

喫煙をめぐる人口動態の数理解析：感染症モデルの応用

Mathematical Analysis of smoking population dynamics:

An epidemiological model

¹ 高科直・² 浅尾晃央・³ 中村直俊

¹ 立正大学地球環境科学部, ² 大阪大学大学院生命機能研究科 ³ 東京大学大学院医学系研究科

¹Nao TAKASHINA, ²Akihiro ASAO, ³Naotoshi NAKAMURA

¹Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho University,
1700 Magechi, Kumagaya, Saitama 360-0194 Japan

²Graduate school of Frontier Biosciences, Osaka University
1-3 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871 Japan

³Graduate School of Medicine and Faculty of Medicine, The University of Tokyo
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-0033 Japan
nao.takashina@gmail.com

In recent years, the situation surrounding smokers is gradually changing, due in part to rising tobacco tax, the introduction of taspo to prevent underage smoking, as well as the revised law to reduce secondhand smoke in public places. We use a mathematical model to analyze the population dynamics of smokers, non-smokers and quitting smokers. We apply an epidemiological model and focus on the stability of trivial and non-trivial equilibriums using local stability analysis.

1 はじめに

近年, 未成年者の喫煙防止を目的とした taspo の導入や, たばこ税の引き上げ, 受動喫煙防止条例の施行など, 喫煙をめぐる話題が大きく取り沙汰される。タバコは多くの人にとって身近なものであるため人々の関心を引きやすく, それゆえ容易に社会問題へも発展する。

日常的な喫煙は, 健康リスクを高める要因となることが知られている。発病の可能性は, 喫煙者の年齢, 喫煙開始の年齢, タールやニコチンの含有量やフィルタータイプ, 1 日の消費量などに依存する [6]。JT が 2009 年に行った「全国たばこ喫煙者率調査」によると, 成人男性の平均喫煙率は 38.9% で 18 年間連続の減少となったが, 成人女性の喫煙率は 11.9% で, 1966 年のピーク時である 18% から漸減してはいるものの, ここ数年はほぼ横ばいの状況が続いている [9]。先に述べた, たばこ税の引き上げや, 飲食店などを中心とする分煙の推進など, 喫煙者を取巻く環境の変化により, 喫煙者の人口は今後も減少してゆくことが予測されるが, 「全国たばこ喫煙者率調査」における成人女性の喫煙率の推移は, 周囲の環境の変化に影響を受けにくい人口が存在することを示唆する。

本研究では, Kermack と McKendrick [4] により導入された, 人口を 3 つのクラス (Susceptible, Infectious, Recovered) に分けて, それらの動態を考察する SIR モデルを応用し, 喫煙を取巻く人口動態の数理解析を行う。近年, このようなモデルはその設定を変更することで様々な分野に応用されている。例えば, 大学キャンパス内における未成年のアルコール摂取者の動態, コンピューターウイルスの伝播, アイデアが広がってゆく過程を示した研究がある [5, 7, 1]。一般に, 複雑な要素を包含する人口動態を数式で記述することは困難であるが, その現象を左右する主たる要素が何であるかを知るためには効果的である。本稿においては人口を非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の 3 つのクラスにわけ, 常微分方程式によってこれらの人口動態を記述し, 喫煙者が恒常的に存在する条件やその力学的安定性を, 数学的な解析を用いて考察した。

2 モデル説明

我々は集団における人口を 3 つのクラス, (N) 非喫煙者 (Non-Smoker), (S) 喫煙者 (Smoker), (Q) 禁煙者 (Quitting-Smoker) に分けてその動態を考える。非喫煙者は喫煙者と出会うと, 一定の割合で喫煙者へと移行する。また, 喫煙者が非喫煙者と出会うと一定の割合で禁煙者へと移行する。禁煙者は他のクラスの

人口に影響を与えることは無いが、一定の割合で非喫煙者へと移行し、再び喫煙者へと移行する可能性が生じる。これら3段階の図式は以下のように表せる。

$$N \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow N.$$

非喫煙者が喫煙者へと移行する場合、その移動の割合は喫煙者の存在の度合いによって代わってくることが予想され、これら3段階の人口動態を、感染症の人口動態によく用いられるような、Kermack-McKendrickのSIRモデルを改変し、

$$\begin{aligned} T &= N + S + Q \\ \dot{N} &= \mu T - \mu N - \sigma NS + \rho Q \\ \dot{S} &= -\mu S + \sigma NS - \gamma NS \\ \dot{Q} &= -\mu Q + \gamma NS - \rho Q \end{aligned} \quad (1)$$

と表す。ここで μ は1人あたりの出生率と死亡率で $1/\mu$ は平均寿命である。 σ は N が S と出会い喫煙者へと移行する割合、 ρ は Q が禁煙に成功して N へと移る割合、 γ は S が N と出会い禁煙者へと移行する割合を表す。ここで

$$\mu, \sigma, \rho, \gamma \geq 0$$

が成り立つ。また、出生率と死亡率が一定であるという仮定より、(T)総人口 (Total Population) は一定である。つまり

$$\dot{T} = 0, \quad (2)$$

が成り立っている。更にモデル(1)においては、次の定理が成り立つ ([3] 定理 21.1, [2] 定理 A4)。

定理 1 任意の $N_0, S_0, Q_0 \geq 0$ に対し、

$$N(0) = N_0, S(0) = S_0, Q(0) = Q_0$$

なるモデルの解 N, S, Q は区間 $[0, \infty)$ で一意的に存在し、かつ

$$N(t), S(t), Q(t) \geq 0, T(t) = T(0), \forall t \geq 0$$

を満たす。

ここで、 T が定数であるという仮定から、

$$x = \frac{N}{T}, \quad y = \frac{S}{T}, \quad z = \frac{Q}{T} \quad (3)$$

とにおいて、従属変数 N, S, Q に関して無次元化を行うとモデル(1)は、

$$\begin{aligned} 1 &= x + y + z \\ \dot{x} &= \mu - \mu x - \sigma Txy + \rho z \\ \dot{y} &= -\mu y + \sigma Txy - \gamma Txy \\ \dot{z} &= -\mu z + \gamma Txy - \rho z \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる。ここで x, y, z は人口を比率で表したものである。さらに $\tau = \sigma T$ とにおいてタイムスケールも無次元化するとモデル(4)は

$$\begin{aligned} 1 &= x + y + z \\ x' &= \nu(1 - x) - xy + \phi z \\ y' &= -\nu y + xy - \theta xy \\ z' &= -\nu z + \theta xy - \phi z \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける。ここで ' は無次元化したタイムスケールに関する微分を表す。また、

$$\nu = \frac{\mu}{\sigma T}, \quad \phi = \frac{\rho}{\sigma T}, \quad \theta = \frac{\gamma}{\sigma} \quad (6)$$

である。

モデル (4) に関して、基本再生産比

$$R_0 = \frac{1}{x^*} = \frac{1-\theta}{\nu} \quad (7)$$

を考えると次の定理が得られる [3]。

定理 2 (a) $R_0 \leq 1$ のときモデル式 (4) には人口学的に有意な定常状態が 1 つしか存在しない。それは喫煙者のいない定常状態 $E_0 = (x_0^*, y_0^*, z_0^*) = (1, 0, 0)$ である。

(b) $R_0 > 1$ のとき、モデル式 (4) には人口学的に有意な定常状態が 2 つ存在する。それは喫煙者のいない定常状態 E_0 と、人口中に 3 つのクラスが共存する平衡点

$$E_r = (x_1^*, y_1^*, z_1^*) = \left(\frac{\nu}{1-\theta}, \frac{(1-\theta-\nu)(\nu+\phi)}{\nu+\phi(1-\theta)}, \frac{\theta\nu(1-\theta-\nu)}{(1-\theta)(\nu+\phi-\theta\phi)} \right) \quad (8)$$

である。

ここでモデル (4) の第 1 式を用いると、モデル (5) から z が消せてモデルを

$$\begin{aligned} x' &= \nu(1-x) - xy + \phi(1-x-y) \\ y' &= -\nu y + xy - \theta xy \end{aligned} \quad (9)$$

と書き直すことが出来る。

3 モデルの解析

3.1 $R_0 > 1$ のとき

基本再生産比が $R_0 > 1$ を満たすとき、定理 2 より、人口学的に有意な平衡点は 2 つ存在する。平衡点の局所安定性を、モデル (9) を用いて解析する。モデル (9) において

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とし、

$$F(x) = \begin{pmatrix} \nu(1-x) - xy + \phi(1-x-y) \\ -\nu y + xy - \theta xy \end{pmatrix}$$

とすると、モデル (9) は

$$x' = F(x) \quad (10)$$

と書ける。式 (10) の右辺に関して平衡点 (x^*, y^*) の近傍において線形化を施すと、ヤコビ行列式

$$\begin{pmatrix} -\nu - \phi - y^* & -\phi - x^* \\ (1-\theta)y^* & -\gamma + (1-\theta)x^* \end{pmatrix} \quad (11)$$

が得られる。式 (11) から特性方程式、

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \quad (12)$$

が得られる。ここで,

$$\alpha = (\theta - 1)x^* + y^* + 2\nu + \phi \quad (13)$$

$$\beta = (\theta\phi + \theta\nu - \phi - \nu)x^* + (\nu + \phi - \theta\phi)y^* + \nu^2 + \nu\phi \quad (14)$$

である。ここから、次の定理が得られる。

定理 3 モデル (5) において $R_0 > 1$ を満たすとき、(I) 自明な平衡点 E_0 は不安定、(II) 共存平衡点 E_r は局所漸近安定である。

証明 (I) モデル (5) の特性方程式 (12) において $\alpha > 0$, $\beta > 0$ が成立すれば、Routh-Hurwitz の判定法が適応でき、共存平衡点は局所漸近安定であるといえる。式 (13) の x^* , y^* に自明な平衡点 E_0 の値を代入すると

$$\beta = (\theta + \nu - 1)(\nu + \phi) < 0$$

となり局所漸近安定であるための必要十分条件を満たさない。よって自明な平衡点は不安定である。

(II) 同様の議論により、式 (13) の x^* , y^* に平衡点の値 (8) を代入すると

$$\alpha = \frac{(1 - \theta)(1 + \phi)(\nu + \phi)}{\nu + \phi(1 - \theta)}$$

が得られる。定理 2 と、式 (7) より、人口学的に有意な平衡点を持つとき $1 - \theta - \nu > 0$ を満たしているので $\alpha > 0$ である。同様に、式 (14) の x^* , y^* に平衡点の値 (8) を代入すると

$$\beta = (1 - \theta - \nu)(\nu + \phi)$$

が得られるが、上の仮定より $\beta > 0$ である。

以上よりモデル (5) が共存平衡点を持つとき、特性方程式は Routh-Hurwitz の判定条件を満たすので、平衡点は局所漸近安定である。

以上 (I),(II) より証明が完了する。 $\square$

安定性の条件を見ると、パラメータ θ , ν の値に大きく依存することがわかる。これらの値は γ/σ , $\mu/(\sigma T)$ でありそれぞれ「非喫煙者が喫煙者へ移行する割合」と「喫煙者から禁煙者へと移行する割合」の比、「出生または死亡の割合」と「総人口が喫煙者であるときに非喫煙者が喫煙者へ移行する平均時間」の比を表す。これらの比の大きさを変化させることができれば、共存平衡点が安定性を失うことを意味している。

3.2 $R_0 \leq 1$ のとき

この場合、定理 2 より系は唯一つの自明な平衡点 E_0 をもつ。ただし、平衡点は $R_0 < 1$ の場合と $R_0 = 1$ の場合でその性質を異にする。 $R_0 < 1$ を満たすとき自明な平衡点 E_0 について局所安定性解析を行うと、以下の定理が得られる。

定理 4 モデル (5) において、 $R_0 < 1$ を満たすとき、自明な平衡点は局所漸近安定である。

証明 ヤコビ行列式 (11) に自明な平衡点の値 $(x_0^*, y_0^*) = (1, 0)$ を代入すると

$$J = \begin{pmatrix} -\nu - \phi & -1 - \phi \\ 0 & -\nu - \theta + 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

となる。ここで

$$\text{trace} J = 1 - \theta - 2\nu - \phi < 0$$

$$\det J = (1 - \nu - \theta)(-\nu - \phi) > 0$$

より, すべての固有値が負の実部を持つので, 平衡点は局所漸近安定である。以上より証明が完了する。 □

$R_0 = 1$ を満たすときには $1 - \nu - \theta = 0$ より式 (15) はゼロ固有値を持つことがわかるが, この場合も定性的手法によって, 考察する範囲においては平衡点が安定であることがわかる。実際, アイソクラインを描いて定性的に平衡点の安定性を調べると, 平衡点はサドルノードであることがわかる。人口学的に有意な $0 \leq x \leq 1$ における範囲においては平衡点はノードであるので平衡点は安定である (図 1)。

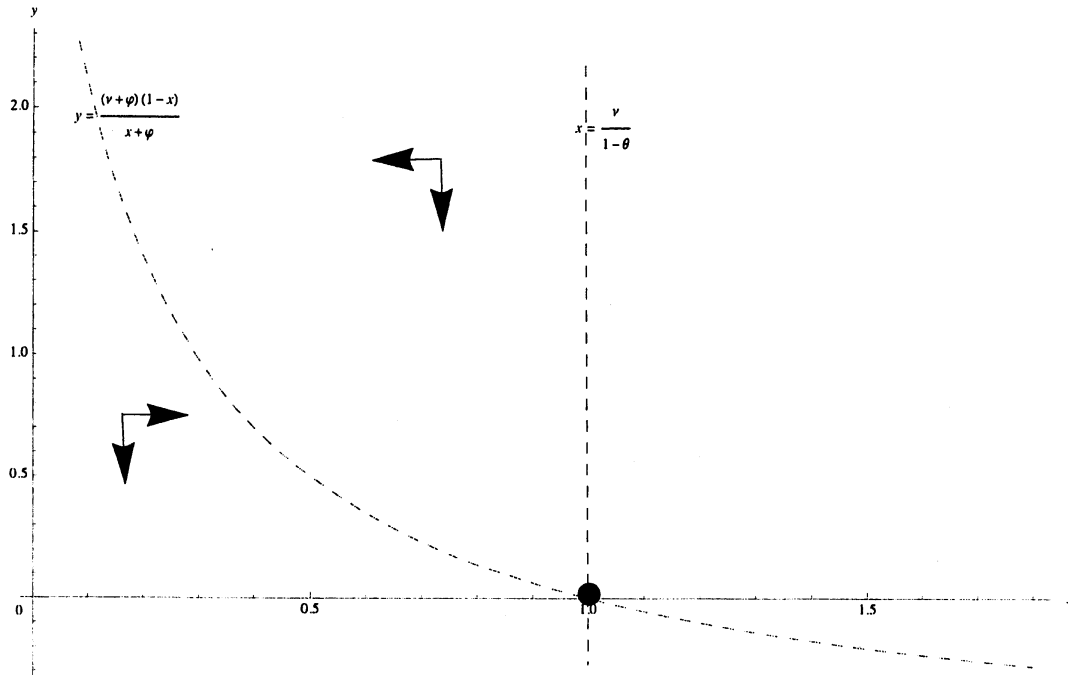


図 1: $R_0 = 1$ のときの解軌道

4 考察

本稿では, 喫煙をめぐる人口を 3 つのクラスにわけ, Kermack-McKendrick の感染症モデルを応用し, これら 3 つのクラスの人口動態ダイナミクスを解析した。 $R_0 \leq 1$ を満たすとき系は唯一つの自明な平衡点 E_0 を持ち, その点は安定であった。 $R_0 > 1$ を満たすときには系は 2 つの平衡点 E_0, E_r をもち, 自明な平衡点 E_0 は安定性を失い, 一方で共存平衡点 E_r は局所漸近安定となった。共存平衡点において, その安定性にはとくに θ , つまり γ/σ の値が重要である。これは, 喫煙者へと移行する割合よりも禁煙者へと移行する割合が高ければ, 共存平衡点の安定性をなくすことが出来ることを示唆する。パラメータ上ではその割合が数値で示されるが, 喫煙のリスクに関する教育や, 喫煙者に対する禁煙のサポートが充実すれば, これらの割合を変化させてゆくことが出来るだろう。

本稿においては, ステージ移項の割合は線形の係数によって与えられていたが, 多くの場合, 線形による表現だけでは不十分である。また, 各ステージの人口が他ステージの人口と出会い, 別のステージへと移項する段階で, 時間遅れを導入したほうがより現実的な解釈ができるようになる [8]。これらの要素をモデルに組み込むことで, より現実 に即した結果が得られるだろう。

参考文献

- [1] L.M.A. Bettencourt, et al., The power of a good idea: quantitative modeling of ideas from epidemiological models, Physica A 364 (2006), pp. 513-536.

- [2] Horst R.Thieme, 斉藤 保久監訳 (2006) 生物集団の数学 (上) 人口学, 生態学, 疫学へのアプローチ. 日本評論社
- [3] Horst R.Thieme, 斉藤 保久監訳 (2006) 生物集団の数学 (下) 人口学, 生態学, 疫学へのアプローチ. 日本評論社
- [4] W.O. Kermack and A.G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A 115 (1927), pp. 700-721.
- [5] J.L. Manthey et al., Campus drinking: an epidemiological model, J. Biological Dynamics Vol. 2, No. 3 (2008), pp. 346-356.
- [6] Peto R. Influence of dose and duration of smoking on lung cancer rates. In: Zaridze DG, Peto R. Tobacco: a major international health hazard. Lyon: International Agency for Research on Cancer, 1986.
- [7] J.R.C. Piqueira et al., Epidemiological models applied to viruses in computer networks, J. Comput. Sci. 1 (2005), pp. 31-34
- [8] Yuliya N. Kyrychko and Konstantin B. Blyuss, Global properties of a delayed SIR model with temporary immunity and nonlinear incidence rate, Nonlinear Analysis: Real World Applications 6(2005), pp.495-507
- [9] 「2009年度プレリリース|JT ウェブサイト」 <http://www.jti.co.jp/investors/press_releases/2009/0814_01/index.html> (2010/4/3 アクセス)