

壁面を流れる流体膜に生ずる表面波の理論

東大・工 仲矢 長次 (Choji Nakaya)

1. はじめに

垂直な壁面を厚さ h_0 の粘性流体が流れおるとき、定常流は壁面に平行で、自由表面は頂角をもつ放物線の形をもっている。この定常流を特長づけるために、レイノルズ数 R を

$$R = \frac{gh_0^3}{2\nu^2}$$

によって導入する。ここで g は重力、 ν は動粘性係数である。ところがこの定常流はすべりの R について観測される。小さく、比較的小さい R に対して、流体表面上に波が生ずる。

このような波を特長づけるためには、他の2つのパラメータを導入するのが適当で、それらは浅水パラメータ μ とウエーバー数 W で

$$\mu = \frac{h_0}{l_0}, \quad W = \frac{S}{\rho g h_0^2}$$

と定義される。ここには ρ は密度、 S は表面張力、 l_0 は下方に

向, 2 の波の代表的長である. 二光子の研究は主として線形理論, 弱非線形理論に限られて, 表面波を統一的に取り扱い, 任意の波長に対して波の理論をつくり, 研究するという試みはなから, 左ようになされる. ここではまず, 表面波を記述する方程式が厳密解として孤立解をもつことを示しそれによって周期解を構成していくつかの議論をする.

2. 表面波の方程式

直交座標系を壁面に平行に x 軸, 垂直に y 軸をとる. 二次元の非圧縮の粘性流体に対する運動の方程式は Ψ を流束の函数とすると

$$\begin{aligned} \Psi_{xxt} + \Psi_{yyt} - \Psi_x(\Psi_{xxy} + \Psi_{yyy}) + \Psi_y(\Psi_{xx} + \Psi_{xyy}) \\ = \nu(\Psi_{xxxx} + 2\Psi_{xxyy} + \Psi_{yyyy}) \end{aligned}$$

とかけると t は時間, ν は粘性係数である. この方程式の厳密解として

$$\Psi = \frac{\eta}{2\nu} \left(\ln y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right), \quad \bar{p} = p_0$$

がある. ここに p_0 は大気圧である. ところが流体中の運動が全うである, 自由表面は変位するが

$$y = h(x, t)$$

とあらわされ, Ψ も同様時間の函数になる. したがって Ψ を表わ

7. $\Rightarrow$ 以下のように変数変換を仮定し、2 章に入ります。

$$x = l_0 x^*, \quad y = l_0 y^*, \quad t = l_0 u_0^{-1} t^*, \quad \bar{\psi} = u_0 l_0 \bar{\psi}^*$$

$$\psi = u_0 l_0 \psi^*, \quad p = \rho g h_0 p^*, \quad h = h_0 h^*$$

$\Rightarrow$ u_0 は自由表面上の定常流の速度であり、 $\Rightarrow$ 以上、変数変換により、連立方程式と境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi_{yyyy} = \mu R [\psi_{yyt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xyy} - (\bar{\psi}_{yyy} + \psi_{yyy}) \psi_x] \\ - 2\mu^2 \psi_{xyy} + \mu^3 R [\psi_{xxt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xx} - \psi_x \psi_{xx}] \\ - \mu^4 \psi_{xxx}, \end{aligned}$$

$$\psi_x = 0, \quad y = 0,$$

$$\psi_y = 0, \quad y = 0,$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_{yy} + \psi_{yy} - \mu^2 \psi_{xx})(1 - \mu^2 \psi_{xx})(1 - \mu^2 h_x^2) \\ - 4\mu^2 \psi_{xy} h_x = 0, \quad y = h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{W \mu^2 h_{xx}}{(1 + \mu^2 h_x^2)^{3/2}} - p - \mu \psi_{xy} \frac{1 - \mu^2 h_x^2}{1 + \mu^2 h_x^2} \\ - \frac{4\mu^3 \psi_{xy} h_x^2}{1 - \mu^4 h_x^4} = 0, \quad y = h, \end{aligned}$$

$$h_t + [\bar{\psi}(h) + \psi(h)]_x = 0, \quad y = h.$$

$\therefore \sim 12$

$$p_2 = \frac{1}{2\mu} \psi_{yyy} - \frac{1}{2} R [\psi_{yt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xy} - (\bar{\psi}_{yy} + \psi_{yy}) \psi_x] + \frac{1}{2} \mu \psi_{xx} y,$$

である。

μ の 4, 3, 2, 1

$$\psi = \psi^{(0)} + \mu \psi^{(1)} + \mu^2 \psi^{(2)} + \dots$$

$$p = p^{(0)} + \mu p^{(1)} + \mu^2 p^{(2)} + \dots$$

の解の形を仮定する。簡単な計算から

$$\psi^{(0)} = (h-1) y^2,$$

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} = & \left(\frac{2}{3} R h^4 h_x + \mu^2 W h h_{xxx} \right) y^2 - \frac{1}{3} \mu^2 W h_{xxx} y^3 \\ & - \frac{1}{6} R h^2 h_x y^4 + \frac{1}{30} R h h_x y^5 \end{aligned}$$

となる。これを変位 $h(x, t)$ を変化する方程式に代入する

と、次の方程式を得る

$$\begin{aligned} h_t = & -2 h^2 h_x - \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 h_{xx} + \frac{16}{5} R h^5 h_x^2 \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 h_{xxxx} + 2 \mu^2 W h^2 h_x h_{xxx} \right), \end{aligned}$$

これは変位 $h(x, t)$ を記述する方程式で、これを解くことは

困難である。従ってここではこれを解くことはしない。

3. 孤立波

上に記した方程式の解を

$$h = h(\xi), \quad \xi = x - ct$$

の形で求めよう。ここで c は波の速度である。上の式を代入すると

$$-c \frac{dh}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left[\frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) \right] = 0$$

を得る。これは一回積分する。

$$-ch + \frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) = A,$$

ここで A は積分定数である。上の式の解を

$$h \rightarrow k, \quad \xi = \pm \infty$$

とすると求めよう。上の条件から

$$A = -ck + \frac{2}{3} k^3$$

を得る。ここで A を表わす定数は流体膜の厚さである。上式を ξ に対して新しい変数

$$\eta = \varepsilon^{-1} \xi, \quad \varepsilon = \mu W^{1/3},$$

により、2乗入しよう。変数 η を使うと上の方程式は

$$-ch + \frac{2}{3}h^3 + \frac{8}{15} \frac{R}{W^{1/3}} h^6 \frac{dh}{d\eta} + \frac{2}{3} h^3 \frac{d^3 h}{d\eta^3} \\ = -ch + \frac{2}{3}k^3,$$

$$h \rightarrow k, \quad \eta \rightarrow \pm\infty$$

とかく = とかく正なる。

上の方程式と境界条件をみたす解を求めよ。ために $\eta \rightarrow \pm\infty$ の振舞いをしらべよう。

$$h = h' + k \quad h' \ll k$$

とかくを代入すると

$$\left(-\frac{3c}{2k^3} + \frac{3}{k}\right)h' + \frac{4}{5} \frac{Rk^3}{W^{1/3}} \frac{dh'}{d\eta} + \frac{d^3 h'}{d\eta^3} = 0.$$

とかくが展開の方程式が求まる。この解はわかると

$$h = \exp(\sigma\eta)$$

とかく = とかく正なる。 σ は使った式

$$\sigma^3 + 3r\sigma + s = 0.$$

== 6

$$r = \frac{4}{15} \frac{R k^3}{W l_3}, \quad S = \frac{3}{k} - \frac{3}{2} \frac{C}{k^3}$$

である。三次方程式の根のうち1根は正で、他の二根は実部が負の共役であることを考えたと上流解で

$$h_u = k + C_1 \exp(\alpha \eta), \quad \eta < \eta_1,$$

下流解で

$$h_d = k + C_2 \exp(\beta \eta) \cos(\gamma \eta + \delta) \quad \eta \geq \eta_2$$

とかけた。区間 $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ の数値積分し、左結果と上の式とを接続させることにより、連続した無限大の孤立解のモードが得られる。

4. S-解

上に求められた孤立波は、各々が十分にはずれているかぎり独立に運動する。したがってこれらの孤立波が定常流の上に存在する流れは一般には周期性はない。ところが同じ孤立解を同じ間かくで並べると周期解となる。この間かくを

$$\Lambda = 2\pi l_0$$

とすると、

h は 2π 周期

$$h(\xi) = h(\xi + 2\pi)$$

が成り立つ。さらに $\lambda = \Lambda / h_0 \in \frac{2\pi}{h_0} \lambda$ となる

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \mu$$

が成り立つ。上の式は浅水波の分散関係の意味をもつ。とわかる。周期 $[0, 2\pi]$ に一つの孤立解が存在するようになると

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\xi) d\xi = 0.$$

上式を変形すると

$$\mu = \frac{2\pi(1-k)}{W^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} [h(\eta) - k] d\eta}$$

が得られる。この式から μ は R と k の関数である。

5. f -解

上記の f -解は孤立波の速度

$$\Delta \xi \sim \mu W^{1/3}$$

が次の関係式

$$\mu W^{1/3} \ll 2\pi$$

をみたすかぎり正しい。ところが μ が大きくなること上、条件を周期解といたし、1-解が満足しなくなる。たとえ方程式にたとって2解を求めるときが必要になる。

そのために仮定

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(in\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \exp(-in\xi) + 1$$

とフーリエ級数展開してその係数 a_n を求めればよい。表面の変位を表わす式に代入すると

$$\ln \left[2 - c + in\mu \left(\frac{8}{15} k - \frac{2}{3} n^2 \mu^2 W \right) \right] a_n = M_n,$$

これは $M_n(a_1, \dots, a_n)$ は非線形項である。 $n = N$ 付近で切り切ると、未知数は $\mu, c, a_1, \dots, a_N$ の $2N+1$ 個の微分方程式は $2N$ 個あるから、 μ を決めると、あとの変数 $c, \dots, a_1, \dots, a_N$ は一意に決定される。

6. 流量

これを把握かつとる流体層の厚さ h_0 は、周期解のばあいは平均厚さと一致する。実験によつて流量を測定して、

値から厚さ h_0^* を求めることを行われたい。流量 Q は

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_i d\xi,$$

$$q_i = \frac{2}{3} h^3 + \frac{8}{15} \frac{R}{W^{1/3}} h^6 h_\eta + \frac{2}{3} h^3 h_\eta \eta$$

であるから、簡単を計 $\frac{2\pi}{\epsilon}$ かつ

$$Q = \frac{2}{3} k^3 + Q_s,$$

$$Q_s = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi/\epsilon} \left[\frac{2}{3} (h^3 - k^3) + 2h h_\eta^3 \right] d\eta$$

とかけると、方程式を利用し

$$Q_s = (1-k)C$$

が得られる。この流量 Q は (4) の Q と厚さ h の比

$$r = \frac{h_0^*}{h_0}$$

は

$$r = \left(\frac{3}{2} Q \right)^{1/3}$$

であるから、 r によって求められる、 h_0^* から対応する理論と実験との比較が可能である。

7. まとめ

a. 表面の変化を記述する方程式の厳密解として、孤立解が存在する。

b. これらの孤立解を等しい向かくて重ねると、同期解が得られ、その各々の線形・弱非線形形の波とななる解の族を構成する。

c. 実験から観測される波数は、これらの解の族の1つれかに属する。