

Higson コンパクト化と Wallman 型コンパクト化 (Higson compactifications and Wallman-type compactifications)

Yasser F. Ortiz-Castillo

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

Artur Hideyuki Tomita

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

愛媛大学大学院理工学研究科 山内貴光

Takamitsu Yamauchi

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

Higson コンパクト化は, 非コンパクトな完備リーマン多様体に対する指数定理の研究において Higson によって導入されたコンパクト化であり ([10, Chapter 5]), 粗幾何学 (coarse geometry) における基本概念の1つである ([11, Section 2.3]). 一方, Wallman コンパクト化 (または, Wallman-Frink コンパクト化, Wallman-Shanin コンパクト化) は, Wallman 基と呼ばれる閉集合基を用いて定義されるコンパクト化である ([14], [12], [6]). この2つのコンパクト化に関して, Álvarez López and Candel [1, p.1692] は次の問題を提起した.

問題 1 (Álvarez López and Candel [1]). 任意の Higson コンパクト化は, Wallman 型コンパクト化であるか?

本稿では, 問題 1 について解説するとともに, 問題 1 が肯定的であるための十分条件を報告する.

以下, $\mathbb{N}$ は正の整数全体のなす集合を, $\mathbb{Z}$ は整数全体のなす集合を, $\mathbb{R}$ は通常の距離をもつ実数直線を表し, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

とする. 距離空間 (X, d) と $x \in X$ と $R > 0$ に対して x を中心とする R -開球を $B(x, R)$ で表し, $E \subset X$ と $R > 0$ に対して $B(E, R) = \bigcup_{x \in E} B(x, R)$ とする. 本稿を通じて, 空間は空でない完全正則かつ Hausdorff な位相空間を表す. また, 空間 X の位相濃度 (weight) は, X の開基の濃度の最小値を意味する.

1. HIGSON コンパクト化

論文 [7, Section 1] に従って Higson コンパクト化の定義を振り返る (Gelfand-Naimark の定理を用いた同値な定義については [10, Section 5.1], [11, Section 2.3] を参照). Higson コンパクト化は, 固有な距離空間に対して定義される. ここで, 距離空間 (X, d) が固有 (**proper**) であるとは, X の任意の有界閉集合がコンパクトであるときをいう. 以降, 固有な距離空間はすべて非有界であるとする.

定義 2. 固有な距離空間 (X, d) 上の有界な連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が **Higson 関数** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $R > 0$ に対して有界集合 $B \subset X$ が存在し, $x_1, x_2 \in X \setminus B$ かつ $d(x_1, x_2) \leq R$ ならば $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$ であるときをいう.

例 3. (1) 任意の定値関数は Higson 関数である.

(2) 固有な距離空間 X 上の任意の C_0 関数, すなわち, 次を満たす関数は Higson 関数である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, あるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して, 任意 $x \in X \setminus K$ に対して $|f(x)| \leq \varepsilon$ である.

(3) 関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$ は Higson 関数でない.

(4) 関数 $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin \sqrt{x}$ は Higson 関数である.

定義 4. 固有な距離空間 X の Higson 関数全体のなす集合を $C_h(X)$ で表す. 各 $f \in C_h(X)$ に対して,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}, \quad I_f = [-\|f\|, \|f\|]$$

と表す. 集合 $C_h(X)$ は X の点と閉集合を分離するので, 写像

$$e_X : X \rightarrow \prod_{f \in C_h(X)} I_f; \quad x \mapsto (f(x))_{f \in C_h(X)}$$

は (位相的な) 埋め込み写像である. 従って, 値域 $e_X(X)$ の $\prod_{f \in C_h(X)} I_f$ における閉包は, X のコンパクト化を与える. このコンパクト化を X の **Higson コンパクト化** といい, hX で表す. 各点 $x \in X$ を $e_X(x) \in hX$ と同一視することにより, X を hX の部分集合とみなす.

注意 5. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化 hX は, 次を満たすコンパクト化として特徴づけられる: 任意の有界な連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, f が Higson 関数であるための必要十分条件は, f が hX 上の連続関数に拡張できることである ([7, Proposition 1] 参照).

注意 6. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化 hX の位相濃度は連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ である. 実際, X は固有なので可分である. よって hX も可分なので, hX の位相濃度は $2^{\aleph_0}$ 以下である ([5, Theorem 1.5.7] 参照). 一方, hX は可算離散空間 $\mathbb{N}$ の Čech-Stone コンパクト化 $\beta\mathbb{N}$ と同相な部分空間をもつので, hX の位相濃度は $2^{\aleph_0}$ 以上である ([5, Corollary 3.6.12] 参照).

特に, hX は距離化可能でない.

注意 7. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化 hX の剰余 $hX \setminus X$ は, X の **Higson コロナ**と呼ばれる. X は局所コンパクトなので, X は hX の開集合である. 従って, X の Higson コロナはコンパクトである.

Higson コロナは粗同値で不変な位相空間である. ここで, 粗同値とは, 粗幾何学において2つの距離空間を同じとみなす概念で, 次で定義される.

定義 8 ([8, Definition 1.4.4] 参照). 2つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) が**粗同値 (coarsely equivalent)** であるとは, 次を満たす (連続とは限らない) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう:

(1) 次を満たす単調非減少な関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在する:

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_-(t) = \infty$,
- (ii) 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\rho_-(d_X(x, x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x')).$$

(2) $B(f(X), S) = Y$ を満たす $S > 0$ が存在する.

例 9. (1) 任意の有界な距離空間は, 1 点からなる距離空間と粗同値である.

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は, 整数座標をもつ点全体のなす部分距離空間 $\mathbb{Z}^n$ と粗同値である.

(3) 実数直線 $\mathbb{R}$ における2つの部分距離空間 $\mathbb{Z}$ と $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ は, 粗同値でない.

(4) 有限生成群 G の2つの対称な生成系 Σ, Σ' に対して定義される語長距離 (word length metric) を $d_\Sigma, d_{\Sigma'}$ で表すとき, 2つの距離空間 (G, d_Σ) と $(G, d_{\Sigma'})$ は粗同値である ([8, Theorem 1.3.12] 参照). より一般に, 任意の可算群は左不変で一樣離散かつ固有な距離をもち, そのような距離は粗同値を除いて一意である ([8, Proposition 1.2.2 and Example 1.4.7] 参照).

注意 10. 2つの距離空間 X と Y が粗同値であれば, それらの Higson コロナ $hX \setminus X$ と $hY \setminus Y$ は同相である ([11, Corollary 2.42]). この意味で, Higson コロナは粗同値で不変な位相空間である.

2. WALLMAN 型コンパクト化

定義 11. 空間 X の部分集合族 $\mathcal{L}$ が次の5つの条件を満たすとき, $\mathcal{L}$ を X の **Wallman 基**という:

- (i) $A, B \in \mathcal{L}$ ならば, $A \cup B \in \mathcal{L}$ かつ $A \cap B \in \mathcal{L}$ である.
- (ii) $\emptyset, X \in \mathcal{L}$ である.
- (iii) $\mathcal{L}$ は X の閉集合基である, すなわち, $\mathcal{L}$ は X の閉集合族であって, 任意の X の閉集合 F と任意の $x \in X \setminus F$ に対し, $F \subset A \not\ni x$ を満たす $A \in \mathcal{L}$ が存在する.

- (iv) 任意の $A \in \mathcal{L}$ と任意の $x \in X \setminus A$ に対し, $x \in B$ かつ $A \cap B = \emptyset$ を満たす $B \in \mathcal{L}$ が存在する.
- (v) $A, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば, $C, D \in \mathcal{L}$ が存在して $A \cap C = \emptyset = B \cap D$ かつ $C \cup D = X$ を満たす.

$\mathcal{L}$ を空間 X の Wallman 基とする. X の部分集合族 p が $\mathcal{L}$ -フィルタであるとは, 次の条件を満たすときをいう:

- (1) $p \subset \mathcal{L}$.
- (2) $A, B \in p$ ならば, $A \cap B \in p$.
- (3) $A \in p$ かつ $A \subset B \in \mathcal{L}$ ならば, $B \in p$.

さらに, $\mathcal{L}$ -フィルタ p が包含関係で極大なとき, p を $\mathcal{L}$ -超フィルタという. X の $\mathcal{L}$ -超フィルタ全体を $w_{\mathcal{L}}X$ で表す. また, $A \in \mathcal{L}$ と $x \in X$ に対して

$$S(A) = \{p \in w_{\mathcal{L}}X : A \in p\}, \quad p_x = \{B \in \mathcal{L} : x \in B\}$$

とおく. このとき, 次が成り立つ ([9, Section 4.4] 参照):

- (1) 集合族 $\{S(A) : A \in \mathcal{L}\}$ は集合 $w_{\mathcal{L}}X$ の (ある位相の) 閉集合基である. 以下, $w_{\mathcal{L}}X$ はこの閉集合基で生成される位相をもつとする.
- (2) 空間 $w_{\mathcal{L}}X$ はコンパクトである.
- (3) 写像 $e_X : X \rightarrow w_{\mathcal{L}}X; x \mapsto p_x$ は (位相的な) 埋め込み写像で, 値域 $e_X(X)$ は $w_{\mathcal{L}}X$ で稠密である

この $w_{\mathcal{L}}X$ を, Wallman 基 $\mathcal{L}$ に関する X の **Wallman コンパクト化**という. 各点 $x \in X$ を $e_X(x) \in w_{\mathcal{L}}X$ と同一視することにより, X を $w_{\mathcal{L}}X$ の部分集合とみなす. 空間 X の 2 つのコンパクト化 c_1X と c_2X が **同値 (equivalent)** であるとは, 同相写像 $f : c_1X \rightarrow c_2X$ が存在して $f|_X = \text{id}_X$ を満たすときをいう. 空間 X のコンパクト化 γX が, X のある Wallman 基に関する Wallman コンパクト化と同値であるとき, そのコンパクト化 γX を **Wallman 型** コンパクト化という.

- 例 12.** (1) 任意の空間 X の Čech-Stone コンパクト化は Wallman 型である. 実際, X の零集合全体のなす集合族が対応する Wallman 基である. ここで, $Z \subset X$ が X の **零集合 (zero-set)** であるとは, X 上のある実数値連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $Z = f^{-1}(\{0\})$ と表されるときをいう.
- (2) 任意の局所コンパクト空間 X の一点コンパクト化は Wallman 型である. 実際, 集合族 $\{K, \text{cl}_X(X \setminus K) : K \text{ は } X \text{ のコンパクト部分集合}\}$ が対応する Wallman 基である. ここで, $\text{cl}_X(X \setminus K)$ は $X \setminus K$ の X における閉包を表す.

最小の非可算基数を $\aleph_1$ で表し, $\aleph_1$ の次に大きい非可算基数を $\aleph_2$ で表す. 次が知られている:

定理 13 (Bandt [2]). 空間 X のコンパクト化 γX の位相濃度が $\aleph_1$ 以下であるとき, γX は Wallman 型である. 特に, 距離化可能なコンパクト化は Wallman 型で

ある。また、連続体仮説の下では、任意の可分空間のコンパクト化は Wallman 型である。

定理 14 (Ul'janov [13]). 基数 τ が $2^\tau \geq \aleph_2$ を満たすとする。このとき、次を満たす空間 X とそのコンパクト化 γX が存在する。

- (1) X の濃度は τ である。
- (2) γX の位相濃度は 2^τ である。
- (3) γX は Wallman 型でない。

固有な距離空間は可分である。よって、定理 13 より、連続体仮説の下で問題 1 は肯定的である。次節では、ZFC の下で Higson コンパクト化が Wallman 型であるための固有な距離空間に対する十分条件を報告する。

3. HIGSON コンパクト化が WALLMAN 型であるための十分条件

距離空間 (X, d) と $A, B \subset X$ に対して、

$$\begin{aligned} \text{diam } A &= \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}, \\ d(A, B) &= \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \end{aligned}$$

とおく。ここで、 $\sup \emptyset = 0$, $\inf \emptyset = \infty$ とし、 A が非有界のときは $\sup A = \infty$ と表す。 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ に対し

$$\text{mesh } \mathcal{F} = \sup\{\text{diam } F : F \in \mathcal{F}\}$$

とする。部分集合族 $\mathcal{F}$ の $\text{mesh } \mathcal{F}$ が有限であるとき、 $\mathcal{F}$ は一様有界 (**uniformly bounded**) であるという。

距離空間 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が有界有限 (**boundedly finite**) であることを、任意の X の有界集合 B に対して $\{F \in \mathcal{F} : B \cap F \neq \emptyset\}$ が有限であるとして定める。距離空間における有界有限な部分集合族は局所有限である。また、固有な距離空間における局所有限な部分集合族は有界有限である。

定義 15. 正数 R に対して、距離空間 (X, d) の部分集合族 $\mathcal{F}$ が次を満たすとき、 $\mathcal{F}$ は **HW**(R) を満たすという：

$$\forall \mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \left(\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset \implies \exists F, F' \in \mathcal{F}' (d(F, F') \geq R) \right).$$

距離空間 X が **(HW)** を満たすとは、任意の $R > 0$ に対して、**HW**(R) を満たし有界有限で一様有界な X の被覆が存在するときをいう。

条件 (HW) は粗同値に関して不変である。すなわち、次が成り立つ。

命題 16. 2つの距離空間 X と Y が粗同値であり、 X が **(HW)** を満たすとする。このとき Y も **(HW)** を満たす。

証明. 定義 8 の条件を満たす写像 $f : X \rightarrow Y$, $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ と定数 $S > 0$ をとる. Y が (HW) を満たすことを示すため, $R > 0$ を任意にとる. $\rho_-(r) > R + 2S$ を満たす $r > 0$ をとり, HW(r) を満たし有界有限で一様有界な X の被覆 $\mathcal{F}_X$ をとって $\mathcal{F}_Y = \{B(f(F), S) : F \in \mathcal{F}_X\}$ とおく. このとき $\mathcal{F}_Y$ は HW(R) を満たし有界有限で一様有界な Y の被覆である. $\square$

次が本稿の主結果である.

定理 17. (HW) を満たす任意の固有な距離空間の Higson コンパクト化は, Wallman 型である.

証明の概略. (X, d) を (HW) を満たす固有な距離空間とする. 非負整数全体のなす集合を ω で表す.

まず, X の部分集合族の列 $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \omega}$ と狭義単調増加な関数 $s : \omega \rightarrow \omega$ を, 各 $i \in \omega$ に対して次の 4 条件を満たすようにとる:

- (1) $\mathcal{F}_i$ は有界有限で一様有界な X の閉被覆である.
- (2) $i \geq 1$ かつ $F \in \mathcal{F}_i$ ならば, $F = \bigcup \{F' \in \mathcal{F}_{i-1} : F' \subset F\}$ である.
- (3) $\text{mesh } \mathcal{F}_i < s(i)$ である
- (4) $\mathcal{F}_i$ は HW(i) を満たす.

各 $i \in \omega$ に対し,

$$\mathcal{F}'_i = \{F_1 \cap \cdots \cap F_n : F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_i, n \in \mathbb{N}\}$$

とおく. $K_0 \in \mathcal{F}'_0 \setminus \{\emptyset\}$ をとり固定し, 帰納的に

$$K_{n+1} = \bigcup \{F \in \mathcal{F}'_{n+1} : B(K_n, s(n+1)) \cap F \neq \emptyset\}, \quad n \in \omega$$

で定める. 各 $n \in \omega$ と $i \leq n$ に対して

$$\mathcal{F}_i^n = \{F \in \mathcal{F}'_i : F \subset K_n\}$$

とおく. 関数 $f : \omega \rightarrow \omega$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$ を満たすものの全体のなす集合を $\omega^{\uparrow\omega}$ で表し,

$$\Phi = \{f \in \omega^{\uparrow\omega} : \forall n \in \omega (f(n) \leq \min\{n, f(n+1)\})\}$$

とおく. 各 $f \in \Phi$ に対して

$$\mathcal{S}_f = \left\{ \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{J}_n : (\mathcal{J}_n) \in \prod_{n \in \omega} \mathcal{P}(\mathcal{F}_{f(n)}^n) \right\}$$

(ただし, $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{f(n)}^n)$ は $\mathcal{F}_{f(n)}^n$ のべき集合を表す) と定め,

$$\mathcal{L} = \left\{ C \cup S : C \text{ は } X \text{ のコンパクト部分集合, } S \in \bigcup_{f \in \Phi} \mathcal{S}_f \right\}$$

とおく. このとき $\mathcal{L}$ が X の Wallman 基であり, $\mathcal{L}$ に関する X の Wallman コンパクト化が X の Higson コンパクト化と同値であることが確かめられる. $\square$

4. HIGSON コンパクト化が WALLMAN 型である固有な距離空間の例

例 18. 実数直線 $\mathbb{R}$ は (HW) を満たす. 実際, 任意の $R > 0$ に対して

$$\{[jR, (j+1)R] : j \in \mathbb{Z}\}$$

が $\text{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な $\mathbb{R}$ の被覆である. よって, $h\mathbb{R}$ は Wallman 型である.

条件 (HW) は有限積をとる操作で閉じる. ただし, 2つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) の直積 $X \times Y$ は ℓ_2 -距離をもつとする. すなわち, 各 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して

$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2},$$

で定義される距離 d_2 をもつとする.

命題 19. 距離空間 X と Y が共に (HW) を満たすとする. このとき $X \times Y$ も (HW) を満たす.

証明. 正数 $R > 0$ を任意にとり, X と Y のそれぞれに対して, $\text{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な被覆 $\mathcal{F}_X$ と $\mathcal{F}_Y$ をとる. このとき, 集合族

$$\{F_X \times F_Y : F_X \in \mathcal{F}_X, F_Y \in \mathcal{F}_Y\}$$

は $\text{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な $X \times Y$ の被覆である. $\square$

例 18 と命題 19 より次を得る.

系 20. 任意のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は (HW) を満たす. 特に, $h\mathbb{R}^n$ は Wallman 型である.

粗幾何学における次元概念として, Gromov による漸近次元 (asymptotic dimension) がよく知られている ([3], [4], [8, Chapter 2], [11, Chapter 9] を参照). 距離空間 (X, d) の漸近次元が n 以下であるとは, 任意の $r > 0$ に対して次の 3 条件を満たす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n$ が存在するときをいう:

- (1) $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
- (2) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.
- (3) 各 $\mathcal{U}_i$ は r -disjoint である. すなわち, 各 $U, U' \in \mathcal{U}_i$ に対し, $U \neq U'$ ならば $d(U, U') \geq r$ である.

命題 21. 漸近次元 1 以下の固有な距離空間は (HW) を満たす.

証明の概略. X を漸近次元 1 以下の固有な距離空間とする. X が (HW) を満たすことを示すため, 任意に $R > 0$ をとる. このとき, 一様有界で $3R$ -disjoint な X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ であって, $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ が X を被覆するものがとれる.

各 $U \in \mathcal{U}_0$ に対し, V_U を次で定める: $d(U', U) < R$ を満たす各 $U' \in \mathcal{U}_1$ について $d(x_{U'}, U) < R$ を満たす $x_{U'} \in U'$ をとり,

$$V_U = U \cup \{x_{U'} : U' \in \mathcal{U}_1, d(U', U) < R\}$$

とおく.

$\mathcal{V}_0 = \{V_U : U \in \mathcal{U}_0\}$ とおき, $\mathcal{F} = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{U}_1$ とする. このとき $\mathcal{F}$ は $\text{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な X の被覆である. $\square$

例 22. T を各頂点が有限次数 (finite degree) をもつ木 (tree) とする. すなわち, T はサイクルをもたない連結グラフであって, 各頂点から出る辺の本数は高々有限であるとする. また, T の各辺の長さは 1 であるとし, 2 点 $x, y \in T$ の距離 $d(x, y)$ は x と y を結ぶ最短の道 (path) の長さで定義されているとする. このとき T は固有な距離空間であり, T の漸近次元は 1 以下である ([11, Proposition 9.8] 参照). よって命題 21 より T は (HW) を満たす. 特に hT は Wallman 型である.

漸近次元がある整数以下である距離空間は漸近次元が有限であるといい, そうでない距離空間は漸近次元が無限であるという.

例 23. 整数のなす加法群 $\mathbb{Z}$ の可算直和 $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は, $\mathbb{Z}$ の可算直積 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ の部分集合

$$\{(x_k) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \{k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0\} \text{ は有限} \}$$

として定義される. ここで, $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は次で定まる固有な距離 d をもつとする.

$$d((x_k), (y_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k - y_k|, \quad (x_k), (y_k) \in \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}.$$

このとき $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ の漸近次元は無限である ([8, Example 2.6.1] 参照). 一方, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は (HW) を満たす. 実際, 任意の $R > 0$ に対して $\mathcal{I} = \{[jR, (j+1)R] \cap \mathbb{Z} : j \in \mathbb{Z}\}$ とおき, $i_R > R$ を満たす $i_R \in \mathbb{N}$ をとって

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{k=1}^{i_R} I_k \times \prod_{k=i_R+1}^{\infty} \{n_k\} : I_1, \dots, I_{i_R} \in \mathcal{I}, (n_k) \in \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z} \right\}$$

とおけば, $\mathcal{F}$ は $\text{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ の被覆である.

5. 問題

次の問題が肯定的であれば, 定理 17 より問題 1 も肯定的である.

問題 24. 任意の固有な距離空間は (HW) を満たすか?

以下の問題についても分かっていない.

問題 25. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化が Wallman 型であるとき, X は (HW) を満たすか?

命題 19 と命題 21 に関連して, 以下の問題も考えられる.

問題 26. (HW) を満たす距離空間の部分距離空間は (HW) を満たすか?

問題 27. 距離空間 X の 2 つの部分距離空間 A, B が共に (HW) を満たし $A \cup B = X$ であるとき, X は (HW) を満たすか?

問題 28. 漸近次元が有限な距離空間は (HW) を満たすか?

REFERENCES

- [1] J. A. Álvarez López and A. Candel, *Algebraic characterization of quasi-isometric spaces via the Higson compactification*, Topology Appl. **158** (2011), 1679–1694.
- [2] C. Bandt, *On Wallman-Shanin-compactifications*, Math. Nachr. **77** (1977), 333–351.
- [3] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology Appl. **155** (2008), 1265–1296.
- [4] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension in Będlewo*, Topology Proc. **38** (2011), 209–236.
- [5] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [6] O. Frink, *Compactifications and semi-normal spaces*, Amer. J. Math. **86** (1964), 602–607.
- [7] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proc. **19** (1994), 129–148.
- [8] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, European Mathematical Society, Zürich, 2012.
- [9] J. R. Porter and R. G. Woods, *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **104**, no. 497, 1993.
- [11] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [12] N. A. Shanin, *On the theory of bicomact extensions of topological spaces*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **38** (1943), 154–156.
- [13] V. M. Ul'janov, *Solution of the fundamental problem of bicomact extensions of Wallman type*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **233** (1977), 1056–1059; translation in: Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 567–571.
- [14] H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Ann. of Math. (2) **39** (1938), no. 1, 112–126.