

楕円関数とそれに関連する定数の計算について

京大 工学部 清野 武

1. 母数 k を与えて q を計算すること

1.1. 基本式⁽²⁾

古くから知られているように,

$$\sqrt{k'} = \sqrt{1-k^2} = \vartheta_4 / \vartheta_3 \quad (1.1)$$

の関係を利用する方法が一般に採用されている。すなわち,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \quad (1.2)$$

を仲介として,

$$\varepsilon = \frac{q + q^9 + q^{25} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots} \quad (1.3)$$

または,

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + 1707\varepsilon^{17} + \dots \quad (1.4)$$

から q を求める。また必要ならばつぎの関係を利用する。

$$q' = \exp(\pi^2 / \log q) \quad (1.5)$$

1.2. procedure QK(Q, K2)⁽⁸⁾

これは k^2 を与えて q を求めるためのもので,

(i) $k^2 \leq 1/2$ に対しては,

$$\varepsilon = k^2 / (2(1 + \sqrt{k'})^2(1 + k')) \quad (1.6)$$

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 \quad (1.7)$$

によって計算する。

(ii) $k^2 > 1/2$ に対しては, k と k' の立場を入れかえて, さきに q' を求めてから,

$$q = \exp(\pi^2 / \log q') \quad (1.8)$$

によって q を計算する。

東京大学の QNOM(X2, Q)⁽⁷⁾ と異なる点は, (1.2) の桁落ちを防ぐために (1.6) を用いたこと, および $0 \leq k^2 < 1$ を二つの領域に分け, (1.3) を繰り返し法で解くかわりに, 直接 (1.7) で計算したことである。

2. 母数 k を与えて完全楕円積分 K, E を求めること

2.1. 種々の計算法

(1) 超幾何級数

$$K = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) \quad (2.1)$$

$$E = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k^2\right) \quad (2.2)$$

東京大学のCEIE(X2)⁽⁷⁾は $k^2 \leq 0.2$ に対して (2.2) を用いている。

(2) Landen の変換^{(1),(2)}

母数 k に対して,

$$k_1 = (1 - k') / (1 + k') \quad (2.3)$$

を計算すれば, k_1 に対する周期比 K_1'/K_1 は, k に対する K'/K の2倍になる。

$$K = (1 + k_1) K_1 \quad (2.4)$$

$$E = 2 E_1 / (1 + k_1) - (1 - k_1) K_1 \quad (2.5)$$

この変換を繰り返せば,

$$K_{n-1} = (1 + k_n) K_n \quad (2.6)$$

$$E_{n-1} = 2 E_n / (1 + k_n) - (1 - k_n) K_n \quad (2.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \pi/2 \quad (2.8)$$

より, K および E を計算することができる。

(3) 算術幾何平均⁽³⁾

Landen の変換の変形であって, いはしば採用されている。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, \quad b_0 = k', \\ a_r &= (a_{r-1} + b_{r-1})/2, \\ b_r &= \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}, \\ c_r &= (a_{r-1} - b_{r-1})/2 = a_r - b_{r-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$K = \pi / (2 a_n) \quad (2.10)$$

$$E = K \left(1 - \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} 2^r C_r^2 \right) \quad (2.11)$$

(4) Landen の変換と超幾何級数

a. K_1, E_1 を k_1^2 の級数で表わす.

$$K = \frac{\pi}{2} (1+k_1) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k_1^2\right) \quad (2.12)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+k_1} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k_1^2\right) \quad (2.13)$$

東京大学の CEIE(X2)⁽⁷⁾ は $k^2 > 0.2$ に対して, (2.13) を用いている.

b. K_2, E_2 を k_2^2 の級数で表わす.

$k^2 = 1/2$ に対し, $k_1 \simeq 0.17$, $k_2 \simeq 0.007$ となるので, この方法はかなり有効である. (後述).

$$K = (1+k_1)(1+k_2) K_2 \quad (2.14)$$

$$E = \frac{4E_2}{(1+k_1)(1+k_2)} - \frac{K_2}{1+k_1} [3 - k_2 - k_1^2(1+k_2)] \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k_2^2 + \frac{9}{64} k_2^4 \right), \\ E_2 &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} k_2^2 - \frac{3}{64} k_2^4 \right) \end{aligned} \right\} k^2 \leq 1/2 \quad (2.16)$$

(5) q 級数^{(1), (2), (4)}

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2} (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2 \quad (2.17)$$

または, $\vartheta_3 = (\vartheta_3 + \vartheta_4) / (1 + \sqrt{k'})$ より,

$$K = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{k'})^2} (1+2q^4+2q^{16}+\dots)^2 \quad (2.18)$$

東京大学の CEIK (X2) は $k^2 \leq 1/2$ に対して, この式を用いている。実際には,

$$K = 2\pi (1+2q^4)^2 / (1+\sqrt{k'})^2 \quad (2.18')$$

で十分である ($k^2 = 1/2$ のとき, $q^{16} < 0.15 \times 10^{-21}$)。

E に対しては, 基本式

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} (e_1 \omega_1 + \eta_1) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(-\frac{v_2''}{\pi^2 v_2} \right) \quad (2.19)$$

より, つぎのような展開式が導かれる。⁽¹⁰⁾

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(\frac{1}{3} (1+v_3^4+v_4^4) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \quad (2.20)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n n q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \quad (2.21)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \left(1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} \right) \quad (2.22)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} \frac{1+9q^2+25q^6+\dots}{1+q^2+q^6+\dots} \quad (2.23)$$

計算には, (2.23) が適当であるか, 場合によっては, つぎの級数による方が有利である。

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} (1+8(q^2-q^4+4q^6-5q^8+6q^{10}-4q^{12}+8q^{14}$$

$$-13q^{16} + 13q^{18} - 6q^{20} + 12q^{22} - 20q^{24} + 14q^{26} - \dots)) \quad (2.24)$$

(6) η 級数⁽⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{K}{2\pi} (1 - \sqrt{1-k^2}), \\ E &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{K} (1 + 8\eta^2 - 8\eta^4 + 24\eta^8 - 192\eta^{12} + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

これは高橋秀俊教授によって開発されたもので、PC-1 のライブラリに採用されている。 η と q との間には、

$$\eta = \vartheta_2^2(0, q^2)/4 = q(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \dots)^2 \quad (2.26)$$

の関係があり、 $k^2 = 1/2$ のとき、 $\eta \approx q = e^{-\pi}$ となるので、 $k^2 \leq 1/2$ に対し、(2.25) は極めて速く収束する。特に、 k^2 から出発して、 q を経由せずに、 E を求めるためには、この方式が最も有利であろう。

2.2. procedure QKK(Q, QBIS, KK, KKBIS, KORK2, M)⁽⁸⁾

および QKKEE(Q, QBIS, KK, KKBIS, EE, EEBIS, KORK2, M)⁽⁸⁾

QKK は k^2 または k を与えて、 q, q', K, K' を求めるためのもので、QKKEE は、このほかに E, E' を求める機能をもっている。ここでは QKKEE について説明する。

(1) QKKEE₁

(i) q, q' の計算は QK と同様。

(ii) $k^2 \leq 1/2$ に対し、(2.14) - (2.16) により、 K と E

を求める。ただし、析落ちを防ぐために、(2.3) の代りに、

$$k_1 = \frac{k^2}{2 + 2k' - k^2}, \quad k_2 = \frac{k_1^2}{2 + 2k_1' - k_1^2} \quad (2.26)$$

を使用する。

(iii) $k^2 \leq 1/2$ に対す K' , E' はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} K' &= K / (\pi \log(1/\varepsilon)), \\ E' &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{K} + \left(1 - \frac{E}{K}\right) K' \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

による。

(iv) $k^2 > 1/2$ に対しては、 k と k' , q と q' , K と K' , E と E' の立場を入れかえる。

(2) QKKEE₂

(i) q, q' の計算は QK と同様。

(ii) $k^2 \leq 1/2$ に対し、(2.17) により K を、

$$E = \frac{\pi}{6v_3^2} \left(1 + (2 - k^2)v_3^4 - (144q^{10} + 168q^8 + 96q^6 + 72q^4 + 24q^2) \right) \quad (2.28)$$

により E を求める。

(iii) K', E' の計算ならびに $k^2 > 1/2$ に対する扱いは、QKKEE₁ の (iii), (iv) と同様。

注 1 QKK に対しては、(2.17) の代りに (2.18') を使用した。

注 2 (2.28) より、つぎの式の方が有利である。

$$E = \frac{\pi}{2} \frac{1}{v_3^2} (1 + 8(q^2 - q^4 + 4q^6 - 5q^8 + 6q^{10})) \quad (2.24')$$

(3) 試験結果

二つのプロセス $QKKEE_1$ と $QKKEE_2$ は、本質的に異なった方法（一方は Landen の変換，他方は q 級数）に基づいているにもかかわらず、有効数字 10 桁の範囲で、全く等しい結果を与える。

3. q を与えて v_1', v_2, v_3, v_4 を求めること

$v_1'(0, q)$ および $v_i(0, q)$ ($i=2, 3, 4$) は、基本的な定数として、極めて重要である。

$procedure\ THZERO(I, Q)^{(10)}$ は、これら四つの定数のうちの一つを求めるための *real procedure* であって、つぎの方針に従っている。

(i) $q < 0.043$ に対しては、

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= 2\pi q^{1/4} (1 - 3q^2 + 5q^6), \\ v_2 &= 2q^{1/4} (1 + q^2 + q^6), \\ v_3 &= (1 + 2q^4) - 2q(1 + q^8), \\ v_4 &= (1 + 2q^4) + 2q(1 + q^8) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

(ii) これ以外の範囲では、

$$\begin{aligned}
 \nu_1' &= 2\pi \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{3/2} q'^{1/4} (1 - 3q'^2 + 5q'^6), \\
 \nu_2 &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} ((1 + 2q'^4) - 2q'(1 + q'^8)), \\
 \nu_3 &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} ((1 + 2q'^4) + 2q'(1 + q'^8)), \\
 \nu_4 &= 2 \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q'^{1/4} (1 + q'^2 + q'^6)
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

試験方法としては、つぎの二つを採用した。

(i) 前述の QK を利用して、 k^2 から q を求め、これを THZERO に入れて、既成の表⁽⁵⁾ (小数英以下 5 桁) と比較。

(ii) 恒等式^{(1),(2)}

$$\nu_2^4 + \nu_4^4 = \nu_3^4 \quad (3.3)$$

および

$$\nu_1' = \pi \nu_2 \nu_3 \nu_4 \quad (3.4)$$

の左右両辺を別々に計算し、両者の一致を確かめた。

結果は、 $q \leq 0.89$ の範囲で、有効数字 10 桁以上の一致を示した。

4. q を与えて k, K, E を求めること

ノーマル q を基調とする解析に当っては、前節の ν_i のほかに、定数 E, E' の計算が問題になる。

procedure CEIQ (KK, KKBIS, EE, EEBIS, K, KBIS, QBIS, Q)⁽¹⁰⁾ は、 q を与えて、 K, K', E, E', k, k', q' を

を求めるためのもので、つぎの式を利用している。

$$k = v_2^2 / v_3^2, \quad k' = v_4^2 / v_3^2 \quad (4.1)$$

$$K = (\pi/2) v_3^2 \quad (4.2)$$

$$E = ((\pi/6)/v_3^2) (1 + (2 - k^2) v_3^4 - (144 q^{10} + 168 q^8 + 96 q^6 + 72 q^4 + 24 q^2)) \quad (4.3)$$

$$K' = (K/\pi) \log(1/q) \quad (4.4)$$

$$E' = \frac{1}{v_3^2} - (1 - \frac{E}{K}) K' \quad (4.5)$$

ただし、これらはいずれも、 $q \leq 0.043$ に対するもので、それ以外の範囲では、 q と q' の立場を入れかえる。

試験はつぎの方法によった。

(i) QK と CEIQ を組み合わせ、QK の引数として与えた k^2 と、CEIQ の結果として得られた k^2 との一致を確認めた。

(ii) 同じ組み合わせで、 k^2 に対する K, K', E, E' を求め、既述の表なすびに、前述の QKKEE₁ の結果と比較した。

結果は、 $q \leq 0.7$ ($k^2 < 1.0 - 0.153 \times 10^{-10}$) に対して、10桁の精度が確認された。 $0.71 \leq q < 0.9$ でもほとんど問題は無いが、 E の値にわずかの誤差 (10桁目に1単位) が現れる。 $q \geq 0.9$ に対しては、 q' の underflow (HITAC 5020) のため、計算不能となる。対策については後述。

5. $\mathcal{V}_i(v, q)$ の計算

5.1. 変数領域の制限

4種類の $\mathcal{V}$ 関数を, 2種類の計算に還元し, 変数の領域を, $0 \leq v < 1$ または $0 \leq v < 1/2$ に制限するため, つぎの関係を利用する.

(i) $\mathcal{V}_1$ に対しては,

$$s \leftarrow \text{sign}(v), \quad n \leftarrow \text{entier}(\text{abs}(v)),$$

$$v \leftarrow \text{abs}(v) - n,$$

$$\mathcal{V}_1(v) \leftarrow s \times (-)^n \mathcal{V}_1(v), \quad 0 \leq v < 1$$

(ii) $\mathcal{V}_2$ に対しては,

$$\mathcal{V}_2(v) = \mathcal{V}_1(v + 1/2) \quad (5.1)$$

によって, $\mathcal{V}_1$ の計算に帰着させる.

(iii) $\mathcal{V}_3$ に対しては,

$$\mathcal{V}_3(v) = \mathcal{V}_4(v - 1/2) \quad (5.2)$$

によって, $\mathcal{V}_4$ の計算に帰着させる.

(iv) $\mathcal{V}_4$ に対しては,

$$\mathcal{V}_4(v) = \mathcal{V}_4(\text{abs}(v) - n) \quad (5.3)$$

によって, 領域を $0 \leq v < 1$ に制限する.

(v) さらに必要ならば,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{V}_1(v) &= \mathcal{V}_1(1-v), \\ \mathcal{V}_4(v) &= \mathcal{V}_4(1-v) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

を利用し、領域を $0 \leq v < 1/2$ に制限する。

5.2. 虚数変換の応用^{(1),(2)}

q が小さいとき (たとえば $q \leq e^{-\pi}$) は,

$$\vartheta_1(v, q) = 2q^{1/4} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - q^{12} \sin 7\pi v + \dots) \quad (5.5)$$

$$\vartheta_4(v, q) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + 2q^{16} \cos 8\pi v - \dots \quad (5.6)$$

を利用すればよいが、 q が大きいときは、虚数変換

$$\vartheta_1(v|\tau) = i\sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-(i\pi/\tau)v^2} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \quad (5.7)$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-(i\pi/\tau)v^2} \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \quad (5.8)$$

を利用するのが便利である。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(v, q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}} e^{-(\pi K/K')v^2} 2q'^{1/4} (\sinh \pi v' - q'^2 \sinh 3\pi v' + q'^6 \sinh 5\pi v' - \dots) \\ \vartheta_4(v, q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}} e^{-(\pi K/K')v^2} 2q'^{1/4} (\cosh \pi v' + q'^2 \cosh 3\pi v' + q'^6 \cosh 5\pi v' + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

ただし,

$$q' = e^{-\pi K/K'}, \quad v' = (K/K')v \quad (5.10)$$

東京大学の EJSN, EJCN, EJDN⁽⁷⁾ でも虚数変換公式が e^2

$> 1/2$ に対して用いられているが, (5.9) の形をそのまま使用することは極めて不経済であって, 実際には,

$$\rho' = q^{v'} = q'^v = \exp(-(\pi K'/K)v) \quad (5.11)$$

を一度計算するだけで, ρ' の級数 (実は有限の多項式) に還元される.

$$\begin{aligned} \psi_1(v, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{v^2+1/4} [(\rho'^{-1} - \rho') - q'^2(\rho'^{-3} - \rho'^3) \\ + q'^6(\rho'^{-5} - \rho'^5) - \dots], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4(v, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{v^2+1/4} [(\rho'^{-1} + \rho') + q'^2(\rho'^{-3} + \rho'^3) \\ + q'^6(\rho'^{-5} + \rho'^5) + \dots] \quad (5.12) \end{aligned}$$

これらの式の打ち切りによる相対誤差は,

$$\varepsilon_n = q'^{n(n+1)-2nv} \quad (5.13)$$

から推定することができる.

5.3. procedure THETA(I, V, Q)⁽⁹⁾

これは q に対する $\psi_i(v, q)$ を求める real procedure であって, つぎの方針に従って計算を行なう.

(i) $q < 0.04$ に対しては, 5.1 の (i) - (iv) に従って,

$\psi_1(v), \psi_4(v)$ ($0 \leq v < 1$) の計算に還元する.

(ii) 計算はつぎの式による.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(v, q) &= 2q^{1/4} (\sin w - q^2 \sin 3w + q^6 \sin 5w), \quad w = \pi v; \\ \mathcal{J}_4(v, q) &= 1 - 2q (\cos w - q^3 \cos 2w + q^8 \cos 3w), \quad w = 2\pi v \end{aligned} \quad (5.14)$$

(iii) $q \geq 0.04$ に対して, (i) を經由した後,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(v, q) &= \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{(v^2 - 5v + 1/4)} (-q'^6 z^5 + q'^2 z^4 - z^3 \\ &\quad + z^2 - q'^2 z + q'^6), \\ \mathcal{J}_4(v, q) &= \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}} q'^{(v^2 - 5v + 1/4)} (q'^6 z^5 + q'^2 z^4 + z^3 \\ &\quad + z^2 + q'^2 z + q'^6), \quad z = q'^{2v}, \\ 0 \leq v &< 1/2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

試験は, 後述の sn, cn, dn 関数を經由する間接的な方法をとったが, 有効数字10桁の範囲で十分信頼できる結果が得られた.

6. sn, cn, dn 関数

6.1. 各種の計算法

(1) 展開式

$$sn(u, k) = u - (1+k^2)u^3/3! + (1+14k^2+k^4)u^5/5! - \dots,$$

$$cn(u, k) = 1 - u^2/2! + (1+4k^2)u^4/4! - \dots,$$

$$dn(u, k) = 1 - k^2 u^2/2! + (4k^2 + k^4)u^4/4! - \dots$$

(6.1)

(2) 第一種楕円積分の逆関数として

$$\left. \begin{aligned} u &= F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \operatorname{sn}(u, k) &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Landen の変換により, まず

$$\varphi_n = u \prod_{r=1}^n (2/(1+k_r)) \quad , \quad k_n \simeq 0 \quad (6.3)$$

を求め,

$$\varphi_{r-1} = (\varphi_r + \sin^{-1}(k_r \sin \varphi_r))/2 \quad (6.4)$$

を反復適用して, 順次に $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_0$ ($\varphi_0 = \varphi$) を決定する。これを (6.2) の中 2 式に代入して $\operatorname{sn}(u)$ を計算する。

(3) 算術幾何平均⁽³⁾

$$a_0 = 1, \quad b_0 = k', \quad k_0 = k$$

から出発し,

$$\left. \begin{aligned} a_r &= (a_{r-1} + b_{r-1})/2, \quad b_r = \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}, \\ c_r &= a_r - b_{r-1}, \quad k_r = c_r/a_r, \quad k'_r = b_r/a_r \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

を反復して, $c_n \simeq 0$ となるまで“続けられ”, (6.3) に相当して,

$$\varphi_{n-1} = 2^{n-1} a_n u \quad (6.6)$$

が得られる。これを出発点として (6.4) を適用して φ_0 を定める。

$$\operatorname{sn}(u) = \sin \varphi_0, \quad \operatorname{cn}(u) = \cos \varphi_0 \quad (6.7)$$

$$dn(u) = \cos \varphi_0 \sec(\varphi_1 - \varphi_0) \quad (6.8)$$

(4) ϑ 関数との関係

$$\left. \begin{aligned} sn u &= \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ cn u &= \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ dn u &= \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

たとえば $sn(u, k)$ を計算するには、まず k (または k^2) から q, K, K' を求め (たとえば QKKEE または QKK による), 変数を $v = u/(2K)$ に変えて, 上述の THETA によって $\vartheta_1(v, q)$ と $\vartheta_4(v, q)$ を計算すれば, (6.9) の第 1 式から, 簡単に結果が得られる。

この方針で sn, cn, dn に対する *procedure* を作ることは容易であるが, 計算量からいえば, 主プログラムの側で, (6.9) の計算を行なう方がはるかに経済的である。

6.2. 試験結果

上のような理由に基づき, sn, cn, dn 関数に対しては, 特別の *procedure* を作らず, QKK と THETA によって計算し, 既成の関数表 (小数第 5 桁) と比較したほか, 恒等式

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{cn}^2(u, k) &= 1, \\ k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{dn}^2(u, k) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

が成立するかどうかを、種々の k および u について調べた。結果は小数点以下10桁まで确实であることがわかった。

ただし、 $k=0$ に対しては、(6.9)が適用できないので、

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(u, 0) &= \sin \pi v = \sin u, \\ \operatorname{cn}(u, 0) &= \cos u, \quad \operatorname{dn}(u, 0) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

を用いなければならぬ。

7. Jacobi の E 関数

7.1. 計算法

(1) 楕円積分として

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7.1)$$

を満足する φ を求め (たとえば (6.5), (6.6), (6.4) より),
これを

$$E(u) = E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad (7.2)$$

に代入すれば、 $E(u)$ を計算することができるとか、極めて不経済である。それは、(7.2)の計算に、Landen の変換

$$E(\varphi, k) = \frac{1}{1+k_1} E(\varphi, k_1) - \frac{1-k_1}{2} F(\varphi, k_1) + \frac{k_1}{1+k_1} \sin \varphi_1 \quad (7.3)$$

または算術幾何平均を繰り返す必要があるからである。

(2) ϑ 関数との関係^{(1),(2)}

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_0^u dn^2(u, k) du \\ &= Z(u) + \frac{E}{K} u, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} Z(u) &= \Theta'(u)/\Theta(u) \\ &= \frac{1}{2K} \frac{\vartheta_4'(v, q)}{\vartheta_4(v, q)}, \quad u = 2Kv \end{aligned} \quad (7.5)$$

q が小さいときは, (5.6) より,

$$\begin{aligned} \vartheta_4(v, q) &= 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots, \\ \vartheta_4'(v, q) &= 2\pi (2q \sin 2\pi v - 4q^4 \sin 4\pi v + 6q^9 \sin 6\pi v \\ &\quad - \dots) \end{aligned} \quad (7.6)$$

q が 1 に近いときは, (5.9) より,

$$\begin{aligned} \vartheta_4(v, q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}} q'^{v^2+1/4} (\cosh \pi v' + q'^2 \cosh 3\pi v' \\ &\quad + q'^6 \cosh 5\pi v' + q'^{12} \cosh 7\pi v' + \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_4'(v, q) &= -2\pi v' \vartheta_4(v, q) \\ &\quad + \sqrt{\frac{K}{K'}} q'^{v^2+1/4} \pi \frac{K'}{K} (\sinh \pi v' + 3q'^2 \sinh 3\pi v' \\ &\quad + 5q'^6 \sinh 5\pi v' + 7q'^{12} \sinh 7\pi v' + \dots) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$v' = \frac{K}{K'} v = \frac{u}{2K'}, \quad q'^{v^2} = q^{v'^2}$$

7.2. procedure EJACOBI (U, KORK2, M)⁽⁹⁾

これは、前述の QKKEE と併用して、 u および k (または k^2) に対する $E(u)$ の値を求めるための real procedure であり、計算はつきの方針に従っている。

(i) まず QKKEE により、定数 K, K', E, E', q, q' を求める。

(ii) 変数の領域を $0 \leq u < 2K$ に制限するために、

$$E(u + 2K) = E(u) + 2E \quad (7.8)$$

を利用する。

(iii) $k^2 \leq 1/2$ に対しては、つきの式により計算する。

$$E(u) = \frac{\pi}{K} 2q \frac{\sin w - 2q^3 \sin 2w + 3q^5 \sin 3w}{1 - 2q(\cos w - q^3 \cos 2w + q^5 \cos 3w)} + \frac{E}{K} u, \\ w = 2\pi v = (\pi/K) u \quad (7.9)$$

(iv) $k^2 > 1/2$ に対しては、

$$z = q'^{2v} = e^{-\pi u/K'} \quad (7.10)$$

と置いて、つきの式を利用する。

$$E(u) = \frac{\pi}{2K'} \frac{-5q'^6 z^5 - 3q'^2 z^4 - z^3 + z^2 + 3q'^2 z + 5q'^6}{q'^6 z^5 + q'^2 z^4 + z^3 + z^2 + q'^2 z + q'^6} \\ + (1 - E'/K') u \quad (7.11)$$

この procedure の試験には、つきの方法を採用した。すなわち、 E 関数に対する加法定理

$$E(u) + E(w) - E(u+w) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(u+w) \quad (7.12)$$

の左辺を EJACOBI により，右辺を THETA により，別々に計算して両者を比較した。 $\epsilon^2 = 0.1(0.1)0.9, 0.95, 0.99$; $u = 0.5$ (一定); $w = 0.0(0.1)4.0$ について行なった計算結果は，有効数字10桁まで完全に一致した。ただし $u \leftarrow u - 2K$ の操作で，引数自体の精度が桁落ちのせいに失われるような場合は，若干の不一致が起る。

例. $\epsilon^2 = 0.8$ ($2K = 4.514 \dots$), $u = 0.5$

$w = 3.8$	(7.12) の左辺	0.04898	34112	840	右辺		814
3.9		0.02347	54606	624			560
4.0		0.00256	05166	187			064

8. Z 関数

8.1. Jacobi の諸関数の計算における問題点

二次元ポテンシャルの解析に当っては， $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $E(u)$ などの関数を使うのが極めて便利であるが，これらをそのまま数値計算に移すことは，つぎのような点で不都合を生ずる場合が多い。

- (i) これらの関数は副変数として ϵ を用いるが，多くの問題では ϵ が 1 に近い場合が重要なのであって，計算機の1語では，正確な情報が維持できない場合も起りうる。

(ii) これらの関数は, ψ 関数の比 (または ψ' と ψ の比) として計算するのが最も能率的であるが, 各関数に対して独立の *procedure* を作るとすれば, それらに共通な成分 (分母の ψ 関数) を何度も繰り返して計算するという無駄を避けることができる。

(iii) 同様に, 関数の計算に必要な定数 (特に K, E など) を, 同じ ψ に対して, 何度も求めなければならぬ。

このような事情を顧慮すれば, 計算計画に当っては,

- (i) q をすべての出発点とする,
- (ii) sn, cm, dn 関数は, (6.9) により, ψ 関数で表わす,
- (iii) E 関数は, (7.4), (7.5) により, Z 関数 (ただし, 変数は v , 副変数は q とする) で表わす,

のが最も合理的であると思われる。

この目的に対しては, 上に述べた *procedure* のうち, 諸定数の計算には, $CEIQ$ と $THZERO$ の二つ, 関数の計算には $THETA$ が適当であるが, このほかに, Z 関数または E 関数を求めるための $ZETA$ が必要である。

8.2. *procedure* $ZETA(V, Q)$ ⁽⁹⁾

関数 $Z(u)$ は, $sn(u, k)$ などと同様に, 本来 u と k の関数であるが, 上に述べた理由により, $v = u/(2K)$ と

$q = e^{-\pi K'/K}$ を与えて, $Z(u)$ の値を求める procedure があると極めて好都合である。real procedure ZETA (v, Q) は, この目的のために作られたもので, たとえば $E(u)$ を計算するには,

$$E(u) = \text{ZETA}(v, q) + 2Ev \quad (8.1)$$

とすればよいのであって, 必要な定数は, 主プログラムの例で, 1個の k に対して 1回だけ計算しておけばよい。

ZETA の内部における計算は, EJACOBI の一部を利用するだけであるから, 特に説明を加える必要はないであろう。

計算の結果は, EJACOBI と一致するはずであるが, 上述の理由により, u が $2K$ に近い所では若干の不一致が生じる。

例. $k^2 = 0.5$ ($2K = 3.708 \dots$)

	EJACOBI による $E(u)$	ZETA による $E(u)$
$u = 3.6$	<u>2.59334 84944</u>	<u>2.59334 84855</u>
3.7	<u>2.69313 84977</u>	<u>2.69313 84843</u>
3.8	<u>2.79300 95833</u>	<u>2.79300 95832</u>

9. Π 関数について

第三種楕円積分は, Π 関数

$$\Pi(u, \alpha) = k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u} \quad (9.1)$$

を用いて, つぎのように表わすことができる.

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = -\frac{k^2 \operatorname{sn}^3 \alpha}{\operatorname{cn} \operatorname{dn} \operatorname{dn} \alpha} \left(\frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn} \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} u + \pi(u, \alpha) \right), \quad (9.2)$$

$$\operatorname{sn} \alpha = 1/(ka)$$

一方において π 関数は,

$$\pi(u, \alpha) = \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} + u Z(\alpha) \quad (9.3)$$

と書くことができるので, 実変数に対しては, (9.1) や (9.2) を, 上述の procedure によって計算することができる.

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u \mp \alpha) &= \text{THETA}(4, (u \mp \alpha)/(2K), q), \\ Z(\alpha) &= \text{ZETA}(\alpha/(2K), q) \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

10. q が 1 に近い場合の対策⁽¹⁰⁾

10.1. 上述の計算法の限界

上に述べたすべての procedure は, k^2 を基調とする限り, $k^2 \leq 0.9999999999$ までは, 必要量を 10 桁の精度で計算することができるが, ノー q を基調とする場合には, $q \leq 0.7$ を一つの適用範囲とみるのが安全であろう. したがって, $0.7 < q < 1$ に対しては, 別な方法によらなければならぬが, 実はこのような範囲での計算は, 極めて簡単な

近似式で高精度の結果を与えるものである。ただ一つの障害は、 q' の指数部の underflow による制限であって、若干の工夫によって適用範囲を広げうる場合もあるが、 $0.9 < q$ のような領域が実際上の意味をもつかどうかは疑問である。

さて、 $q = 0.7$ に対しては、

$$q' = 0.96066\ 95864 \times 10^{-12},$$

$$k^2 = 1 - k'^2, \quad k'^2 = 0.15370\ 71181 \times 10^{-10},$$

$$K = 13.83557\ 293, \quad K' = 1.57079\ 6327,$$

$$E = 1.00000\ 00000, \quad E' = 1.57079\ 6327$$

となるので、10桁の精度を要求される場合でも、

$$k^2 = 1, \quad E = 1, \quad K' = E' = \pi/2, \quad (q > 0.7) \quad (10.1)$$

と置くことができる。

10.2. 定数の計算

(1) v_1' および v_i

$$p' = q'^{1/4} = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\log q}\right) \quad (10.2)$$

と置けば、

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= 2\pi \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{3/2} p', \\ v_2 &= v_3 = \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2}, \\ v_4 &= 2 \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} p' \end{aligned} \right\} \quad q > 0.7 \quad (10.3)$$

HITAC 5020 の場合は, $q \approx 0.9$ で q' が underflow を起こすか, (10.2) の p' , したがって (10.3) は, $q \approx 0.97$ まで計算できるはずである。

(2) K

式 (10.1) が成立する場合にも, K の値だけは q に依存する。その計算は,

$$K = -\pi^2 / (2 \log q), \quad q > 0.7 \quad (10.4)$$

によって, ほとんど無制限に行なうことができる。

(3) k'

基本式から,

$$k' = 4q'^{1/2}, \quad q > 0.7 \quad (10.5)$$

が得られるが, (10.2) の p' を用いて,

$$k' = 4p'^2 \quad (10.6)$$

とした方が, 適用範囲は広がる ($q \approx 0.94$ まで)。ただし, k'^2 は $q \approx 0.89$ で underflow を起こす。

10.3. 実数の計算

(1) $v_i(v, q)$

上述のように, 関数の種類としては $v_1(v)$ と $v_4(v)$, 変数の領域としては, $0 \leq v < 1/2$ だけを考えればよい。ただしこの場合にも, q' の値が underflow をなすべく起

こまかいような配座が必要である。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(v, q) &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q^{(v^2+1/4)} (q'^{-v} - q'^v), \\ \vartheta_4(v, q) &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q^{(v^2+1/4)} (q'^{-v} + q'^v) \end{aligned} \right\} \\ 0.7 < q, \quad 0 < v < 1/2 \quad (10.7)$$

HITAC 5020 の場合は, $q \approx 0.94$ まで計算可能。

(2) $Z(u)$

$$Z(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} - \frac{u}{K}, \quad 0 \leq u < K, \quad q > 0.7 \quad (10.8)$$

$$\text{ZETA}(v, q) = \frac{q'^{-v} - q'^v}{q'^{-v} + q'^v} - 2v, \quad 0 \leq v < 1/2, \quad q > 0.7 \quad (10.9)$$

(3) $\text{sn } u, \text{cn } u, \text{dn } u$

$$\text{sn}(u, k) = \tanh u, \quad \left. \begin{aligned} \text{cn}(u, k) &= \text{dn}(u, k) = \text{sech } u \end{aligned} \right\} k \approx 1 \quad (10.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{sn}(u, k) &= \frac{q'^{-v} - q'^v}{q'^{-v} + q'^v}, \\ \text{cn}(u, k) &= \text{dn}(u, k) = \frac{2}{q'^{-v} + q'^v} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &0 \leq v < 1/2, \\ &q > 0.7 \end{aligned} \quad (10.11)$$

(4) $E(u)$

$$\begin{aligned} E(u) &= \tanh u \\ &= \frac{q'^{-v} - q'^v}{q'^{-v} + q'^v}, \quad 0 \leq v < 1/2, \quad q > 0.7 \end{aligned} \quad (10.12)$$

文 献

- (1) 竹内端三：橋岡関数論，岩波書店 (1939)
- (2) 友近晋：橋岡関数論，河出書房 (1943)
- (3) G.N. Lance: Numerical Methods for High Speed Computers, Iliffe and Sons (1960)
- (4) Jahnke-Emde: Funktionentafeln, Teubner (1933)
- (5) 林桂一，森口繁一：高等関数表，第2版，岩波書店 (1967)
- (6) 高橋秀俊：完全橋岡積分 $K(\tau)$, $E(\tau)$ の計算について，PC-1 Document No. 9 (1960)
- (7) 山本敦子：QNOM, CEIK, CEIE, EJSN, EJCN, EJDN
東京大学大型計算機センターライブラリプログラム，第I集 (1967)
- (8) 清野，藤井：橋岡関数に関連した定数の計算について，京都大学計算センター月報，vol. 4, no. 10 (1969)
- (9) 清野，藤井：橋岡関数の計算について，同上，no. 11 (1969)
- (10) 清野，藤井：橋岡関数の計算についての補遺，同上，no. 12, 予定

追記

報告後の討論において、ライブラリプログラムに関する一つの問題点として、“利用上の便宜と計算機の無駄使いをどのように調整すべきか”が論議された。

たとえば、本文に述べたように、 sm , cn , dn 関数のためのサブルーティーンが登録されていれば、利用者が便宜を受ける場合も多いであろうが、反面、計算機時間の浪費を奨励する結果にもなりかねない。この問題を解決するため、

(1) 登録されているプログラムを活用して、特殊な関数を経済的に計算する方法を、マニュアルやニュースを通じて、推薦ないし指導する。

(2) 一方、すべての関数に対するプログラムを登録しておく、利用上の便利さと、経済性のいすれをとるかは、適切な情報を与える上で、利用者の選択にまかせる。

という提案がなされたが、いすれも得失があり、結論は得られなかった。

また、この種の問題が、専用関数に限らず、ライブラリプログラムに一般に関する考え方として、重要な意味をもつことが、改めて認識された。