

Dirac induction of semisimple Lie groups

岡山大教養部 梶原 毅

本論説では connected semisimple Lie group の reduced group C^* -algebra の K -theory を考える。これは、講求録 598 "球調和関数並びにそれによる δ 超関数の展開" における河上氏との共著の論説 "表現論と K -理論" の補足である。 C^* -algebra の K -theory は、 topological K -theory を C^* -algebra に移したもので、多くの応用を持っている。ここでは、一般論については述べない。これについては、多くの解説または概説が存在する。いかなる理論においてもそうであるが example の計算は、重要な問題である。 Locally compact group の reduced group C^* -algebra はたしかに興味ある example を提供しており、これらの K -group を計算することが、当然やらなければならないことである。 Discrete group については、特に興味ある問題であるが、ここでは触れない。 Connected Lie group に話を限定する。

1. 歴史

Connected Lie group の K -theory に関する有名な Connes-Kasparov conjecture に触れる前に connected Lie group の K -Theory の歴史について、少し振り返ってみたいと思う。 G を compact Lie group とする。これについては、表現論において古くから知られている Peter Weyl Theorem が C^* -algebra のレベルにおいても成立し、

$$C^*(G) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} M(C, d(\pi))$$

であるから、compact Lie group の group C^* -algebra の K -group の計算は、matrix algebra の計算に帰着され、これから $K_0(C^*(G)) = R(G)$, $K_1(C^*(G)) = \{0\}$ である。ここで、 $R(G)$ とは、 G の表現環である。これは、一つの極端な例であるといえよう。

次に G を simply connected solvable Lie group としよう。この種の群は可解性の定義によって、 R の semi-direct product によって、構成されている。従って、 R による C^* -crossed product の K -theory が support されていればよい。A. Connes の Thom isomorphism [4] によって、 $C^*_r(G)$ の K -group は、 R の次元によって、もし even であれば、 K_0 が $\mathbb{Z}$ で K_1 が 0 であり、odd であれば、この逆になる。Simply connected solvable Lie group の表現論の多様性に対して、この K -theory の単純性は興味深い。これが、もうひとつの極端な例である。

全く異なっているように見える、この二つの定理を統一するものは無いであろうか。Compact group の場合には、群構造を正確に反映しているのに対して、Solvable case では、dimension の parity にのみ依存している。

以上のどちらでもない case を考えるための一つの手掛かりとして、semisimple Lie group のなかで最も簡単であり、また基本的な例である、 $SL(2, \mathbb{R})$ をとって考えよう。Classical な Bargmann の表現論を用いると、 $SL(2, \mathbb{R})$ の reduced group C^* -algebra の構造を具体的に書き下すことができる。それは、ほぼ G の dual を用いた Fourier transform であるが、dual が Hausdorff でないので少し込み入っている。詳細については Lipsman [7] を参照された

い。

Reduced group C^* -algebra は、表現によって、いくつかの part の direct sum に分かれる。Integrable な discrete series は dual の中で open point となる。Integrable でない discrete series は open にはならないが、reduced dual の中で考えると open になっている。このことから discrete series は compact operator algebra を生成するので K -group の generator を与える。

Limit of discrete series の二つの表現は odd principal series の closure に入っている。Even principal series は、topological には、1 次元の cone であるから K -theory 的には null homotopic である。すなわち、even principal series は、 K -theory に全く寄与しない。Odd principal series について同様に考えると 1 次元の cone に one point がくっついているような image である。A.Valette [10] の方法で解析すると、この部分は K -theory 的に見れば compact operator algebra と同じように振舞うことが判る。すなわち limit of discrete series の二つの表現は、ひとつの K_0 -group の generator を与える。 K_1 -group については、全て 0 になる。

以上のことから、 K -group については、maximal compact subgroup の表現論が非常に密接に関係していることがわかる。今の場合は、単に torus の表現論にすぎないが。具体的に考えると maximal compact subgroup の character から holomorphic induction をおこなうことによって、discrete series は全て得られる。Holomorphic induction とは、要するに G -invariant first order elliptic differential equation の解空間に表現を実現すること

である。則ち、induction プラス elliptic operator である。Limit of discrete series と odd principal series の場合については、それほどはっきりとした対応は見付けられない。

$SL(2, \mathbb{R})$ の holomorphic induction は、Blattner [3] によって考えだされ、Kostant によって一般的に定式化された。そのあと、Atiya-Schmidt [1], Parthasarathy [8] は、semisimple Lie group の discrete series の Dirac operator を用いた新たな構成法を与えた。Discrete series については以前 Harish-Chandra によって分類が行われているが、それは具体的な構成を伴ったものではなかった。この話題については、西山氏による論説に詳しい。この理論および Atiya-Singer の elliptic operator の index theory が semisimple Lie group の K-theory に強いインパクトを与えた。

2. Dirac induction

G は connected Lie group とし、 K は maximal compact subgroup とする。 K の irreducible representation から $C^*(G)$ の K-group の element を具体的に構成することを考える。ただし K-group の element の与え方は Kasparov 流によっておこなう。

q は G/K (vector space) の dimension とする。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ は G, K の Lie algebra とする。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ で $\mathfrak{g}$ の Cartan decomposition とする。 $\mathfrak{g}$ の Killing form B は Cartan decomposition の定義から $\mathfrak{p}$ 上に positive definite な scalar product を与える。このことから K から $SO(p)$ への isotropy representation が定義される。

この表現が $\text{Spin}(p)$ まで lift できるとき、 G/K は G -invariant spin structure を持つという。このとき、 G は acceptable であるという。ただし $\text{Spin}(p)$ は $\text{SO}(p)$ の double cover であるから G の適当な double cover をとればこの条件は常にみたされている。ここでは、簡単のため G は acceptable であるとする。

S で $\text{Spin}(p)$ の spin module を表す。 S は $[q/2]$ -dimensional representation で、 q が odd ならば irreducible で、even ならばふたつの component S^+ と S^- の direct sum に分解する。我々は、 G/K が G -invariant spin structure を持つと仮定しているのだから S を K の表現とみなすことができる。このようにして作られた K の表現を χ と表す。さて、 ρ で K の任意の finite dimensional representation を表す。 $\rho \otimes \chi$ に associate する G/K 上の homogeneous vector bundle を考える。この bundle の compact support をもつ C^∞ section 全体 $(C_c(G), \rho \otimes \chi)^K$ は次の式で与えられている。

$(C_c(G), \chi \otimes \rho)^K = \{ \xi : G \rightarrow \chi \otimes \rho, \xi \text{ is continuous with compact support and, for any } g \in G, k \in K, \xi(gk) = (\xi \otimes \rho)(k^{-1}) \cdot \xi(g) \}$ 。

The Dirac operator D_ρ with coefficient ρ とは、上の section space の上に作用する G -invariant elliptic differential operator で次の式によって与えられる。 p の ortho normal basis $(Y_i)_{1 \leq i \leq q}$ をひとつ固定する。

$$D_\rho = \sum_{i=1}^q \gamma_i \otimes c(Y_i) \otimes 1$$

ここで $c(Y)$ は vector Y による Clifford multiplication を表す。この operator は elliptic で G -invariant かつ formally self-

adjoint である。さらに q が even であれば bundle の grading と anticommute する。このときは、Kasparov [5] によって degree $q \pmod{2}$ の unbounded Kasparov element を与える。この $K_q(C_\gamma^*(G))$ の element のことを D_ρ の analytical index と呼び $\text{Ind}_a(D_\rho)$ と表す。 ρ から analytic index への map は $R(K)$ から $K_q(C_\gamma^*(G))$ への group homomorphism に拡張することができる。この map を Δ とかいて Dirac induction とよぶ。

さてここに至っていよいよ Connes-Kasparov conjecture を述べることができる。

Conjecture: Dirac induction Δ は group isomorphism を与える。

この conjecture の意味を考えることは、少なくとも素人にとってはたいへん難しい。Kasparov により、proper G -manifold のどのような G -invariant first order elliptic differential operator をとっても K -group の element を与えることが解っている。この conjecture は proper G -manifold G/K の Dirac operator を考えればそれで K -group を generate してしまうということを意味している。また、深く考えれば analytic index の値は elliptic operator そのものではなく、underlying homogeneous vector bundle にのみ depend するものであるらしい。そうすると Dirac operator が用いられる意味とはなんだろうか。唯一つ私に判ることとは、Dirac operator の square はいわゆる Laplacian だから、irreducible representation の spaceの上では、scalar になり

Parthsarathy の結果 [8] によって比較的容易に計算できることである。

この conjecture はまず R.Plymen によって考察された。かれは complex semi-simple Lie group について、reduced dual が Hausdorff になることから reduced group C^* -algebra が flat な continuous field になることを示し K -group を具体的に計算した。彼の最初の preprint では Dirac induction についてはふれられていないが、彼は後に Penington との共著の論文 [9] を発表し、そこで complex group に対して Connes-Kasparov conjecture を完全に解決した。それはやはり Dirac operator の square を具体的に計算するものである。

また Kasparov は Connes とは独立に amenable Lie group に対して上の conjecture を証明している。また 彼は、Lorentz group 等の特別な real rank 1 semi-simple Lie group に対して、conjecture を abstract な方法によって示している。ただし Kasparov の論文は非常に読みにくいのが特徴であり、証明の内容などよく判らない。

次に、conjecture を出した Connes の弟子である A.Valette は [11], [12] において、real rank 1 の場合、及び、Cartan subalgebra の conjugacy class が unique な場合に対して検証を行った。前者の example は $SO(n,1)$, $SU(n,1)$ などである。Real rank 1 であれば表現論も比較的扱い易く、またすでに Lipsman [7] によって dual topology が完全に決定されている。 q が even な場合 K_0 -group の element を与えるのは discrete series 及び reducible principal series である。それに対して、 q が odd の場合には

K_0 -group は 0 になってしまう。これは Kasparov が最初に考えたことであるが、 K -theory の研究は discrete series の存在及び principal series の reducibility と深い関係を持っている。

後者の典型的な例は complex semisimple Lie group で、やはり dual が Hausdorff になり C^* -algebra の構造ははなはだ簡単である。ただし reduced dual の元は cuspidal parabolic subgroup からの induced representation として与えられる。一般には cuspidal parabolic subgroup の conjugacy class は unique ではない。Cartan subalgebra が unique で complex でない典型的な例は $SL(3, \mathbb{R})$ である。

Valette の論文が書かれた直後、この conjecture は linear semisimple の場合まで A. Wasserman [13] (入手不能), および Penington (ph.D) によって独立に証明され、linear という仮定は、その直後に誰かによってはずされた。彼等の証明は、semisimple Lie group の表現論の非常に深い結果、Plancherel formula, limits of discrete series, intertwining operator, theory of K -type, classification of tempered irreducible representationなどをフルに用いるものではなはだ解析的であり、全く Kasparov の精神にもとるものである。

さて、以上でこの話は終わりである。しかし表現論を全く用いない geometric な証明が出現するまで、決して本当に終わったとはいえないであろう。そのような証明はもし可能であれば connected Lie group の K -theory に関する Connes-Kasparov conjecture を特別な例としてふくむ極めて一般的な、いわゆる Baum-Connes con-

jecture [2] の証明のあるべき姿を示唆するであろう。また、表現論の方に帰れば、discrete series の存在に関する Harish-Chandra の定理、また principal series の reducibility に関する Knapp-Stein [6] の定理の、より判りやすい別証明を与えることになるであろう。

References

- [1] M. Atiyah and W. Shmidt, A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups, *Inv. Math.*, 42(1977)1-62.
- [2] P. Baum and A. Connes, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, preprint.
- [3] R. J. Blattner, On induced representation II : Infinitesimal induction, *Amer. J. Math.*, 83(1961)499-512.
- [4] A. Connes, An analogue of Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebras by an action of R , *Adv. Math.*, 39(1981)31-55.
- [5] G. G. Kasparov, The operator K-functor and extensions of C^* -algebras, *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Math.*, 44(1980)133-150.
- [6] A. W. Knap and E. M. Stein, Intertwinig operators for semisimple Lie groups, *Ann. Math.*, 93(1971)489-578.
- [7] R. L. Lipsman, The dual topology for the principal series and discrete series on semisimple groups, *Trans. AMS*

- 152(1970)399-417.
- [8] K.R.Parthasarathy, Dirac operators and discrete series, Ann.Math., 96(1972)1-30.
 - [9] M.G.Penington and R.J.Plymen, The Dirac operator and the principal series for complex semi-simple Lie groups, J.Funct.Anal., 53(1983)269-286.
 - [10] A.Valette, Notes on the structure and the K-theory of the C^* -algebras associated with $SL(2, \mathbb{R})$, to appear in Bull.Soc.Math.Belgique.
 - [11] A.Valette, K-theory for the reduced C^* -algebra of a semi simple Lie group with real rank 1 and finite center, to appear in Quarterly J.Math.
 - [12] A.Valette, Dirac induction for semi-simple Lie groups having one conjugacy class of Cartan subgroups, preprint
 - [13] A.Wasserman, A proof of Connes-Kasparov conjecture for linear reductive Lie groups, preprint.