

不動点定理の現状

東工大 理 高橋 渉

Wataru Takahashi

X をある与えられた集合とし, T を X から X への写像とするとき, $Tx_0 = x_0$ なる点 x_0 を T の不動点という。これを拡張して T を X から 2^X (X の部分集合の全体) への写像とするとき, $x_0 \in Tx_0$ なる点 x_0 をやはり T の不動点と呼ぶ。不動点に関する定理がいわゆる不動点定理であり, それは形が単純であるが故に応用範囲も広く種々の分野で有効に用いられている。ここでは非線形数学の発展に伴い, 最近特にその重要性を増しつつある不動点定理とその周辺について論じてみたいと思う。

まず第1節では Browder の集合値写像に対する不動点定理を Brouwer の不動点定理と単位の分割定理を用いて証明し, これを基に Schauder や Tychonoff の不動点定理の拡張を得る。第2節では不動点定理から得た1つの有用な存在定理を用いて凸不等式系の解の存在の問題と mini-max 定理を議論する。第3節では数理計画やゲームの理論, 経済均衡問

題等によく出てくる変分不等式と相補性問題の定理が証明される。ここではまず初めに有限次元 Banach 空間における変分不等式の定理が証明され、そのあと reflexive Banach 空間においてかなり一般的な形でその定理が得られる。第4節では凸不等式のシステムに関する定理と不動点定理を用いて函数解析学や計画数学で重要な Hahn-Banach の定理や分離定理の一般化がなされる。特に分離定理の一般化は、これまでのいくつかの分離定理を統一するばかりか、かなり精密な形で証明されている。第5節ではベクトル値をとる線形不等式のシステムを考察する。ここでは線形不等式のシステムが解をもつための必要十分条件が与えられ、これを用いて最小ノルム問題が解決される。これを解く際第4節で証明された分離定理の一般化が重要な役割を演ずる。第6節では凸不等式あるいは線形不等式のシステムに関する定理を用いて Hardy-Littlewood-Póla の定理の拡張と凸ゲームにおける Schmeidler の結果を証明する。Hardy-Littlewood-Póla の定理は $\mathbb{R}^n$ におけるある order と Doubly stochastic 行列との関係を示したものであるが、ここでは $\mathbb{R}^n$ における結果を l^1 空間と $l^1[0, \infty)$ 空間へ拡張しようというのである。

不動点定理がいろいろな形で研究され、どのように応用されているかを知っていただきたい。

§1. 不動点定理

まずよく知られている Brouwer の不動点定理と単位の分割定理を述べておこう。

Brouwer の不動点定理 X を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクトで凸な集合とし, T を X から X への連続な写像とする。そのとき X の中に不動点が存在する。

単位の分割定理 X をコンパクトハウスドルフ空間とし, $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ を X の開被覆とする。そのとき次の3つの条件を満たす X 上の n 個の実数値連続函数 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ が存在する。

$$(1) \quad 0 \leq \beta_i(x) \leq 1, \quad x \in X, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m \beta_i(x) = 1, \quad x \in X$$

$$(3) \quad x \notin G_i \text{ ならば } \beta_i(x) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \text{ である。}$$

これらを用いて次の不動点定理[5]を証明する。

定理1 (Brouwer) X を線形位相空間(もちろん T_2 は仮定する)のコンパクトな凸集合とする。 T を次の条件(1)と(2)を満たす X から 2^X への写像とする。

(1) 任意の $x \in X$ に対して, Tx は X の空でない凸集合(X の開集合)とする。

(2) 任意の $y \in X$ に対して, $T^{-1}y = \{x \in X : y \in Tx\}$ は X の開集合(X の空でない凸集合)とする。

そのとき $x_0 \in Tx_0$ なる点 $x_0 \in X$ が存在する。

証明 任意の $x \in X$ に対して, Tx は空でないことより, $\{T^{-1}y\}_{y \in X}$ は X の開被覆になる。 X はコンパクトなので, その有限開被覆 $\{T^{-1}y_1, T^{-1}y_2, \dots, T^{-1}y_m\}$ が存在する。単位の分割定理を用いて, この有限開被覆に対する単位の分割 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ を作り, X から X への写像 p を

$$p(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i(x) y_i$$

で定義する。するとすべての $x \in X$ に対して $p(x) \in Tx$ である。いま X_0 を $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ によってはられる凸集合とするとこの X_0 は $\mathbb{R}^m$ のコンパクト凸集合と同相になる。 p は X_0 から X_0 への連続写像なので, Brouwer の不動点定理が使えて $x_0 = px_0 \in Tx_0$ なる $x_0 \in X$ を得ることができる。

これを用いて次の使いやすい定理を得ることができる [31]。

定理 2 (Takahashi) X を線形位相空間のコンパクト凸集合とし, F を次の条件 (1), (2), (3) を満たす $X \times X$ 上の実数値関数とする。

(1) $y \in X$ を固定したとき, x の関数 $F(x, y)$ は上半連続である。

(2) $x \in X$ を固定したとき, y の関数 $F(x, y)$ は quasi-convex である。

(3) すべての $x \in X$ に対して, $F(x, x) \geq c$ となるような

実数 c が存在する。

そのとき、すべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c$ となるような $x_0 \in X$ が存在する。

定理2と単位の分割定理を用いると Tychonoff の不動点定理の拡張である次の結果が比較的簡単に証明できる [32]。

定理3 X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とする。 T を X から E への連続写像とするとき、次の(1)あるいは(2)が成立する。

(1) $Ty_0 = y_0$ なる $y_0 \in X$ が存在する。

(2) $0 < p(x_0 - Tx_0) = \min_{x \in X} p(x - Tx)$ となるような点 $x_0 \in X$ と E 上の連続なセミノルム p が存在する。

T を X から X への連続写像とするなら(2)は成立しないから(1)が成立し、いわゆる Tychonoff の不動点定理になる。定理2をノルム空間の場合に適用すると、定理3よりもっときれいな形の定理を得ることができる。

定理4 X をノルム空間 E のコンパクトな凸集合とし、 T を X から E への連続写像とする。そのとき、

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min_{x \in X} \|x - Tx\|$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

証明 $X \times X$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = \|y - Tx\| - \|x - Tx\|$$

で定義する。すると F は定理 2 の (1), (2) を満たし, さらに任意の $x \in X$ に対して $F(x, x) = 0$ となる。よって定理 2 からすべての $y \in X$ に対して $\|y - Tx_0\| \geq \|x_0 - Tx_0\|$ なるような $x_0 \in X$ が存在する。

定理 4 において, T を X から X への連続写像とすると, $\min_{x \in X} \|x - Tx_0\| = 0$ となり, $x_0 = Tx_0$ となる。すなわち Schauder の不動点定理を得ることになる。定理 3, 定理 4 を証明した同じ手法によって, 角谷の不動点定理の拡張である Fan の不動点定理も証明できる。

定理 5 X を局所凸な位相線形空間 E のコンパクト凸集合とし, T を X から 2^X への upper semicontinuous な写像で, 点 x を空でない閉で凸な集合 Tx にうつすとする。そのとき, $x_0 \in Tx_0$ なる点 x_0 が存在する。

定理 5 は定理 3, 定理 4 と同様 T が X から 2^E の場合まで証明されているがここでは書かない。高橋[30]を参照せよ。

§2. System 定理と mini-max 定理

Fan[9] によって証明された次の凸不等式のシステムに関する定理は mini-max 定理やゲームのコアを研究する上で非常に重要である(酒巻-高橋[23]を参照)。

定理 6 X を位相線形空間のコンパクトで凸な集合とし, $f_1, f_2, \dots, f_n$ を X 上で定義され, $(-\infty, \infty]$ に値をとる下半

連続で凸な函数とする。そのとき、次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) n 個の不等式のシステム $f_i(x) \leq c$ ($i=1, 2, \dots, n$) が解をもつ。

(2) $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ なる非負な数 $\{\alpha_i\}$ に対して, $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y) \leq c$ なる $y \in X$ が存在する。

証明 (1)の解を(2)の解に使えばよいから(1)から(2)は明らかである。(2)から(1)を証明する。もし $f_i(x) \leq c$ ($i=1, 2, \dots, n$) が解をもたないとする。いま, $i=1, 2, \dots, n$ に対して

$$G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\}$$

を定義すると, $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ は X の開被覆になる。この開被覆に対する単位の分割を $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ とし, $X \times X$ 上の函数 F を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると, F は定理2の(1), (2)を満たしており, さらに x の函数 $F(x, x)$ は下半連続であることより, すべての x に対して $F(x, x) \geq c_0 > c$ なる実数 c_0 が存在する。そこで定理2が使えて, すべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c_0 > c$ となる x_0 が X の中に存在する。すなわち $\sum_{i=1}^n \beta_i(x_0) = 1$ となるような非負の数 $\{\beta_i(x_0)\}$ が存在して, すべての $y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \beta_i(x_0) f_i(y) > c$$

◇

を得る。これは (2) $\Rightarrow$ (1) を意味する。

定理 6 は通常 mini-max 定理から証明されるものであるがここでは逆に定理 6 を用いて次の拡張された mini-max 定理を証明することができる。

定理 7 X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし、 Y を単なる集合とする。 F を $X \times Y$ 上の実数値関数で次の (1) と (2) の条件を満たすものとする。

(1) $y \in Y$ を固定したとき、 x の関数 $F(x, y)$ は下半連続で凸である。

(2) y の関数 $F(x, y)$ は concavelike である。

そのとき

$$\sup_y \min_x F(x, y) = \min_x \sup_y F(x, y)$$

が成立する。

証明の概略 $C = \sup_y \min_x F(x, y)$ とし、 Y の任意の有限集合を $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ とする。まず、定理 7 の仮定と定理 6 を用いて $F(x, y_i) \leq C$ ($i=1, 2, \dots, n$) が解をもつことが証明できる。そこで X のコンパクト性を用いて

$$F(x, y) \leq C, \quad y \in Y$$

が解をもつ。よって

$$\min_x \sup_y F(x, y) \leq \sup_y \min_x F(x, y)$$

であり、定理が証明されたことになる。

次に Sion の mini-max 定理を定理 1 を用いて証明しよう。

定理 8 X と Y を線形位相空間 E_1 と E_2 のコンパクトな凸集合とする。 F を次の条件 (1) と (2) を満たす $X \times Y$ 上の実数値関数とする。

(1) $y \in Y$ を固定したとき, x の関数 $F(x, y)$ は下半連続で quasi-convex である。

(2) $x \in X$ を固定したとき, y の関数 $F(x, y)$ は上半連続で quasi-concave である。

そのとき,

$$\min_x \max_y F(x, y) = \max_y \min_x F(x, y)$$

が成立する。

証明 結論がいわないとして。すなわち,

$$\max_y \min_x F(x, y) < c < \min_x \max_y F(x, y)$$

としよう。いま $x \in X$ と $y \in Y$ に対して

$$A_x = \{y' \in Y : F(x, y') < c\}$$

$$B_y = \{x' \in X : F(x', y) > c\}$$

とし, $X \times Y$ から $2^{X \times Y}$ への写像を $T(x, y) = B_y \times A_x$ で定義すると, T は定理 1 の仮定を満たしているから, T の不動点 (x_0, y_0) が存在する。これは $c < F(x_0, y_0) < c$ を意味し, 矛盾である。

平野-高橋 [13] は最近次の mini-max 定理を得た。

定理9 E_1 と E_2 を reflexive な Banach 空間とし, X と Y をそれぞれ E_1, E_2 の中で凸な部分集合とする。もし $X \times Y$ 上の実数値関数 F が

(a) $y \in Y$ を固定したとき, x の関数 $F(x, y)$ は上半連続で concave である。

(b) $x \in X$ を固定したとき, y の関数 $F(x, y)$ は下半連続で convex である。

を満たすならば, 次の条件(1)と(2)は同値である。

$$(1) \quad \max_x \min_y F(x, y) = \min_y \max_x F(x, y)$$

が成立する。

(2) 任意の $(x, y) \in (\partial_X K \times L) \cup (K \times \partial_Y L)$ に対して, 常に $F(u, y) \geq F(x, v)$ となる $i_X K \times i_Y L$ の元 (u, v) がとれるような X と Y の中で有界, 凸な部分集合 K と L が存在する。

ここで $\partial_A B$ は B の A に関する境界, $i_A B$ は B の A に関する内点の全体を表す。

系 X と Y , 関数 F を定理9 のようであるとしよう。そのとき, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ が存在して

$$(*) \quad \lim_{\substack{\|x\| + \|y\| \rightarrow \infty \\ (x, y) \in X \times Y}} \{ F(x_0, y) - F(x, y_0) \} = \infty$$

なら $\min \max F(x, y) = \max \min F(x, y)$ が成立する。

(*) の条件は通常 coercive と呼ばれるものである。

§3. 変分不等式と相補性問題

C を Banach 空間 E の中で凸な集合とし, T を C から E^* (E の共役空間) への写像とする。そのとき

$$\langle Tx, u-x \rangle \geq 0, \quad u \in C$$

を満たす C の元 x のことを変分不等式の解という。また C を closed convex cone とし, C^* を C の polar, すなわち

$$C^* = \{y \in E^* : \langle y, x \rangle \geq 0, x \in C\}$$

とすると, C から E^* への写像 T に対して

$$Tx \in C^*, \quad \langle Tx, x \rangle = 0$$

を満たす C の元 x を相補性問題の解という。このような問題は数理計画, ゲームの理論等でしばしば現れるものであるが数学的にも大変興味深い問題である。

補助定理 E を有限次元の Banach 空間とし, B が E から E の共役空間 E^* への monotone で hemicontinuous な写像ならば B は E 上で連続である。

この補助定理は Kato [19] によって証明されている。次の補助定理は凸不等式のシステムに関する定理 (定理 6) と集合値写像の不動点定理 (定理 5) を用いて証明される。

補助定理 E を有限次元の Banach 空間とし, K を凸でコンパクトな E の部分集合とする。 A を E から E^* への monotone 写像で $D(A) \subset K$ を満たすものとし, B を E から E^* への 1 価

写像で *monotone, continuous* であるとするならば、そのとき

$$\langle u-x, Bx+v \rangle \geq 0, (u,v) \in A$$

となるような $x \in K$ が存在する。

証明の概略 E から 2^K への写像 T を, $y \in E$ に対して

$$Ty = \{x \in K; \langle u-x, By+v \rangle \geq 0, (u,v) \in A\}$$

で定義する。まずはじめに $f = By$ とおき,

$$\langle u-x, f+v \rangle \geq 0, (u,v) \in A$$

となる $x \in K$ が存在することを示す。そのために $(u,v) \in A$ に対して K 上の関数 $F_{u,v}$ を

$$F_{u,v}(x) = \langle u-x, f+v \rangle$$

で定義する。 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ なる任意の m 個の非負な数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ と m 個の A の元 $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^m$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i F_{u_i, v_i}(x) \geq 0$$

となる解があることを示し, そこで定理6を用いて

$$\langle u-x, f+v \rangle \geq 0, (u,v) \in A$$

なる $x \in K$ の存在を保証する。あとは K から 2^K への写像 T に対して定理5を使えば補助定理は証明される。

これを用いて変分不等式の解の存在に対する必要十分条件を得ることができる [13]。

定理10 E を reflexive な Banach 空間とする。 C を E の閉で凸な部分集合とし, T を C から E^* への *monotone, hemi-*

continuous な写像とする。そのとき、次の条件(1)と(2)は同値である。

$$(1) \quad \langle Tx_0, y - x_0 \rangle \geq 0, \quad y \in C$$

なる $x_0 \in C$ が存在する。

(2) C の有界で閉、凸な部分集合が存在して、任意の $z \in K$ の元 z に対して、 $\langle Tz, y - z \rangle \leq 0$ なるような $y \in {}_i C^* K$ が存在する。

次にあげる2つの系はこの定理から得られる。

系 C を reflexive Banach 空間 E の閉で凸な集合とし、 T を C から E^* への monotone hemicontinuous な写像とする。さらに T が C 上で coercive, すなわち

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in C}} \langle Tx, x - u \rangle / \|x\| = \infty$$

なる $u \in C$ の存在を仮定すれば

$$\langle Tx_0, y - x_0 \rangle \geq 0, \quad y \in C$$

なる $x_0 \in C$ が存在する。

上の系において、 C を closed convex cone とすれば x_0 は

$$Tx_0 \in C^*, \quad \langle x_0, Tx_0 \rangle = 0$$

を満たし、相補性問題の解になる。

系 H を Hilbert 空間とする。 C を $0 \in C$ なる H の閉で凸な集合とし、 T を C から H への nonexpansive な写像とする。

もし C の有界で閉凸な部分集合 K で, $0 \in {}_i C K$ であり, すべての $z \in {}_i C K$ に対し $\|Tz\| \leq \|z\|$ なるものが存在するならばそのとき

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min\{\|y - Tx_0\| : y \in C\}$$

なるような $x_0 \in C$ が存在する。

特に, T を C から C への写像と仮定するならばこの x_0 は T の不動点となる。

§4. Hahn-Banach の定理の一般化と精密化

この節では函数解析学や計画数学等で非常によく使われる Hahn-Banach の定理と分離定理を不動点定理を用いて一般化する。 E を線形空間とし, p を E 上の sublinear な実数値函数とする。 p が sublinear であるとは任意の $x, y \in X$ と $\lambda \geq 0$ に対して $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ が成り立つときをいう。 E' を E 上の線形汎函数の全体としたとき, 角谷-Markov の不動点定理を用いて次の補助定理を得ることができる。

補助定理 p を線形空間 E 上の sublinear な実数値函数とし, $x_0 \in E$ とする。このとき,

$$p(x) \geq f(x), \quad x \in E$$

$$f(x_0) = p(x_0)$$

となるような線形汎函数 $f \in E'$ が存在する。

この補助定理と定理6を用いて Hahn-Banach の定理の拡張を得ることが出来る[15]。

定理11 p を線形空間 E 上の sublinear な実数値函数とし、 C を E の凸集合とする。 f を $f(x) \leq p(x)$, $x \in C$ なるような C 上の concave 函数とするとき、

$$f(x) \leq f_0(x), \quad x \in C$$

$$f_0(y) \leq p(y), \quad y \in E$$

なるような線形汎函数 $f_0 \in E'$ が存在する。

証明の概略 F を積位相をもった線形位相空間 R^E とし、

$$X_0 = \prod_{x \in E} [-p(-x), p(x)] \subset F$$

とする。また、 $B = \{g \in E' : g(x) \leq p(x), x \in E\}$ とするとき補助定理より B は空でないコンパクトな凸集合となる。いま $x \in C$ に対して B 上の函数 G_x を

$$G_x(g) = f(x) - g(x), \quad g \in B$$

で定義する。そのとき $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ なる m 個の非負な数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ と m 個の C の元 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ に対して補助定理を使えば

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i G_{x_i}(g) \leq 0$$

なる元 $g \in B$ の存在がわかるので、定理6より

$$G_x(f_0) \leq 0, \quad x \in C$$

なる $f_0 \in B$ が存在する。すなわち定理の結論を得るような f_0 が存在する。

系 (Hahn-Banach) E を線形空間とし, L をその部分空間とする。 f をすべての $x \in L$ に対して $f(x) \leq p(x)$ となるような L 上の線形汎函数とするとき

$$f_0(x) = f(x), \quad x \in L$$

$$f_0(y) \leq p(y), \quad y \in E$$

となるような $f_0 \in E'$ が存在する。

定理12 E を線形空間とする。 p を E 上の sublinear な実数値函数とし, C, D を E の空でない凸集合で

$$p(C, D) = \inf \{ p(x, y) : x \in C, y \in D \} > -\infty$$

なるものとする。そのとき,

$$\inf \{ f(x) : x \in C \} = p(C, D) + \sup \{ f(y) : y \in D \}$$

でかつ, $f(x) \leq p(x), x \in E$ なる $f \in E'$ が存在する。

系 N をノルム空間とし, C, D を N の空でない凸集合で

$$d(C, D) = \inf \{ \|x - y\| : x \in C, y \in D \} > 0$$

なるものとする。そのとき, $\|f\| = 1$ であり

$$\inf \{ f(x) : x \in C \} = d(C, D) + \sup \{ f(y) : y \in D \}$$

なる有界線形汎函数 $f \in N^*$ が存在する。

C が閉で凸, D がコンパクトで凸, そして $C \cap D = \emptyset$ とすると $d(C, D) > 0$ であるから系が使えてよく知られた分離定理が得られる。その分離定理では系で得られているような等号 (=) までは保証されていない。

§5. ベクトル値函数の線形不等式のシステム

実数値をとる函数の線形不等式のシステムは Fan [8] によって研究され、そのあと数理計画法やゲームの理論等で有効に使われている。ここでは数学の問題、特に代数学での行列の問題や種々の不等式を解くために Fan の結果をベクトル値をとる場合まで拡張する。E, F をノルム空間とする。

$B(E, F^*)$ によって E から F^* への線形連続写像の全体が作る Banach 空間を表す。 $B(E, F^*)$ に weak* operator topology を入れてやると、それは線形位相空間になる。今後この位相の元で何かを考えるときは " w^* " をつけるものとする。 $x \in E$, $t \in F$ に対して $B(E, F^*)$ 上の有界線形汎函数 tx を

$$tx(A) = \langle t, Ax \rangle, \quad A \in B(E, F^*)$$

で定義する。そのとき tx は $B(E, F^*)$ 上の w^* -continuous な函数である。また $K \subset B(E, F^*)$ で $0 \in K$ なる K に対して

$$P_K(f) = \sup \{ \operatorname{Re} f(A) : \|A\| \leq 1, A \in K \}, \quad f \in B(E, F^*)^*$$

を定義する。もし $K = B(E, F^*)$ なら $f \in B(E, F^*)$ に対して $P_K(f) = \|f\|$ となることがわかる。次の補助定理は mini-max 定理を用いて証明されるがかなりの紙面を用する [20]。

補助定理 C を F の凸集合で $0 \in C$ なるものとし、 $r_1, r_2, \dots, r_m$ と α を非負な数、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を E の元とする。また $t_1^*, t_2^*, \dots, t_m^*$ を F^* の元とし、 K を 0 を含む $B(E, F^*)$

の w^* -closed で凸な集合とする。そのとき次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) $\operatorname{Re} \langle t, t_i^* - A x_i \rangle \leq \|t\| r_i, t \in C, i=1, 2, \dots, n$
と $\|A\| \leq \alpha, A \in \alpha K$ を満たすような $A \in B(E, F^*)$ が存在する。

(2) すべての $(t_i) \in C^n$ に対して

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \langle t_i, t_i^* \rangle - \sum_{i=1}^n \|t_i\| r_i \leq \alpha p_K \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right)$$

が成り立つ。

この補助定理を用いて線形不等式のシステムに関する定理を証明するのであるが、その前にもう一つ定義を与えておく。
 E をノルム空間とし、 F を order をもったノルム空間とする。
 $\{x_\nu : \nu \in I\}$ を E の元からなる族とし、 $\{t_\nu^* : \nu \in I\}$ を F^* の元からなる族とする。そのとき線形不等式のシステム

$$A x_\nu \geq t_\nu^*, \quad \nu \in I$$

を (RS) と呼ぶことにする。システム (RS) の解とは上の不等式を満たす $B(E, F^*)$ の元 A のことである。

定理13 α を非負な数、 K を 0 を含む $B(E, F^*)$ の w^* -closed な凸集合とする。そのとき次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) システム (RS) が $\|A\| \leq \alpha, A \in \alpha K$ なる解 A をもつ。

(2) I の n 個の元 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ と F の positive な元 $t_1, t_2, \dots, t_n$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \langle t_i, t_{\nu_i}^* \rangle \leq \alpha p_K \left(\sum_{i=1}^n t_i x_{\nu_i} \right)$$

が成り立つ。

証明の概略 $C = F_+$, $\gamma_i = 0$, $x_i = x_{v_i}$, $t_i^* = t_{v_i}^*$ とおき
補助定理を応用すれば, (2)は $v_1, v_2, \dots, v_n$ に対して

$$\langle t, t_{v_i}^* - Ax_{v_i} \rangle \leq 0, \quad t \geq 0$$

で $\|A\| \leq \alpha$, $A \in \alpha K$ なる $B(E, F^*)$ の元 A の存在と同値になる。
あとは $X = \{A \in B(E, F^*) : \|A\| \leq \alpha, A \in \alpha K\}$ が w^* の
意味でコンパクトであり, 任意の $v \in I$ に対して集合

$$\{A \in B(E, F^*) : Ax_v \geq t_v^*\}$$

が w^* -closed であることを使えば定理は証明される。

この定理を用いて minimum norm problem (MNP) を解
くことができる。(MNP)とは

$$f(x_i) \geq c_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad f \geq 0$$

のもとで, f のノルム $\|f\|$ を最小にする問題のことである。

定理 14 $\alpha = \sup \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ とする。ただし, $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n$ は
 $\lambda_i \geq 0$ で $\|(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)^+\| \leq 1$ なるものとする。そのとき次の
2つの命題が成り立つ。

(1) (MNP) が consistent である必要十分条件は α が有
限な値をとることである。

(2) (MNP) が consistent であれば (MNP) は解をもち
(MNP) の値は α である。

証明は小宮-高橋[20]を参照せよ。

§6. Doubly stochastic 行列と凸ゲームのコア

線形不等式のシステムに関する定理(定理13)は, §6 で minimum norm problem を解くのに用いられたが, この節ではさらに Doubly stochastic 行列と凸ゲームのコアの問題にも応用される。前者では Hardy-Littlewood-Póla の定理の無限次元空間への拡張を得るため, 後者では Schneider によって得られている凸ゲームの結果の別証明(非常に Simple になる)に用いられる。

$(X, \mathcal{B}, m)$ を measure space とし, $B(L^\infty, L^\infty)$ を L^∞ から L^∞ への線形連続写像全体の作る Banach 空間とする。 $B(L^\infty, L^\infty)$ の元 S は次の3つの条件を満たすとき doubly substochastic と呼ばれる。

(1) $0 \leq f$ ならば $Sf \geq 0$ である。

(2) $S1 \leq 1$ である。

(3) $0 \leq f$, $f \in L^1 \cap L^\infty$ ならば $\int Sf \, dm \leq \int f \, dm$ である。

doubly substochastic 写像の全体を $\mathcal{S}$ で表し, また $\mathcal{S}$ の元 S で $S1 = 1$ を満たすものの全体を $\mathcal{S}^*$ で表す。次の2つの定理は Hardy-Littlewood-Póla の定理を l^1 , $L^\infty[0, \infty)$ の場合に拡張したものである。

定理15. $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ を l^1 の元で $x \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq 0$ なるものとする。もしこの2

$\mathcal{F}$ の元 x, y が

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

を満たすならば, そのとき $y = Tx$ となるような $\mathcal{F}^*$ の元 T が存在する。

定理16 f を $f \geq 0$ なる $L^1[0, \infty)$ の元, g を $g \geq 0$ で monotone decreasing な $L^1[0, \infty)$ の元とする。いまこの f, g に

$$\int_0^s g \, d\mu \leq \int_0^s f \, d\mu, \quad s \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} g \, d\mu = \int_0^{\infty} f \, d\mu$$

なる関係があるならば, そのとき $g = Tf$ となるような $\mathcal{F}^*$ の元 T が存在する。

特に, f が有界なら $g = Tf$ となるような $\mathcal{F}^*$ の元 T が存在する。

上の2つの定理はいくつかの補助定理と定理13を使って証明されるがここでは書かない。次に凸ゲームのコアに関する定理を取り扱う。

X をある集合とし, $\mathcal{B}$ を X の部分集合からなる1つの algebra とする。 $B(X, \mathcal{B})$ によって有界な $\mathcal{B}$ -measurable functions の作るノルム空間とし, $B^*(X, \mathcal{B})$ によって $\mathcal{B}$ 上の有界な finite additive set functions の作る空間を表すこと

にする。 $v \in V(X, \mathcal{O})$ が game であるとは $v: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^+$ であり, $v(\emptyset) = 0$ のときである。 game v の core とはすべての $A \in \mathcal{O}$ に対して $\mu(A) \geq v(A)$ であり, $\mu(X) = v(X)$ である $\mu \in B^*(X, \mathcal{O})$ の全体のことである。これを $\mathcal{C}(X, \mathcal{O}, v)$ で表す。次の定理は Schmeidler [24] によって得られたものであるが, 定理13を用いることによって非常に簡単に証明することができる。

定理17 v を game としたとき, 次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) $\mathcal{C}(X, \mathcal{O}, v) \neq \emptyset$ である。

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ と $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{O}$ に対して,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v(A_i) \leq v(X) \parallel \sum_{i=1}^m \lambda_i 1_{A_i} \parallel$$

が成立する。

証明 (1)は $\mu(A) \geq v(A)$, $A \in \mathcal{O}$ で $\parallel \mu \parallel \leq v(X)$ なる $\mu \in B^*(X, \mathcal{O})$ の存在のことであるから, 定理13を使えば定理は明らかである。

§7 おわりに

不動点定理と現状について書き残した問題が沢山ある。

非線形計画の問題は非線形発展方程式[4]を介在にするとそれは不動点定理や解の挙動を研究するエルゴード定理にな

り、それは現在非線形解析学の話題となっているところである。

生態学における Tube flow problem は Schauder の不動点を使うとうまく証明できる [11]。

ロシアの高校生 Lomonosov [21] は完全連続作用素の不変部分空間の問題を不動点定理を用いてそれまでの結果より一般的にそして簡単に解いている。

集合値写像の不動点定理を用いて偏微分方程式論でかなり沢山の結果が出ている。

その他、不変測度の存在と不動点定理の関係、情報理論における不動点定理の役目、共通不動点定理とセミグループの関係等々……。それ等は次の機会にまわしたい。

References

- [1] J.B.Baillon, Un théorème de type ergodic pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511-1514.
- [2] V.Barbu, Nonlinear semigroups and evolution equations in Banach spaces, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti, 1976.
- [3] V.Barbu-Th.Precupanu, Convexity and optimization in Banach spaces, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti, 1978.

- [4] H.Br zis, Operateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
- [5] F.E.Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283-301.
- [6] R.E.Bruck Jr., Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Functional Analysis, 18 (1975), 15-26.
- [7] K.Fan, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38 (1952), 121-125.
- [8] K.Fan, On systems of linear inequalities, in Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Math. Studies, No. 38 (1956), 99-156.
- [9] K.Fan, Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205-217.
- [10] K.Fan, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, Math. Ann., 163 (1966), 189-203.

- [11] J.B.Garner-R.B.Kellogg, A one tube flow problem arising in Physiology, Bull. Math. Bio., 42 (1980), 295-304.
- [12] N.Hirano-W.Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.
- [13] N.Hirano-W.Takahashi, Existence theorems on unbounded sets in Banach spaces, Proc. Amer. Soc., 80 (1980), 647-650.
- [14] N.Hirano-W.Takahashi, The sets of fixed points of families of affine continuous mappings, Fund. Math., 113 (1981), 113-117.
- [15] N.Hirano,H.Komiya-W.Takahashi, A generalization of the Hahn-Banach extension theorem, J. Math. Anal. Appl., 88 (1982), 333-340.
- [16] S.Itoh-W.Takahashi, Single-valued mappings, multivalued mappings and fixed point theorems, J. Math. Appl., 59 (1977), 514-521.
- [17] S.Itoh-W.Takahashi, The common fixed point theory of singlevalued mappings and multivalued mappings, Pacific J. Math., 79 (1978), 493-508.
- [18] S.Itoh,W.Takahashi-K.Yanagi, Variational inequalities and complementarity problems, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 23-2

- [19] T.Kato, Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity,
Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 548-550 and 73 (1967),
886-889.
- [20] H.Komiya-W.Takahashi, Systems of linear inequalities on
normed linear spaces, Linear & Multilinear algebra, to appear.
- [21] V.J.Lomonosov, Invariant subspaces for operators commuting
with compact operators, Func. Anal. i Prilozen 7 (1973),
55-56.
- [22] K.Naito, On the almost periodicity of solutions of a reaction
diffusion system, J.Diff. Equ., 44 (1982), 9-20.
- [23] K.Sakamaki-W.Takahashi, Systems of convex inequalities and
their applications J. Math. Anal. Appl., 70 (1979), 445-459.
- [24] D.Schmeidler, On balanced games with infinitely many players,
Research program in game theory and mathematical economics;
RM 28 (June 1967), The Hebrew University of Jerusalem, Israel.
- [25] M.Sion, On general minimax theorems, Pacific J. Math., 8
(1958), 171-176.
- [26] W.Takahashi, Fixed point theorem for amenable semigroup of
nonexpansive mappings, Kodai Math. Sem. Rep., 21 (1969)
383-386.
- [27] W.Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive

- mappings 1, Kodai Math. Sem. Rep., 22 (1970), 142-149.
- [28] W.Takahashi, Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on L^1 , Kodai Math. Sem. Rep., 23 (1971), 131-143.
- [29] W.Takahashi, Ergodic theorems for amenable semigroups of positive contractions on L^1 , Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ., 19 (1972), 5-11.
- [30] W.Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.
- [31] W.Takahashi, Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities, J. Optimization Theory and Appl., 24 (1978), 499-506.
- [32] W.Takahashi, Recent results in fixed point theory, SA Bull. Math., 4 (1980), 59-85.
- [33] W.Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.