

Higson コンパクト化の Universality について

東京大学 大学院数理科学研究科 嶺 幸太郎

Kotaro Mine

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1. 序

Higson コンパクト化は, 粗い幾何学 (coarse geometry, 以下これを粗幾何と呼ぶ) における無限遠境界を与えるコンパクト化の中で普遍的であると考えられる. ここでいう普遍的とは, そのようなコンパクト化の中で最大であるという意味である. しかしながら, その普遍性を主張する文献を筆者の周辺では見つけることができず, また, そもそも「粗幾何におけるコンパクト化」という概念に明確な定義が与えられているわけではない. 本論では, 粗幾何におけるコンパクト化について, かりそめの定義を与えた上で, それらの中で Higson コンパクト化が普遍的であることを示す.

2. 準備

主定理を述べるために必要な概念の定義を与えよう.

粗幾何において対象となる主な空間は固有距離空間であり, ここでの射は粗写像と呼ばれる.

定義 2.1. 有界閉部分集合であることとコンパクト部分集合であることが同値になるような距離空間のことを固有距離空間 (proper metric space) という.

距離空間 (X, d) の部分集合 A の直径 $\sup\{d(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\}$ が有限であるとき, A は有界であるという.

定義 2.2. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $f: X \rightarrow Y$ が次の条件を満たすとき, これを粗写像 (coarse map) という.

(1) 任意の $R > 0$ に対して, 次を成立させる十分大きな $S > 0$ が存在する:

$$d_X(x_1, x_2) \leq R \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq S.$$

(2) 任意の有界集合 $B \subset Y$ について $f^{-1}(B)$ は有界である.

粗写像に連続性は要求しない. また, 粗幾何において, 次の意味で近い写像の区別は無視される.

定義 2.3. 二つの写像 $f, g: X \rightarrow Y$ が近い (close) とは, $\sup\{d_Y(f(x_1), f(x_2)) \mid x_1, x_2 \in X\}$ が有限なことである.

写像が近いという関係は同値関係をなす. 次節における主定理の証明の中で粗写像の性質として直接用いるのは, 次の事実のみである.

事実 2.4. 粗写像と近い写像は粗写像であり, 特に恒等写像 id_X と近い写像 $f: X \rightarrow X$ は粗写像である.

さて, 固有距離空間を対象とし, その間の粗写像を射とする圏を $\mathcal{M}$ で表そう. $\mathcal{M}$ における射は, 本来ならば近さによる粗写像の同値類とすべきところであろう. しかし, ここではコンパクト化との関係を論じる必要があることから, 同値類を取らずに話を進めたい.

次に, コンパクト化に関する事項を述べる. 位相空間 X を稠密に含むコンパクト空間のことを X のコンパクト化という. X のコンパクト化 γX に対して, $\gamma X \setminus X$ を γX の境界 (あるいは剰余) という. コンパクト化の間には向きおよび同値性が定められる:

定義 2.5. 位相空間 X のハウスドルフ・コンパクト化 γX および δX に対して, $p|_X = \text{id}_X$ を満たす連続写像 $p: \delta X \rightarrow \gamma X$ が存在するとき, δX は γX よりも大きいといい, これを $\gamma X \leq \delta X$ と表す. また, このとき p を射影と呼ぶ. 更に, $\gamma X \leq \delta X$ かつ $\delta X \leq \gamma X$ が成立するとき, γX と δX は同値であるという.

γX と δX が同値であるとき, 射影 $p: \delta X \rightarrow \gamma X$ は同相写像となる. また, 次は連続性から直ちに得られる事実である.

事実 2.6. ハウスドルフ・コンパクト化の間の射影 $p: \delta X \rightarrow \gamma X$ について, $p(\delta X \setminus X) = \gamma X \setminus X$.

位相空間 X のハウスドルフ・コンパクト化全体 $\mathcal{C}_X$ の同値類 $\mathcal{C}_X / \sim$ において, 二項関係 $\leq$ は半順序をなす.

Higson コンパクト化の定義は [4] を参照のこと. 一般に, X における二つの閉集合の閉包がいかなるときに交わるかを記述することで, X のコンパクト化は特徴づけられる (3.5.5 Theorem of [2]). この意味における Higson コンパクト化の特徴づけは次で与えられる:

命題 2.7 (Proposition 2.3 of [1]). 固有距離空間 X のコンパクト化 hX が X の Higson コンパクト化であることと, 任意の閉集合 $A, B \subset X$ について次が成り立つことは同値である:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \iff \forall M > 0, N_M(A) \cap N_M(B) \text{ は有界.}$$

ここで, $\overline{A} = \text{cl}_{hX} A$ であり, $N_M(A)$ は A の M -近傍を表す.

以下, 固有距離空間 X の Higson コンパクト化を hX で表す. 粗幾何におけるコンパクト化を考えるために, 次のような圏を与える.

定義 2.8. 固有距離空間のハウスドルフ・コンパクト化における同値類を対象とし, それらの間の写像で境界上で連続になるものを射とする圏を $\mathcal{C}$ で表す. すなわち, $\mathcal{C} = \bigcup \{ \mathcal{C}_X / \sim \mid X \in \mathcal{M} \}$ である.

上の定義において, 写像 $g: \gamma X \rightarrow \gamma Y$ が $\gamma X \setminus X$ 上で連続であるとは, 各 $\omega \in \gamma X \setminus X$ および $g(\omega)$ の γY における任意の近傍 N に対して, $g^{-1}(N)$ が γX における ω の近傍と

なることである (開近傍の逆像が開近傍になる必要はない). また, これは, $\omega \in \gamma X \setminus X$ に収束する γX 上の任意の有向点列 $z_\lambda \in Z$ ($\lambda \in \Lambda$) について $\lim_{\lambda \in \Lambda} g(z_\lambda) = g(\omega)$ となることと同値である.

定義 2.9. $\mathcal{S}$ を $\mathcal{M}$ の充満部分圏とする. 関手 $\gamma: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ が粗幾何におけるコンパクト化を与えるとは, 次の条件を満たすことと定める:

- (1) 各 $X \in \mathcal{S}$ について $\gamma X \in \mathcal{C}_X / \sim$.
- (2) 各粗写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $\gamma f|_X = f$.
- (3) 二つの粗写像 $f, g: X \rightarrow Y$ が近いならば, $\gamma f|_{\gamma X \setminus X} = \gamma g|_{\gamma X \setminus X}$.

備考 2.10. $\gamma, \delta: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ が粗幾何におけるコンパクト化を与えるとすれば次が成り立つ.

- (1) 各粗写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $\gamma f: \gamma X \rightarrow \gamma Y$ は境界を境界に写す写像となる. すなわち, $\gamma f(\gamma X \setminus X) \subset \gamma Y \setminus Y$.
- (2) $\gamma X = \delta X$ かつ $\gamma Y = \delta Y$ ならば, 各粗写像 $f: X \rightarrow Y$ について $\gamma f = \delta f$.

例 2.11. (1) Higson 関手 $X \mapsto hX$ は粗幾何におけるコンパクト化を与える ([3]).
 (2) 一点コンパクト化を与える関手は粗幾何におけるコンパクト化を与える.

上記二つ以外に粗幾何におけるコンパクト化を与える $\mathcal{M}$ 上の関手があるかどうかはよく分かっていない. 例えば, $\mathcal{S}$ として Gromov の意味での双曲空間のなす部分圏を考えれば, その理想境界によるコンパクト化は粗幾何におけるコンパクト化を与える.

定義 2.12. 二つの関手 $\gamma, \delta: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ が粗幾何におけるコンパクト化を与えているとする. このとき, $\gamma \leq \delta$ であるとは, 各 $X \in \mathcal{S}$ に対して $\gamma X \leq \delta X$ が成り立つことと定める.

粗幾何におけるコンパクト化を与える $\mathcal{S}$ 上の関手全体を $\Gamma_{\mathcal{S}}$ とすれば, 備考 2.10(2) により, 上で定めた二項関係 $\leq$ は $\Gamma_{\mathcal{S}}$ 上の半順序をなす.

次が本論における主結果である.

定理 2.13. 粗幾何におけるコンパクト化を与える $\mathcal{M}$ 上の関手全体を $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{M}}$ とすれば, Higson コンパクト化を与える関手 $h: X \mapsto hX$ は Γ の中で最大である.

3. 証明

命題 3.1. 各 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して共通の上界がある. すなわち, $\gamma_1 \leq \delta$ かつ $\gamma_2 \leq \delta$ を満たす $\delta \in \Gamma$ が存在する.

Proof. 各 $X \in \mathcal{M}$ に対して, 次で定める Δ_X は位相的な埋め込みを与える.

$$\Delta_X: X \rightarrow \gamma_1 X \times \gamma_2 X, \quad x \mapsto (x, x).$$

$\gamma_1 X \times \gamma_2 X$ のコンパクト性より, 閉包 $\delta X = \text{cl}_{\gamma_1 X \times \gamma_2 X} \Delta_X(X)$ は $\Delta_X(X)$ のコンパクト化である. $\Delta_X(X)$ と X は同相であるからこれらを同一視し, δX を X コンパクト化と

みなそう. これにより $\delta : X \mapsto \delta X$ を得る. また, 各粗写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して, δf を次で定められる自然な写像

$$\Delta_f : \gamma_1 X \times \gamma_2 X \rightarrow \gamma_1 Y \times \gamma_2 Y, \quad (z_1, z_2) \mapsto (\gamma_1 f(z_1), \gamma_2 f(z_2))$$

の δX への制限とする. このようにして定めた δ が粗幾何におけるコンパクト化を与える関手になることは明らかであるが, 次の四つの主張を通して念のため確認しておく.

主張 3.2. $\Delta_f|_X = f$.

各 $x \in X$ について

$$\Delta_f(x, x) = (\gamma_1 f(x), \gamma_2 f(x)) = (f(x), f(x))$$

である. いま我々は $x \in X$ および $f(x) \in Y$ を, それぞれ (x, x) および $(f(x), f(x))$ と同一視しており, ゆえに上式は $\Delta_f(x) = f(x)$ を意味している.

主張 3.3. Δ_f は $\delta X \setminus X$ 上で連続である.

各 $\omega = (z_1, z_2) \in \delta X \setminus X$ および, ω に収束する任意の有向点列 $(x_\lambda, y_\lambda) \in \gamma_1 X \times \gamma_2 X$ ($\lambda \in \Lambda$) に対して, 次の収束

$$\Delta_f(x_\lambda, y_\lambda) = (\gamma_1 f(x_\lambda), \gamma_2 f(y_\lambda)) \longrightarrow \Delta_f(\omega) = (\gamma_1(z_1), \gamma_2(z_2))$$

を確認すればよい. 第 1 座標への射影 $\text{proj}_1 : \delta X \rightarrow \gamma_1 X$ に事実 2.6 を適用すれば $z_1 = \text{proj}_1(\omega) \in \gamma_1 X \setminus X$ であり, 点 z_1 における $\gamma_1 f$ の連続性から $\gamma_1 f(x_\lambda) \longrightarrow \gamma_1 f(z_1)$ である. 同様の理由で $\gamma_2 f(y_\lambda) \longrightarrow \gamma_2 f(z_2)$ であり, ゆえに $\Delta_f(x_\lambda, y_\lambda) \longrightarrow \Delta_f(\omega)$.

主張 3.4. $\Delta_f(\delta X) \subset \delta Y$.

$\delta X \setminus X$ 上における連続性, および $\Delta_f(X) \subset \delta Y$, そして δY のコンパクト性により, δY は X の触点の像をすべて含むことが分かる. つまり $\Delta_f(\delta X) \subset \delta Y$ である.

主張 3.5. 粗写像 $f, g : X \rightarrow Y$ が近いならば $\delta f|_{\delta X \setminus X} = \delta g|_{\delta X \setminus X}$.

各 $\omega = (z_1, z_2) \in \delta X \setminus X$ について $\delta f(\omega) = \delta g(\omega)$ を示そう. 主張 3.3 の証明で述べたように, 事実 2.6 から $i = 1, 2$ について $z_i \in \gamma_i X \setminus X$ である. ゆえに $\gamma_i f(z_i) = \gamma_i g(z_i)$ であり,

$$\delta f(\omega) = \Delta_f(z_1, z_2) = (\gamma_1 f(z_1), \gamma_2 f(z_2)) = (\gamma_1 g(z_1), \gamma_2 g(z_2)) = \Delta_g(z_1, z_2) = \delta g(\omega).$$

以上の主張を合わせて $\delta \in \Gamma$ を得る. また, δ が共通の上界であることは, 射影 $\text{proj}_i : \delta X \rightarrow \gamma_i X$ ($i = 1, 2$) により明らかである. $\square$

上で構成した δ は, 実際は $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ の上限に一致している.

命題 3.6. Higson 関手 $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ は Γ の最大元である.

Proof. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\gamma \leq h$ を示したい. そのためには, γ と h の共通の上界である δ について, $h = \delta$ を示せばよい. これを背理法により示す. $h \neq \delta$ とすれば $h < \delta$ である. つまり, ある $X \in \mathcal{M}$ について $hX < \delta X$ となる. このとき射影 $p: \delta X \rightarrow hX$ は単射でないゆえ $\omega_1 \neq \omega_2$ かつ $p(\omega_1) = p(\omega_2)$ を満たす $\omega_1, \omega_2 \in \delta X \setminus X$ が存在する. そこで, 互いに交わらない ω_1 および ω_2 の閉近傍 $U, V \subset \delta X$ を取り, $A = U \cap X, B = V \cap X$ とすれば,

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) \in \text{cl}_{hX} A \cap \text{cl}_{hX} B$$

より $\text{cl}_{hX} A \cap \text{cl}_{hX} B \neq \emptyset$ である. よって, Higson コンパクト化の特徴づけ (命題 2.7) から, 十分大きい $M > 0$ について $Z = N_M(A) \cap N_M(B)$ は X の非有界部分集合となる. 各 $z \in Z$ に対して, $d(z, a_z) < M$ および $d(z, b_z) < M$ を満たす $a_z \in A$ および $b_z \in B$ をあらかじめ一つ選んでおき, 写像 $f_A, f_B: X \rightarrow X$ を次のように定める:

$$f_A(x) := \begin{cases} a_x & (x \in Z \text{ の場合}) \\ x & (x \notin Z \text{ の場合}) \end{cases}, \quad f_B(x) := \begin{cases} b_x & (x \in Z \text{ の場合}) \\ x & (x \notin Z \text{ の場合}) \end{cases}.$$

このとき, f_A, f_B は共に id_X に近く, ゆえにこれらは粗写像である. さて, Z の非有界性から, ある $\omega \in \delta X \setminus X$ に収束する有向点列 $z_\lambda \in Z$ ($\lambda \in \Lambda$) が取れる. このとき, 定義 2.9(3) の性質より $\delta f_A|_{\delta X \setminus X} = \delta \text{id}|_{\delta X \setminus X} = \text{id}_{\delta X \setminus X}$ である. $\delta f_A: \delta X \rightarrow \delta X$ の点 ω における連続性および $f_A(z_\lambda) \in A \subset U$ より

$$\omega = \text{id}(\omega) = \delta f_A(\omega) = \delta f_A\left(\lim_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \delta f_A(z_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda} f_A(z_\lambda) \in \text{cl}_{\delta X} U = U.$$

f_B に対しても同様に論じれば $\omega \in V$ を得る. すなわち $\omega \in U \cap V$ であり, これは U と V が交わらないことに矛盾する. $\square$

REFERENCES

- [1] A.N. Dranishnikov, J. Keesling, and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, *Topology* **37** (1998), no. 4, 791–803.
- [2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.
- [3] K. Mine and A. Yamashita, *Metric compactifications and coarse structures*, [arXiv:1106.1672v3](https://arxiv.org/abs/1106.1672v3).
- [4] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.