 5(1966), 301-320.
- [5] T. Matumoto : Equivariant K -theory and Fredholm operators,
(to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo)
- [6] T. Matumoto : On G -CW complexes and a theorem of J. H. C. Whitehead,
(ibid.)
- [7] C. Maunder : The spectral sequence of an extraordinary cohomology
theory, Proc. Camb. Phil. Soc., 59(1963), 567-574.