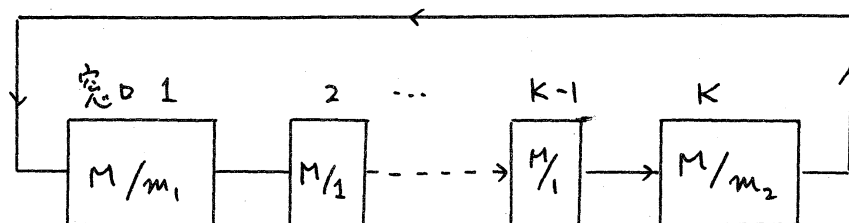


多段巡回型待ち行列網における サイクルタイム分布の積形式について

防大 川島 武 (Kawashima, Takeshi)

1. はじめに

図1のような巡回形待ち行列網を考察する。系内客数は N であり、先着順の規律で行なわれ、パラメータ μ_i ($i=1, 2, \dots, k$) の指数分布サービスを行うものとする。窓口数 m_i ($i=1, 2, \dots, k$) は m_1, m_k 以外はすべて 1 である。



系内人数 N , 規律は FCFS

図 1.

さて、 N 人の客の中から任意に1人を選び、客と呼ぶ。客とは他の $N-1$ 人の客と同様に何回も巡回するが、任意のサイクルでの第1窓口から第 K 窓口までの、各窓口での滞在時間（待ち時間+サービス時間）の同時分布が、ここでは、いわゆる積形式となることを示す。図1のモデルで、Schassberger, Daduna (1984) ですでに導かれている。彼等は、客 i が窓口1に到着した時点での系全体の状態を与えたときの、滞在時間分布の Laplace-Stieltjes 変換に着目し、これらが満たす連立方程式を解いて、積形式を求めている。然し、計算は非常に多く、確かめるのも容易ではない。ここでは、これをもっと簡単に導くことを目的とする。

図1のモデルのうち、特定な形については、いくつかの結果が得られている。 $K=2$ については、 $m_1=m_2=1$ の場合を Chow (1980), $m_1, m_2 \geq 1$ の場合については Kawashima, Torigoe (1983) がそれぞれ得ている。 $m_1=m_2=\dots=m_K=1$ の場合には Boxma, Kelly, Konheim (1984) で与えられている。ここでの方法は Boxma, Kelly, Konheim の方法にヒントを得ている。

2. 記号と定理

よく知られているように、図1のモデルでの、列の長さに関する平衡確率は積形式で表わされる。これを

$\pi_N(q_1, q_2, \dots, q_k) = P((q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t)) = (q_1, q_2, \dots, q_k))$
 と書く。ここで $q_1 + q_2 + \dots + q_k = N$, P は定常測度であり, 時刻
 t での列の長さ $q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t)$ の分布は P のもとでは一
 定となる。客 c の i 窓口への到着時点列は P のもとで定常な
 点列であり, この点列に関して定常な Palm 測度を P_i ($i=1, \dots, k$)
 とする。(例えば Miyazawa (1977)) P_i は客 c が時刻 0 に到
 着したという条件付きの P の測度とも考えることができる。
 時刻 0 で行なわれてゐるサイクルでの $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 窓
 口での滞在時間をもそれぞれ $s_1, s_2, \dots, s_k$ とする。 P_i のもとで
 は, s_i が時刻 0 で始まることになる。また各 s_i の始まる時
 刻での j 窓口の列の長さを q_{ij} と書く。 q_{ii} には客 c は数えな
 い。従つて $q_{i1} = q_1, q_{i2} = q_2, \dots, q_{ik} = q_k$ ならば $\sum_j q_{ij} = N-1$
 となつてゐる。 P_i について 2 次が成立する。(例えば Kawashima
 (1978), Lavenberg, Reiser (1980))

$$P_i((q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ik}) = (q_1, q_2, \dots, q_k)) = \pi_{N-1}(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

$$\text{ここで } q_1 + q_2 + \dots + q_k = N-1$$

さて P_i での $s_1, s_2, \dots, s_k$ の分布をこれから考察するが, これ
 を簡単のため $P_i(s_1, s_2, \dots, s_k)$ と書く。本来は $P_i(s_1 \leq a_1, \dots, s_k \leq a_k)$
 などと書くべきものであるが, 混乱は生じない。定義より次
 のように表わすことができる。

$$P_i(s_1, s_2, \dots, s_k) =$$

$$= \sum_{q_1 + \dots + q_k = N-1} \Pr(s_1, s_2, \dots, s_k | q_{11} = q_1, \dots, q_{kk} = q_k) \pi_{N-1}(q_1, \dots, q_k)$$

ここで $\Pr(\cdot)$ は推移確率であり、 $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_k$ に共通している。この $\mathbb{P}(s_1, s_2, \dots, s_k)$ が次のような積形式で表わせる。

定理 1

$$(2.1) \quad \mathbb{P}(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum \Pr(s_1 | q_{11} = q_1) \cdots \Pr(s_k | q_{kk} = q_k) \pi_{N-1}(q_1, \dots, q_k)$$

証明は §4 で与える。各窓口での規律は FCFS であるので $\Pr(s_i | q_{ii} = q_i)$ は 指数分布の convolution として表わすことができる。

3. Quasi Reversibility

時刻 t のシステムの状態を $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_k(t))$ で表わす。 $Q(t)$ の挙動はマルコフ過程として表わすことができ、 π_N が積形式であることより

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q(t) = (\dots, q_i, q_{i+1}, \dots), Q(t+h) = (\dots, q_{i-1}, q_{i+1}+1, \dots)) \\ = \pi_N(\dots, q_i, q_{i+1}, \dots) \mu_i h + o(h) \\ = \pi_N(\dots, q_{i-1}, q_{i+1}+1, \dots) \mu_{i+1} h + o(h) \quad (\text{但し } q_i \geq 1) \end{aligned}$$

などが成立する。これは $Q(t)$ の時間に関する逆過程は、丁度図 1 のシステムで客が逆方向に巡回するモデルの過程 $Q^R(t)$ と一致し、いわゆる Quasi Reversibility が成立している。従って図 1 のシステムと時間と逆向きして見たとき、個々の客の挙動は別にして、列の長さの変化は逆向きに回るモデルと一致する。(Quasi Reversibility については Kelly (1979))。

次が成立つ。添字 R は逆向きモデルを表わす。)

Lemma 3.1

$$Pr(S_1 | q_{21} = q_1) = Pr(S_1 | q_{11} = q_1) \quad (q_1 = 0, 1, \dots, N-1)$$

この補助定理は、客とが窓口 1 でのサービスを終了した時列の長さが q_1 であった場合、 S_1 の分布は、到着した時に q_1 である場合の分布に一致していることを意味している。証明は Quasi Reversibility であることを利用し、 $Pr(S_1^R | q_{11}^R = q_1)$ と $Pr(S_1 | q_{21} = q_1)$ が一致することから導かれる。詳しくは Burke (1968) p1151 の議論を適用すればよい。

4. 定理 1 の証明

P_i のもとでは $(q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{iK})$ の分布が、また $P_{i'}$ のもとでは $(q_{i'1}, q_{i'2}, \dots, q_{i'K})$ の分布が $\pi_{N-1}(\cdot)$ であることは明らかであるが、 $S_1, S_2, \dots, S_K$ の分布も、 P_i のもとでも $P_{i'}$ のもとでも同一であることが、エルゴード性を用いて示される。

(Kawashima (1982))。すなわち

Lemma 4.1

$$P_i(S_1, S_2, \dots, S_K) = P_{i'}(S_1, S_2, \dots, S_K) \quad (i = 1, 2, \dots, K)$$

または

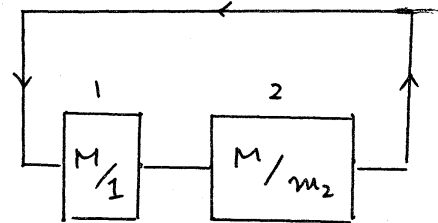
$$\begin{aligned} & \sum Pr(S_1, S_2, \dots, S_K | q_{11} = q_1, \dots, q_{1K} = q_K) \pi_{N-1}(q_1, \dots, q_K) \\ &= \sum Pr(S_1, S_2, \dots, S_K | q_{i'1} = q_1, \dots, q_{i'K} = q_K) \pi_{N-1}(q_1, q_2, \dots, q_K) \end{aligned}$$

この Lemma 4.1 が主張することは他のモデルでも成立する。

定理 1 を窓口数について帰納法で証明する。まず

Lemma 4.2

$K=2$, $m_1=1$ (右図) で (2.1) が
なり立つ。



客が窓口 1 のサービスを終了した時の、システムの状態
(q_{21}, q_{22}) が与えられれば、滞在時間 s_1, s_2 は条件付き独立と
なり こと が証明される。(Kawashima, Tori'goe (1983))

定理 1 の証明

仮定 A: 右図のような
系では積形式が成立する
ものとする。

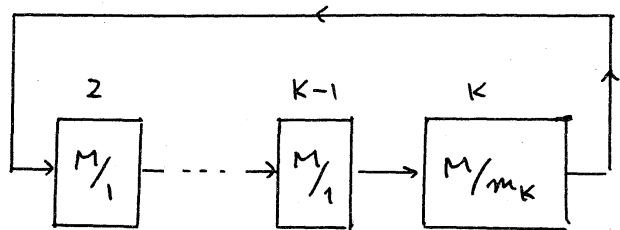


図 1 のシステムについて、客 c の窓口 1 のサービスが終了
した直後、すなわち P_2 のもとで考察する。 $(q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2K})$
が与えられたもとでは、 s_1 と $(s_2, \dots, s_K)$ は条件付き独立であ
る。なぜなら、 q_{21} に含まれる客は客 c が窓口 K でサービスを
開始するまでは追いつくことはなく、客 c のそれまでの待ち
時間に影響を与えることはないからである。 $s_2, s_3, \dots, s_K$ は
仮定 A にあるシステムの滞在時間と確率的に同一であること
より次を得る。

$$P_2(s_1, \dots, s_k)$$

$$= \sum_{q_1 + \dots + q_k = N-1} P_r(s_1, \dots, s_k | q_{21} = q_1, \dots, q_{2k} = q_k) \pi_{N-1}(q_1, \dots, q_k)$$

$$= \sum P_r(s_1 | q_{21} = q_1) P_r(s_2 \dots s_k | q_{22} = q_2, \dots, q_{2k} = q_k) \pi_{N-1}(q_1, \dots, q_k)$$

$$= \sum_{q_1=1}^{N-1} P_r(s_1 | q_{21} = q_1) \sum_{q_2 + \dots + q_k = N - q_1 - 1} P_r(s_2 \dots s_k | q_2 \dots q_k) \pi_{N-1}(q_1, \dots, q_k)$$

$$= \sum_{q_1=1}^{N-1} P_r(s_1 | q_{21} = q_1) \pi_{N-1}(q_1, q_2, \dots, q_k) / \pi_{N-q_1-1}(q_2, \dots, q_k)$$

(但し、 $\pi_{N-q_1-1}(q_2, \dots, q_k)$ は仮定 A のモデルに於けるもの)

は q_1 についての 1 次関数であること、及び 仮定 A より

$\sum P_r(s_2 \dots s_k | q_2 \dots q_k) \pi_{N-q_1-1}(q_2 \dots q_k)$ は積形式となるから

$$= \sum_{q_1=1}^{N-1} P_r(s_1 | q_1) \sum_{q_2 + \dots + q_k = N - q_1 - 1} \prod_{j=2}^k P_r(s_j | q_j) \pi_{N-q_1-1}(q_2 \dots q_k) \cdot \pi_{N-q_1-1}(q_1, \dots, q_k)$$

$$= \sum_{q_1 + \dots + q_k = N-1} \prod_{j=1}^k P_r(s_j | q_j) \pi_{N-1}(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

を得る。仮定 A の証明は上記の証明で $m_1 = 1$ とすればよい。

5. 他の規律について

今まで各窓口での規律は FCFS としたが、窓口 1, k について他の規律、例えば P.S. などと仮定してみても上記の方法では積形式を導くことはできない。実際にも成立していないであろう。但し、 $k=2$ については成立している。川島・上岡(1984)

6. 滞在時間の順序または窓口の並び方

図1で S_K に引き続く窓口1, 2, ..., Kでの滞在時間を $S'_1, S'_2, \dots, S'_K$ とする。一周する一つのサイクル $S_i, S_{i+1}, \dots, S_K, S'_1, \dots, S'_{i-1}$ の同時分布は必ずしも(2.17)とはならない。つまり、many serverの窓口が途中にある場合では、追い越しが生じることもあるため、もっと複雑になるのである。

REFERENCES

- Boxma, O.J., F.P. Kelly, A.G. Konheim (1984) : The product form distribution in cyclic exponential queues, J.A.C.M. 31, 128-133
- Burke, P.J. (1968) : The output of a queuing system, A.M.S., 39, 1144-1152
- Chow, W. M. (1980) : The cycletime distribution of exponential queues, J.A.C.M. 27, 281-286
- Kawashima, T. (1978) : Turnaround time equations in queueing networks, Opn.Res.J., 21, 477-485
- Kawashima, T. (1982) : A property of two Palm measures in queueing networks and its applications, Opn.Res.J., 25, 16-28
- Kawashima, T., N. Torigoe (1983) : The cycle time distribution in a central server queueing system with multi-server stations, Memo.Def.Acad., 23, 155-160
- Kelly, F.P., (1979) : Reversibility and stochastic networks, Wiley, Chichester and New York
- Lavenberg, S.S., M. Reiser, (1980) : Stationary state probabilities at arrival instants for closed queueing networks with multiple types of customers, J.Appl.Prob., 17, 1048-1061
- Miyazawa, M., (1977) : Time and customer processes in queues with stationary inputs, J.Appl.Prob., 14, 349-357
- Schassberger, R., H. Daduna (1984) : Sojourn times in queueing networks with multiserver nodes, Preprint
- 上岡, 川島 (1984) : セントラルサーバモデルの滞在時間, 数理解析研究所講究録 519, 86-98