

クエット乱流における粒子輸送

京大工 渡部 威 (Takeshi Watanabe)

京大工 木田 重雄 (Shigeo Kida)

1 はじめに

激しい変動による流れのかき混ぜ — 強混合性 — は乱流のきわだった特徴のひとつである。たとえば、ジェットエンジンでは、乱流が燃料と酸素の混合率を高め燃焼効果に大きな役割を担っている。また河川や海では、乱流によって水がかき混ぜられることにより大気中の新鮮な空気を取り込んでいる。乱流に伴う混合現象を理解することは工学や環境などの問題にも大変重要であるが、一般に混合の定量化は簡単ではない。混合の定量化の手法のひとつに、流れに受動的に移流される仮想的な線や面の伸びや変形を調べる方法がある [1]。本研究では、クエット乱流に対し、パッシブな線分と正三角形、正四面体の変形を調べることによって混合効率の定量化を考察するとともに、混合と流れ構造との関係を探る。

2 クエット乱流を表す周期運動

一般に、乱流は流体の不規則な運動で再現性がなく、さまざまな力学特性や統計的性質の解析は容易ではない。ここでは最近発見された、クエット乱流の特性をよく表す不安定周期運動 [2] を採用する。この周期運動はクエット乱流の流れ方向渦と低速ストリークの再生成サイクルを極めて忠実に再現し、いわば、乱流の基本的な時空間構造—乱流の骨格—と考えられる。周期運動は乱流とは違い、何度も同じ状態が再現されるので、流れによる物質混合や拡散の係数などさまざまな統計量を精度よく計算できる利点をもつ。

3 直接数値計算

互いに反対方向に一定の速さ U で運動する 2 つの平行平板間の流れを考える。支配方程式は非圧縮性流体に対する連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

と Navier-Stokes 方程式、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$

である。ここで $\mathbf{v}$, P , ρ はそれぞれ速度、圧力、密度で、 ν は動粘性係数を表す。これらの方程式を図 1 に示す直方体領域で数値的にスペクトル法で解く。平板の運動方向に x 軸、

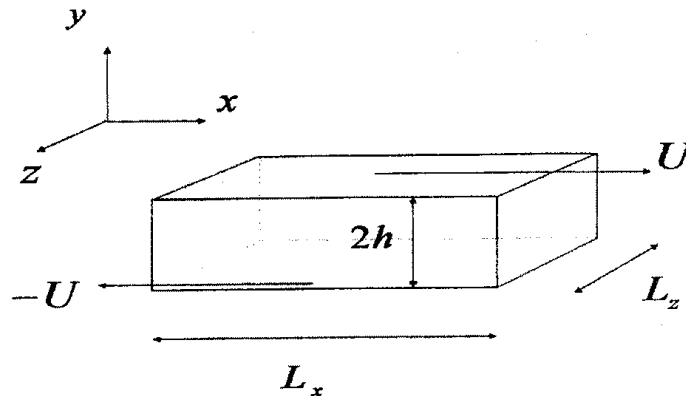


図 1: 平面クエット乱流の計算領域。

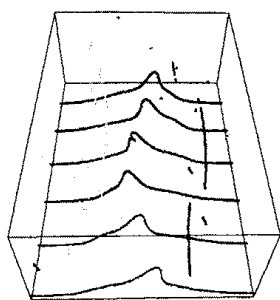
平板に垂直に y 軸、そしてこれらに垂直に z 軸をとる。平板間距離を $2h$ とし、流れは x 軸方向に周期 $L_x (= 5.6h)$ 、 z 軸方向に周期 $L_z (= 3.8h)$ とする。速度場を x 軸方向と z 軸方向にはフーリエ級数に、 y 軸方向にはチェビシェフ多項式で展開し、展開係数の時間発展を 2 次精度のアダムス・バッシュホース法とクランク・ニコルソン法を組み合わせで計算する。計算領域の x, y, z 方向にそれぞれ 16, 17, 16 の格子点を取り、レイノルズ数 $Re = Uh/\nu$ を 400 に設定する。不安定周期運動は、流体運動の自由度で張られる状態空間におけるポアンカレ断面上のポアンカレ写像の不動点で表される。この不動点をニュートン・ラプソン法を用いて求める。今回の周期運動の時間周期は $T = 68.5h/U$ である。

4 不安定周期運動の秩序構造

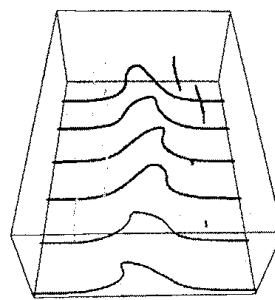
ここで得られた不安定周期運動には、

- (i) 平面 $z=0$ に対する反転と x 方向への半周期並進、
- (ii) 直線 $x=y=0$ まわりの 180° 回転と z 方向への半周期並進

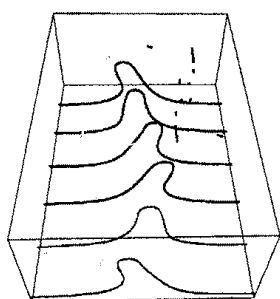
の 2 つの空間対称性があり、4 つの定常淀み点が存在する。各々の淀み点の位置は $(L_x/4, 0, L_z/4)$, $(3L_x/4, 0, L_z/4)$, $(L_x/4, 0, 3L_z/4)$, $(3L_x/4, 0, 3L_z/4)$ である。不安定周期運動の渦構造を可視化するために直接数値計算によって得られる流れ場に対して低圧力渦を同定する。低圧力渦は、圧力ヘシアン の第 3 固有ベクトルに垂直な 2 次元面内での圧力の極小線を結ぶ線を軸とし、かつそのまわりで旋回条件を満たすものである [3] [4]。図 2 は不安定周期運動の秩序構造 (低圧力渦と低速ストリーク) の時間変動を一周期にわたって表したものである。黒色と灰色の線は低圧力渦の軸で、黒色は時計回りの回転、灰色は反時計回りの回転を示す。また、下の板に沿い中央で盛りあがった多数の横向きの曲線は任意の x の位置での速度の x 成分の等値線 $u = -0.3U$ で、盛りあがった部分は低速ストリークを表す。この流れの主役は、これらの流れ方向渦と低速ストリークで、両者は互いに影響



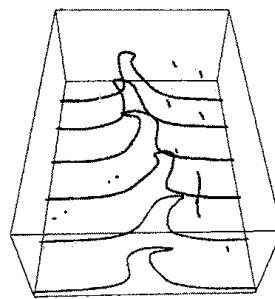
(a)



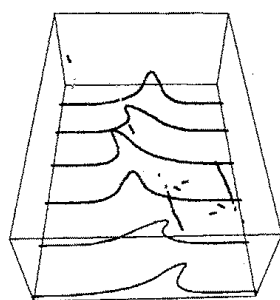
(b)



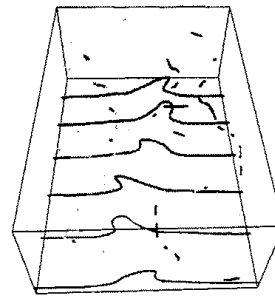
(c)



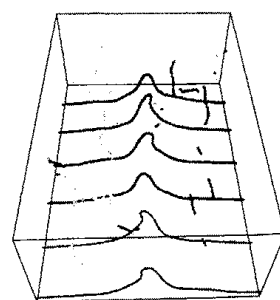
(d)



(e)



(f)



(g)

図 2: 平面クエット系の周期運動の秩序構造の再生成サイクル。

しあいながら生成消滅を繰り返す。流れ方向渦は (g), (a) でもっとも強く、(b), (c), (d) と徐々に減衰する。一方、低速ストリークは (g), (a) ではおとなしく (c) 以降では、 x 方向に波打ち、その振幅が y, z 方向にも増大しているのがわかる。平面クエット乱流における秩序構造の再生成サイクルをまとめると次のようになる。

- (1): (b)-(c) では強くなり過ぎて不安定になった流れ方向渦が崩壊し、勢いを落とす。その弱くなった流れ方向渦により整った低速ストリークが生成される。
- (2): (d)-(e) では流れ方向渦はさらに減衰するが、低速ストリークは自身の不安定性により波打ち、変形の振幅を次第に増す。
- (3): (f)-(a) では低速ストリークの変形により流れが3次元し、流れ方向渦が成長する。

5 混合の定量化

パッシブ物質の混合の度合いは、流れ構造ばかりではなく対象とする物質の大きさや向きにも依存して異なる。ここでは流体部分の変形の度合を計算する簡便な方法を提案する。まず計算領域において x, y, z 各方向に $0.3h$ 間隔で一様にパッシブな粒子を配置 (これらの粒子を特に基準粒子とよぶ) し、各基準粒子が中点になるように 100 本の線分、正三角形および正四面体をそれらの方向をランダムにして配置する。このとき、線分、正三角形および正四面体の各頂点と基準粒子の間の距離は全て共通で、 $0.01h$ とする。そして、ある時間 Δt ($= 0.1T$) だけ時間積分し、基準粒子ごとに線分の伸長率、正三角形の面積変化率および正四面体の体積変化率の平均と標準偏差を求める。これらの平均と標準偏差を求めたら、新たに各基準粒子が中心になるように 100 本の線分、正三角形および正四面体を考え (長さも初期の値に戻す)、再び同じ Δt だけ時間積分させ平均と標準偏差を求める。同様の作業を 10 周期分繰り返す。このようにして得られた標準偏差で流体部分の変形の度合いを見積もる。

6 計算結果

各基準粒子に付随する 100 個の正四面体の体積変化率の平均をさらに基準粒子全体で平均したもの、すなわちすべての正四面体の体積変化率の平均の時間変化を図 3 に示す。これは 10 周期にわたる時系列のデータであるが、時間周期性を考慮して 1 周期の間に 10 本の線を描いている。図 4 は各基準粒子に付随する 100 個の正四面体の体積変化率の標準偏差を基準粒子全体で平均したものである。図 3 と図 4 から $t = 0.7 - 0.8T$ のときに体積変化率の標準偏差が大きく、他の時刻と比べると流れ場が乱れていると考えられる。

図 5 は $t = 0.7 - 0.8T$ において各基準粒子に付随する正四面体の体積変化率の標準偏差 (縦軸) が、ある閾値 ($= 2$) より大きな基準粒子と同基準粒子に付随する正三角形の面積変化率の標準偏差 (横軸) の相関である。正四面体の標準偏差が大きい基準粒子は正三角形の標準偏差も大きいことがわかる。図 6 は図 5 で得られた基準粒子の正四面体の体積変化率の標準偏差と線分の平均伸長率の相関である。この図より正四面体の体積変化率の標準偏差が大きい基準粒子、すなわち流れ場が乱れているところでは線分の伸長率も大きいこと

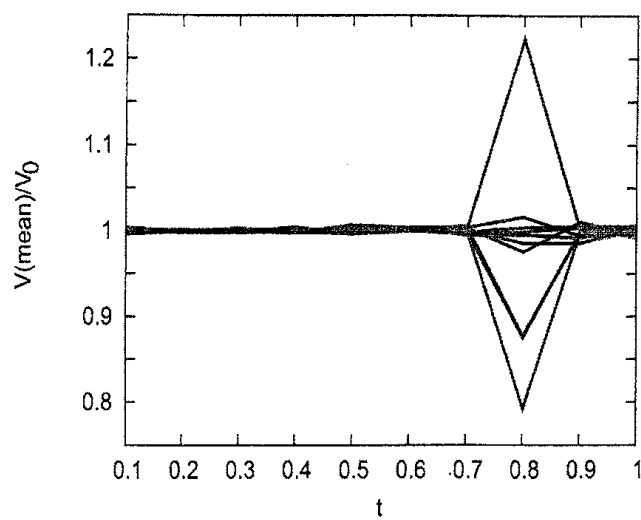


図 3: 正四面体の平均体積変化率の時間発展。 V_0 は初期の正四面体の体積を表す。

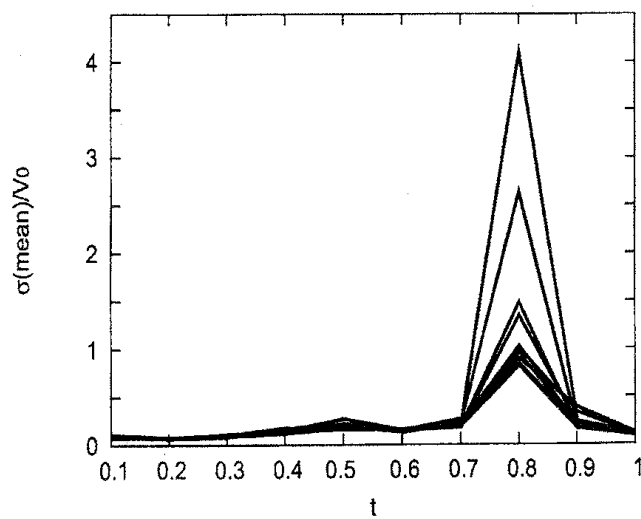


図 4: 正四面体の体積変化率の標準偏差の時間発展。

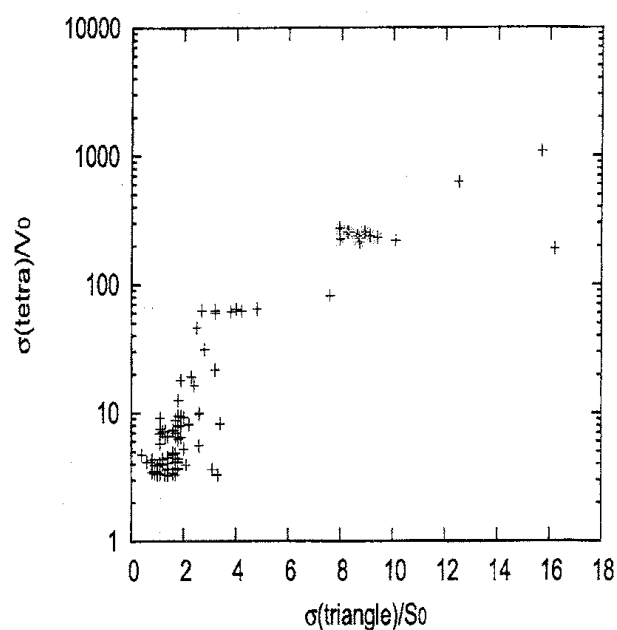


図 5: 各基準粒子に付随する正四面体の体積変化率の標準偏差と正三角形の面積変化率の標準偏差の相関。 S_0 は初期の正三角形の面積を表す。 $t = 0.7 - 0.8T$ 。

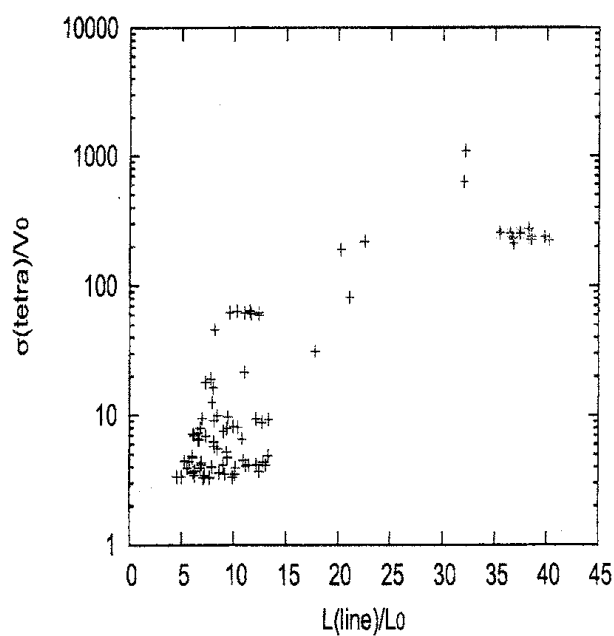


図 6: 各基準粒子に付随する正四面体の体積変化率の標準偏差と線分の伸長率の平均の相関。 L_0 は初期の線分の長さを表す。 $t = 0.7 - 0.8T$ 。

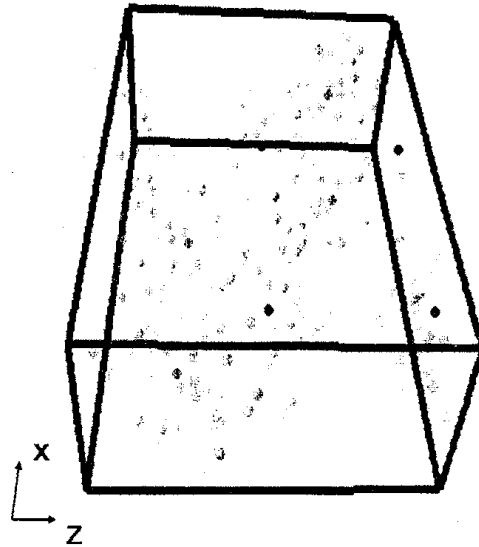


図 7: 混合が盛んな領域を基準粒子の位置で示す。濃い丸ほどその強度が強い。 $t = 0.7 - 0.8T$ 。

がわかる。このことから、混合の定量化の一つ指標として線分の伸長率を調べることは有意義であると結論づけられる。

7 伸長率と乱流構造

図 4 において体積変化率の標準偏差が大きくなる時間帯 ($t = 0.7 - 0.8T$) の流れ場の構造について考察する。図 7 は図 6 で示した基準粒子の位置で、濃い丸ほど混合強度が強い。

図 7 では混合が強い場所は空間一様に分布しているように思われるかもしれないが、見る角度を変えると図 8 のようにある特定の領域 (曲面上) に分布しているのがわかる。図 9 は $T/4$ ごとの (x, z) 平面 ($y=0$) での速度場と 4 つの淀み点を表している。この図の $t = 0.75T$ の速度場では、4 つの淀み点のうち右上と左下の淀み点付近で流れが強く収束・発散し、典型的な双曲型淀み点になっている。図 8 で見たような線分伸張率の大きくなる領域が特定の曲面上に分布しているのは、これら淀み点付近の流れ場が強い歪み場を形成することによると思われる。なお図 9 では 4 つの時刻の速度場を示したが、1 周期全体でもこのような現象は $t = 0.7 - 0.8T$ のみで見られる。

図 10 は $t = 0.75T$ における上面と下面に付随するそれぞれのストリークの様子である。濃灰色は上面のストリーク、薄灰色は下面のストリークで、丸で示した淀み点に向って両方のストリークが接近しているのがわかる。これは図の淀み点の左下側から下面付近の流体塊が、そして右上側から上面付近の流体塊が近づき、ぶつかり合いシアーが強くなり混合が激しくなることを示唆する。図 11 ではその淀み点における渦度の時間変化であるが、実際、2 つのストリークが接近する $t = 0.7 - 0.8T$ で渦度の壁垂直方向成分が増大している。図 7 と 8 で混合が特に盛んな場所を示す濃い丸が淀み点付近にあるのはこのシアーに

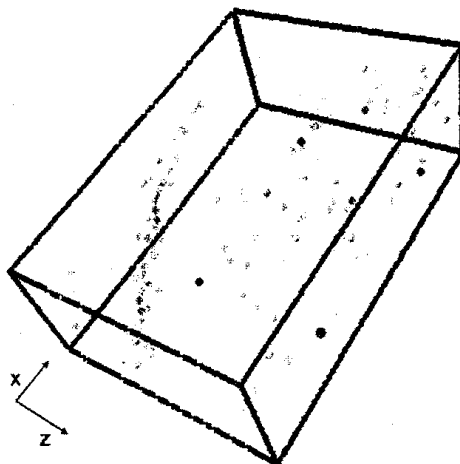


図 8: 図 7 を別の角度 (z 軸正側) から見たもの。

よるものだと考えられる。

8 まとめ

クエット系の不安定周期運動を用いて流体線の伸長および正四面体の変形を調べた。その結果、次のようなことがわかった。

- (i) 流体線の伸長率は混合定量化のよい指標になる。
- (ii) 上下 2 つのストリークが接近する淀み点では速度場が双曲型となり、流体線の伸張率は大きい、すなわち混合が盛んである。

参考文献

- [1] Goto, S. and Kida, S. 2003: Enhanced stretching of material lines by anti-parallel vortex pairs in turbulence. *Fluid Dyn. Res.* **33**, 2166-2169.
- [2] Kawahara, G. and Kida, S. 2001: Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: Regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.* **449**, 291-300.
- [3] Miura, H. and Kida, S. 1997: Identification of turbulent vortices in turbulence, *J. Phys. Soc. Japan.* **66**, 1331-1334.
- [4] Kida, S. and Miura, H. 1998: Swirl condition on a low-pressure vortices, *J. Phys. Soc. Japan.* **67**, 2166-2169.

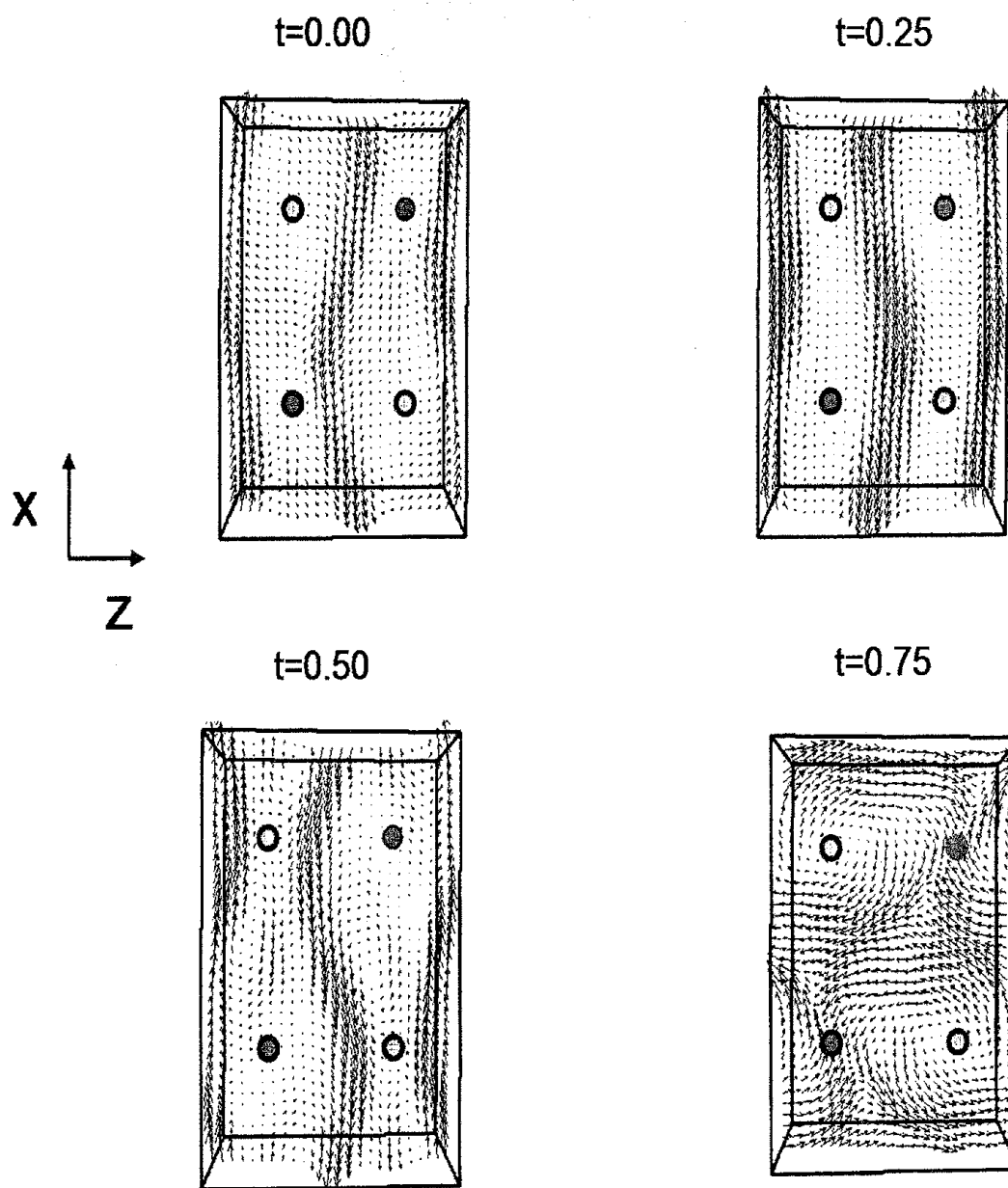


図 9: $1/4$ 周期ごとの (x, z) 平面 ($y=0$) での速度場。○は淀み点を表わす。

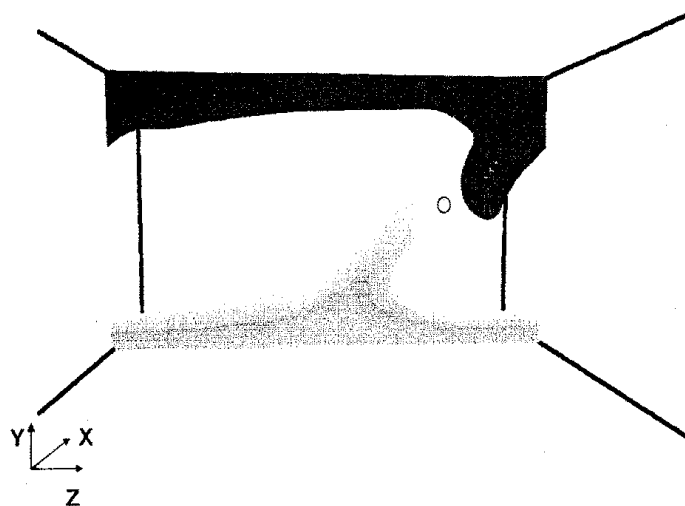


図 10: (y, z) 平面 ($x=4.2$) での上面と下面のストリーク。○は淀み点を表わす。 $t = 0.75T$ 。

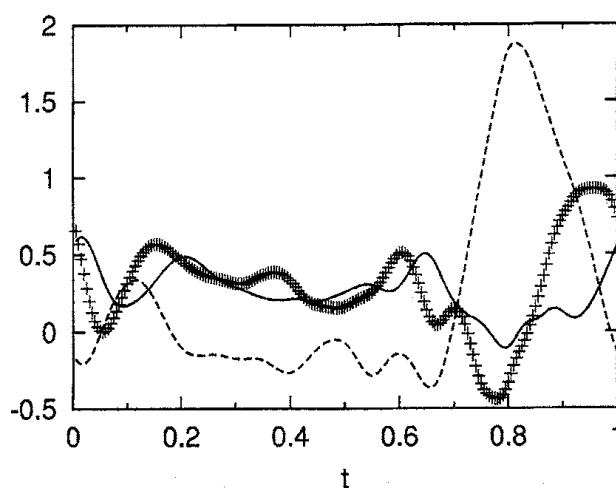


図 11: 1 周期における (図 9 の右上の) 淀み点での渦度の時間変化。—— x 成分、----- y 成分、+++++ z 成分。