

部分多様体の部分多様体と一般化されたガウス写像

徳島大 教育 石原 徹

リーマン多様体からユークリッド空間へのそう入に対してガウス写像が与えられる。この小文ではもう少し一般的なそう入に対してガウス写像を定義する。 E を $n+p+q$ 次元擬ユークリッド空間, N を $n+p$ 次元擬リーマン多様体で E に等長的にそう入されているものとする。さらに n 次元擬リーマン多様体 M が N に等長的にそう入されているときに, M から等質空間 $G(n, p, q) = O(n+p+q)/O(n) \times O(p) \times O(q)$ への写像 (一般化されたガウス写像) を定義する。ここで $O(n+p+q)$ 等は擬ユークリッド空間の直交変換群である。

M. Obata [8] は n 次元リーマン多様体の単連結完全な $n+p$ 次元定曲率空間 V へのそう入に対して, 一般化されたガウス写像を定義した。 V の曲率が正のときは球面と考えられ, 従って V は $n+p+1$ 次元ユークリッド空間の部分多様体であり, 曲率が負のときは V は $n+p+1$ 次元擬ユークリッド空間の部分多様体とみなせる。このように考えることによって Obata の

ガウス写像と我々のガウス写像とは深い関係があることが示せる。負の定曲率空間のときも統一的に扱うために擬ユークリッド空間の場合も含める必要がある。そのとき、そう入される多様体 M, N 等を擬リーマンの場合まで広げて考えるほうが自然なので、そうい一般的情况を扱うことにした。

等質空間 $G(m, p, q)$ は自然に $O(m) \times O(p) \times O(q)$ -構造 (G -構造の意味で) を持つ。この構造はさらに擬リーマン構造とみなせるので、 $G(m, p, q)$ に自然に擬リーマン計量を与えられる。この計量を考えることで、我々のガウス写像の調和性、等角性を問題にすることができる。

§1. 擬ユークリッド空間とその部分空間の組の作る空間

$E_r^n (0 \leq r \leq n)$ を n 個の実数の組 $x = (x^1, \dots, x^n)$ の作る擬ユークリッド空間とする。内積は $(x, y) = \sum_{i=1}^n e_i x^i y^i$ で与えられる。ここで e_i は 1 か -1 の値をとり、 -1 を r 回とるものとする。 E_r^n の符号数は $(r, n-r)$ である。 E_r^n の直交(変換)群 $O^r(n)$ は

$$O^r(n) = \{ (A_{ij}^{\lambda}) \in GL(n, R), \sum e_k A_{ik}^{\lambda} A_{jk}^{\lambda} = e_i \delta^{ij} \}.$$

そのリー環 $\mathfrak{o}^r(n)$ は次のように与えられる。

$$\mathfrak{o}^r(n) = \{ (A_{ij}^{\lambda}) \in \mathfrak{gl}(n, R), A_{ij}^{\lambda} = -A_{ji}^{\lambda} e_i e_j \}.$$

同様に $E_s^p (0 \leq s \leq p)$ を符号数 $(s, p-s)$ の擬ユークリッド空間、 $O^s(p)$, $\mathfrak{o}^s(p)$ をそれぞれ直交群、リー環とする。今 $E_{r+s}^{m+p} = E_r^m +$

$E_0^p = \{(x, y); x \in E_n^n, y \in E_\alpha^p\}$ とすると, $E_{r+\alpha}^{n+p}$ は符号数 $(r+\alpha, n+p-r-\alpha)$ の擬ユークリッド空間である。その直交群, リー環を $O^{na}(n+p), o^{na}(n+p)$ で表わす。さらに $E_t^g (0 \leq t \leq g)$ を符号数 $(t, g-t)$ の擬ユークリッド空間とし, $E_{r+\alpha+t}^{n+p+g} = E_{r+\alpha}^{n+p} + E_t^g$ とすると, これは符号数 $(r+\alpha+t, n+p+g-r-\alpha-t)$ の擬ユークリッド空間である。その直交群, リー環も同様に対応する記号で表わす。さてこのように一般に擬ユークリッド空間とその直交群, リー環を考えていくのであるが, 時には必要のない限り簡単にユークリッド空間と同じ記号で表わすことにする。例えば, $E_{r+\alpha+t}^{n+p+g}$ を E^{n+p+g} , $O^{na}(n+p)$ を $O(n+p)$ で表わすことにする。

$G(n, p)$ を E^{n+p} の符号数 $(r, n-r)$ の部分空間のなす集合とする。 $G(n, p) = O(n+p)/O(n) \times O(p)$ と表わされ非正定値のグラスマン多様体である。次に U を E^{n+p+g} の符号数 $(r, n-r)$ の n 次元部分空間, V を符号数 $(\alpha, p-\alpha)$ の p 次元部分空間とし, さらにこれらは $U \perp V$, すなわち互いに直交するものとする。今このような組 (U, V) 全体の集合を $G(n, p, g)$ で表わす。 $O(n+p+g)$ は $G(n, p, g)$ に推移的に作用し, (E^n, E^p) を動かさないので $O(n+p+g)$ の元は部分群 $O(n) \times O(p) \times O(g)$ を作る。従って

$$G(n, p, g) = O(n+p+g)/O(n) \times O(p) \times O(g)$$

である。次のような射影 π_λ があることは明らかである。

$$\begin{array}{ccccc}
 & G(n, p, q) & & & \\
 \swarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \searrow \pi_3 \\
 G(n+p, q) & & G(n, p+q) & & G(n+q, p)
 \end{array}$$

§ 2. ガウス写像

f_1 を符号数 $(Y, A, n+p-r, a)$ の擬リーマン多様体 N から E^{n+p+q} への等長的そう入写像, f_2 を符号数 $(Y, n-r)$ の擬リーマン多様体 M から N への等長的そう入とする。この § では E^{n+p+q} をさらに簡単に E で表わすことにする。 $O(M), O(N), O(E) = E \times O(n+p+q)$ をそれぞれ, M, N, E 上の直交フレームバンドルとする。

$O(N, M) = \{v = (Y_1, \dots, Y_{n+p}) \in O(N) \mid M, Y_1, \dots, Y_n \text{ が } M \text{ に接する}\}$ とすると, $O(N, M)$ は M 上の群 $O(n) \times O(p)$ をもつ主バンドルになる。同様に主バンドル $O(E, N)$ も考えられる。さらに

$O(E, N, M) = \{v = (Y_1, \dots, Y_{n+p+q}) \in O(E) \mid M, Y_1, \dots, Y_n \text{ が } M \text{ に接し, } Y_{n+1}, \dots, Y_{n+p} \text{ が } N \text{ に接する}\}$ とすると, これも M 上の主バンドルで群 $O(n) \times O(p) \times O(q)$ を持つ。次のような図式が考えられる。

$$\begin{array}{ccccc}
 O(E, N, M) & \xrightarrow{i_1} & O(E, N) & \xrightarrow{i_2} & O(E) \\
 \downarrow j_1 & & & & \downarrow j_3 \\
 O(M) & \xleftarrow{j_2} & O(N, M) & \xrightarrow{i_3} & O(N)
 \end{array}$$

ここで i_1, i_2, i_3 は自然な injection, j_1, j_2, j_3 は自然な projection である。 $\theta_M, \theta_N, \theta_E$ を $O(M), O(N), O(E)$ の Canonical form とする

次のことが言える。

命題 2.1. Canonical forms $\theta_M, \theta_N, \theta_E$ の間に次の関係がある。

$$(\iota_3 \cdot \jmath_1)^*(\theta_N) = (\jmath_2 \cdot \jmath_1)^*(\theta_M) = (\iota_2 \cdot \iota_1)^*(\theta_E)$$

さて次に我々のガウス写像を定義しよう。 $\lambda = \iota_2 \cdot \iota_1$ と置く。
 $\rho: O(E) = E \times O(n+p+q) \rightarrow O(m+p+q)$ を自然な projection とするとき、写像

$$\tilde{g}(v) = \rho \circ \lambda(v), \quad v \in O(E, N, M)$$

はバンドル写像で base の写像 g を導く。すなわち

$$\begin{array}{ccc} O(E, N, M) & \xrightarrow{\tilde{g}} & O(n+p+q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{g} & G(n, p, q) \end{array}$$

この g が我々のガウス写像である ($\tilde{g}$ もガウス写像と呼ぶ)。

§1 の最後で述べた図式の projection π_i に対応して, $g_i = \pi_i \circ g$ と置くと次のことは明らかである。

命題 2.2. g_1 は $f_1 \circ f_2: M \rightarrow E$ に対応する通常のカウス写像, g_2 は $f_2: N \rightarrow E$ に対応する通常のカウス写像と f_1 の合成である。

次に Ohata のガウス写像について簡単に述べる。まず定曲率空間 V は次のようなものとする。

$$V = \begin{cases} \text{(i)} S^{n+p} = \{x \in E^{n+p+1}, x_1^2 + \cdots + x_{n+p+1}^2 = a^2\} \\ \text{(ii)} H^{n+p} = \{x \in E^{n+p+1}, -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+p+1}^2 = a^2\} \end{cases}$$

$\alpha(V)$ を V の直交フレームバンドルとすると, それは群 $G(n+p)$ と同一視できる。ここで $G(n+p)$ とは

$$G(n+p) = \begin{cases} \text{(i)} O(n+p+1) : E^{n+p+1} \text{ の直交群.} \\ \text{(ii)} O'(n+p+1) : E^{n+p+1} \text{ の直交群.} \end{cases}$$

次に $\mathcal{Q}$ を V の totally geodesic n -space 全体の作る集合とする。totally geodesic n -space は $E = \text{(i)} E^{n+p+1}, \text{(ii)} E_1^{n+p+1}$ の原点を通る $n+1$ 次元部分空間 $(\mathcal{U})$ のときは, 符号数 $(1, n)$ の $\mathcal{U}$ と V との交わりである。 $\mathcal{Q}$ は等質空間 $G(n+p)/G(n) \times O(p)$ と同一視できる。さて M が n 次元リーマン多様体として, $f: M \rightarrow V$ が等長的そう入とするとき, f に対応する Obata のガウス写像は次のように与えられる。 M の各点 x に対して $\mathcal{Q}$ の点 $g'(x)$ を, x で M に接する V の totally geodesic n -space であると決める。このとき写像 $g': M \rightarrow \mathcal{Q}$ が Obata のガウス写像である。 $g'(x)$ は x と, x での M の接空間 (E に含まれていると考えて) とで張られる $n+1$ 次元部分空間と V の交わりである。さらに x は V と直交することより次が言える。

定理 2.3. Obata のガウス写像は $E = \text{(i)} E^{n+p+1}, \text{(ii)} E_1^{n+p+1}, N = \text{(i)} S^{n+p}, \text{(ii)} H^{n+p}$ の場合の我々の写像 $g_3 = \pi_3 \circ g$ に等しい。

§3. 等質空間 $G(n, p, q)$ 上の擬リーマン構造

始めに少し一般的なことについて復習する。 K をリー群とする。 H をその閉リー部分群として、等質空間 $M = K/H$ を考える。 M の次元を n とする。 $\text{coset } H$ を 0 で表わし M の原点と呼ぶ。 K の元 k は M に推移的に作用しさらにフレームバンドル $L(M)$ にも作用する。 $\pi: L(M) \rightarrow M$ を projection とし、今 $u_0 \in \pi^{-1}(0)$ を一つとして固定する。 u_0 を線型写像 $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow T_0(M)$ とみなすことにする。すると $k \in H$ のとき、 $k_*: M \rightarrow M$ の微分 k_* は $T_0(M)$ を $T_0(M)$ に移すから、準同形写像 $\lambda: H \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ を $\lambda(k) = u_0^{-1} \cdot k_* \cdot u_0$ で与えることができる。 λ は u_0 に関する線形等変表現である。 $\chi: K \rightarrow L(M)$ を $\chi(k) = k \cdot u_0$ で定義すると、次のことは明らかである。

命題 3.1. $\chi(K)$ は $L(M)$ の sub bundle であり、 M 上の $\lambda(H)$ - 構造を与える。特に λ が忠実ならば $\chi: K \rightarrow \chi(M)$ は同形写像である。

次に $M = K/H$ が reductive のとき、すなわち K のリー環 $\mathfrak{k}$ の部分空間 $\mathfrak{h}$ が存在して $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$, $\text{ad}(H)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ とできるときを考える。ここで $\mathfrak{p}$ は H のリー環である。 ω を K の canonical 1-form とする。すなわち $A \in \mathfrak{k}$ のとき、 $\omega(A) = A$ で与えられるものである。 $\omega_{\mathfrak{p}}$ を ω の $\mathfrak{p}$ -成分とす

ると、次のことも容易に確かめられる。

命題3.1. λ が忠実のとき、 $\lambda(H)$ -構造 $\chi(K)$ の canonical form Θ は $\Theta = (\chi^{-1})^* \omega_{\mathcal{M}}$ で与えられる。

ω_f を ω の f -成分とする。 λ が忠実のとき

$$(3.1) \quad \omega' = \lambda_* \cdot (\chi^{-1})^* (\omega_f)$$

が $\chi(K)$ 上の canonical connection を与える。また次のような K -不変な接続 ω' も考えることができる。

$$(3.2) \quad \omega'_{u_0}(X') = \begin{cases} \lambda_*(X) & , X \in \mathcal{F}, \\ \Delta_{\mathcal{M}}(X) & , X \in \mathcal{M} \end{cases}$$

ここで X' は X に対応する M 上の vector field の $L(M)$ への natural lift である。さらに $\Delta_{\mathcal{M}}$ は

$$(3.3) \quad \Delta_{\mathcal{M}}(X)(Y) = \frac{1}{2} [X, Y]_{\mathcal{M}}, \quad X, Y \in \mathcal{M}$$

で与えられるもので、同一視 $\mathcal{M} \cong T_0(M) \cong E^n$ によって、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ に値をとるものと考えられる。ただし $[X, Y]_{\mathcal{M}}$ は $[X, Y]$ の $\mathcal{M}$ -成分を表わしている。この (3.2) で与えられる接続は natural torsion free な接続と呼ばれるもので一般には $\chi(K)$ 上の接続ではなく $L(M)$ の接続と考えるべきである。([6] を参照)。

以上の一般論を我々の場合の $K = O(n+p+q)$, $H = O(m) \times O(p) \times O(q)$ に適用する。その前にこの小文で用いる添字の動く範囲は次

のとおりである。

$$\begin{aligned} 1 \leq i, j, k \leq n, n+1 \leq a, b, c \leq n+p, n+p+1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n+p+q, \\ 1 \leq A, B, C \leq n+p+1, 1 \leq i^*, j^*, k^* \leq n+p, n+1 \leq a^*, b^*, c^* \leq n+p+q, \\ n+p+1 \leq \alpha^*, \beta^*, \gamma^* \leq n+p+q \text{ or } 1 \leq \alpha^*, \beta^*, \gamma^* \leq n. \end{aligned}$$

$A = (A_{\alpha}^i)$ が $n \times p$ 行列のとき, $A^* = (A_{\alpha}^{*i})$ は $p \times n$ 行列で $A_{\alpha}^{*i} = -A_{\alpha}^i e_i e_a$ をみたすものとする。そのとき $\mathcal{G}(n, p, q)$ を

$$\begin{pmatrix} 0 & A & B \\ A^* & 0 & C \\ B^* & C^* & 0 \end{pmatrix}$$

なる形の行列全体の作る集合とする。ここで A は $n \times p$ -行列, B は $n \times q$ -行列, C は $p \times q$ 行列である。 $\mathcal{M} = \mathcal{G}(n, p, q)$ とすることによって, $G(n, p, q) = O(n+p+q)/O(n) \times O(p) \times O(q)$ は reductive であることが解る。 $E_A^B (= \mathcal{G}^L(n+p+q, R))$ を (A, B) -成分だけが 1 でその他は 0 となるものとする。 $F_A^B = E_A^B - E_B^A e_A e_B$ とすると $F_i^a, F_{\alpha}^i, F_a^{\alpha}$ が $\mathcal{G}(n, p, q)$ の base になる。

$E^{np} = \{ (X_{\alpha}^i) \}$ を符号数 $(n\alpha + p\gamma - 2\gamma\alpha, np - n\alpha - p\gamma + 2\gamma\alpha)$ で内積が次で与えられる擬ユークリッド空間とする。

$(X, Y) = \sum e_i e_a X_{\alpha}^i Y_a^{\alpha}, \quad X = (X_{\alpha}^i), Y = (Y_a^{\alpha}) \in E^{np}$
 $E_{i\alpha} = E_{\alpha}^i$ とすると, $E_{i\alpha}$ が E^{np} の base になる。同様 E^{nq}, E^{pq} を定義し $E^{np+nq+pq} = E^{np} \oplus E^{nq} \oplus E^{pq}$ とする。 $u_0 \in L(M)$ を

$$u_0(E_{i\alpha}) = \pi_*(F_{\alpha}^i), \quad u_0(E_{\alpha a}) = \pi_*(F_a^{\alpha}), \quad u_0(E_{ab}) = \pi_*(F_a^b)$$

で決めると

補題 3.2. U_0 に関する線形等変表現 $\lambda: O(m) \times O(p) \times O(q) \longrightarrow$

$\rightarrow GL(np+mq+pq, R)$ は次で与えられて忠実である。

$$\lambda \left(\begin{pmatrix} h_{ia}^{\bar{j}} & 0 \\ & h_a^b \\ 0 & & h_\beta^\alpha \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} h_{ia}^{\bar{j}b} & 0 \\ & h_{ia}^{\bar{j}\beta} \\ 0 & & h_{a\alpha}^{b\beta} \end{pmatrix} \in O(mp) \times O(nq) \times O(pq) \subset O(mp+mq+pq).$$

ここで

$$h_{ia}^{\bar{j}b} = h_i^{\bar{j}} h_a^b e_a e_b, \quad h_{ia}^{\bar{j}\beta} = h_i^{\bar{j}} h_a^\beta e_a e_\beta, \quad h_{a\alpha}^{b\beta} = h_a^b h_\alpha^\beta e_a e_\beta.$$

上の補題より $\chi(O(m+p+q))(CL(M))$ は擬リ-マン構造を与えることが角平る。この構造によって決まる擬リ-マン計量を常に $G(m, p, q)$ 上に考えることにする。我々の場合 (3.1) で与えられた canonical connection は torsion を持つ。従って擬リ-マン接続は (3.2) で与えられるものである。この計量を具体的に決定するために λ_* と Δ_m を求める。まず $F_{ia}^{\bar{j}b} = E_{ia}^{\bar{j}b} - E_{ab}^{\bar{j}a} e_i \cdot e_j \cdot e_a e_b$ などのように置くと、次が出る。

$$\lambda_*(F_i^{\bar{j}}) = \sum_a F_{ia}^{\bar{j}a} + \sum_\alpha F_{i\alpha}^{\bar{j}\alpha},$$

$$\lambda_*(F_a^b) = -\sum_{\bar{j}} F_{\bar{j}a}^{\bar{j}b} + \sum_\alpha F_{a\alpha}^{b\alpha},$$

$$\lambda_*(F_\alpha^\beta) = -\sum_{\bar{j}} F_{\bar{j}\alpha}^{\bar{j}\beta} - \sum_a F_{a\alpha}^{a\beta}.$$

一方 Δ_m は次のようになる。

$$\Delta_m(F_i^a) = \frac{1}{2} \sum_\alpha F_{i\alpha}^{a\alpha}, \quad \Delta_m(F_i^{\bar{a}}) = -\frac{1}{2} \sum_\alpha F_{i\alpha}^{\bar{a}\alpha} e_a e_\alpha, \quad \Delta_m(F_a^{\bar{a}}) = -\frac{1}{2} \sum_{\bar{i}} F_{i\alpha}^{\bar{a}\alpha} e_i e_\alpha.$$

これらと (3.2) を用いると次が出る。

定理 3.3. $G(m, p, q)$ の擬リ-マン接続 ω' を次のように

置く。

$$\omega' = \sum \omega'_{\bar{a}b} F_{\bar{a}}^{\bar{b}} + \sum \omega'_{\bar{a}\rho} F_{\bar{a}}^{\bar{\rho}} + \sum \omega'_{b\bar{\rho}} F_{\bar{a}}^{\bar{b}} + \sum \omega'_{\bar{a}\bar{\rho}} F_{\bar{a}}^{\bar{b}} + \sum \omega'_{\bar{a}\bar{\rho}} F_{\bar{a}}^{\bar{b}}.$$

すると, $\omega'_B = (\chi^{-1})^*(\omega_B^A)$ とすると, ω' の成分は $\chi(O(n+p+q))$ 上で

$$\omega'_{\bar{a}b} = \omega'_{\bar{a}} \delta_b^{\bar{a}} - \omega'_{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^b, \quad \omega'_{\bar{a}\rho} = \omega'_{\bar{a}} \delta_{\rho}^{\bar{a}} - \omega'_{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^{\rho}, \quad \omega'_{b\bar{\rho}} = \omega'_{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^{\rho} - \omega'_{\bar{a}} \delta_{\bar{a}}^{\rho},$$

$$\omega'_{\bar{a}\bar{\rho}} = -\frac{1}{2} \delta_{\bar{a}}^{\bar{\rho}} \omega'_{\bar{a}}, \quad \omega'_{b\bar{\rho}} = -\frac{1}{2} \delta_{\bar{a}}^{\bar{\rho}} e_b e_{\bar{a}} \omega'_{\bar{a}}, \quad \omega'_{\bar{a}\rho} = \frac{1}{2} \delta_{\bar{a}}^{\bar{\rho}} \omega'_{\bar{a}}.$$

で与えられる。

§4. 調和なガウス写像

ガウス写像 g の調和性について考える。命題2.2, 定理2.3 を考えに入れると g_1, g_2, g_3 もガウス写像と呼んで良いことがわかる。それらの調和性についても考える。まず §2, §3 の結果を総めると次のような図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccc} O(E, M, N) & \xrightarrow{\tilde{g}} & O(n+p+q) & \xrightarrow{\chi} & \chi(O(n+p+q)) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{g} & G(n, p, q) & \longrightarrow & G(n, p, q) \end{array}$$

U と V をそれぞれ M と $G(n, p, q)$ の開集合とし $g(U) \subset V$ をみたすものとする。さらに local section $\Delta_1: U \rightarrow O(E, N, M)$, $\Delta_2: V \rightarrow \chi(O(n+p+q))$ が存在すると仮定しておく。 (ω_B^A) を $O(n+p+q)$ の canonical form, (Θ^A) を $O(E^{n+p+q}) \rightarrow E^{n+p+q}$ の canonical form, $\lambda: O(E, M, M) \rightarrow O(E^{n+p+q})$ を injection, として $\omega'_B = (\chi^{-1})^*(\omega_B^A)$ としておく。そこで

$\theta^i = A_1^i \lambda^i(\theta^i)$, $\omega_a^i = A_2^i(\omega_a^i)$, $\omega_\alpha^i = A_2^i(\omega_\alpha^i)$, $\omega_\alpha^a = A_2^a(\omega_\alpha^a)$
と置く。すると M と $G(m, p, q)$ の擬リーマン計量が local に

$$d\Omega_M^2 = \sum e_i(\theta^i)^2,$$

$$d\Omega_{G(m,p,q)}^2 = \sum e_{ia}(\omega_a^i)^2 + \sum e_{i\alpha}(\omega_\alpha^i)^2 + \sum e_{a\alpha}(\omega_\alpha^a)^2$$

と表現される。ここで $e_{ia} = e_i \cdot e_a$ と置いてある。

$\rho^*(\omega_B^A)$ が $O(E^{m+p+q})$ の flat な擬リーマン接続を与えること、命題 2.1 より $\lambda^i(\theta^{a*}) = 0$ が成立することより

$$(4.1) \quad \begin{cases} \tilde{g}(\omega_a^\alpha) = (\rho\lambda)^*(\omega_a^\alpha) = \sum A_{a\bar{j}}^\alpha \lambda^i(\theta^{\bar{j}}) \\ \tilde{g}(\omega_\alpha^a) = (\rho\lambda)^*(\omega_\alpha^a) = \sum A_{\alpha\bar{j}}^{a*} \lambda^i(\theta^{\bar{j}}) \end{cases}$$

と置くことができる。ここで $A_{\alpha\bar{j}}^{a*}$, $A_{a\bar{j}}^\alpha$ はそれぞれ M の E^{m+p+q} と N の等長系 λ に対する第 2 基本形式とみなせる。ガウス写像 g は local に $g = \pi_2 \circ \tilde{g} \circ \lambda_1$ と表わすことができるので (4.1) より次が出る。

補題 4.1. local に次のように置く。

$$g^*(\omega_{a*}^i) = \sum G_j^{ia*} \theta^{\bar{j}}, \quad g^*(\omega_\alpha^a) = \sum G_j^{a\alpha} \theta^{\bar{j}}.$$

すると次が成立する。

$$G_j^{ia*} = A_{a*j}^i = -A_{ij}^{a*} e_{a*} e_i, \quad G_j^{a\alpha} = A_{\alpha j}^a = -A_{aj}^\alpha e_\alpha e_a.$$

$O(E, N, M)$ の自然な接続に関する $A_{a\bar{j}}^i$ の共変微分を
(4.2) $\sum A_{a\bar{j}k}^i \theta^{\bar{k}} = dA_{a\bar{j}}^i + \sum A_{a\bar{j}}^k \omega_k^i - \sum A_{b\bar{j}}^i \omega_a^b - \sum A_{a\bar{k}}^i \omega_j^{\bar{k}}$
で与える。 $A_{a\bar{j}}^i$, $A_{\alpha\bar{j}}^a$ の共変微分 $A_{a\bar{j}k}^i$, $A_{\alpha\bar{j}k}^a$ も同様に

与えることができる。次に Φ, Ψ を l_{n+1} から n_{m+p+q} , そして $(n+1)_{m+p+1}$ から $(n+p)_{m+p+q}$ を走る添字とする。すると G_{ij}^{Φ} の変換成分が

$$(4.3) \quad \sum G_{j\bar{k}}^{\Phi} \theta^{\bar{k}} = dG_j^{\Phi} - \sum G_{\bar{k}}^{\Phi} \omega_j^{\bar{k}} + \sum G_{j\bar{k}}^{\Psi} g^{\bar{k}}(\omega_j^{\Phi})$$

で与えられる。ここで $\omega_j^{\Phi} = \Omega_j^*(\omega_j^{\Phi})$, かつ $\omega = (\omega_j^{\Phi})$ は $G(m, p, q)$ 上の擬リーマン接続である。 $g: M \rightarrow G(m, p, q)$ は $\sum_{\bar{j}} G_{j\bar{j}}^{\Phi} e_{\bar{j}} = 0$ のとき調和であると呼ばれる。(4.2), (4.3) 等より次を得る。

$$(4.4) \quad \begin{cases} G_{j\bar{k}}^{ia} = A_{a\bar{j}k}^i + \frac{1}{2} \sum (A_{a\bar{j}}^a A_{\bar{a}k}^i - A_{\bar{a}k}^a A_{a\bar{j}}^i), \\ G_{j\bar{k}}^{ia} = A_{\bar{a}j\bar{k}}^i + \frac{1}{2} \sum (A_{a\bar{j}}^a A_{\bar{a}k}^i - A_{\bar{a}k}^a A_{a\bar{j}}^i), \\ G_{j\bar{k}}^{ab} = A_{a\bar{j}k}^b + \frac{1}{2} \sum (A_{a\bar{j}}^a A_{\bar{a}k}^b - A_{\bar{a}k}^a A_{a\bar{j}}^b). \end{cases}$$

従って

定理4.2. ガウス写像 $g: M \rightarrow G(m, p, q)$ が調和であるための必要十分条件は

$$\sum_{\bar{j}} A_{a\bar{j}\bar{j}}^i e_{\bar{j}} = \sum_{\bar{j}} A_{\bar{a}j\bar{j}}^i e_{\bar{j}} = \sum_{\bar{j}} A_{a\bar{j}\bar{j}}^a e_{\bar{j}} = 0.$$

ガウス写像 $g: M \rightarrow G(m, p, q)$ が調和であるための必要十分条件は E. A. Ruh と J. Vilms [9] によって与えられた。それは我々の記号で表わすと次のようになる。

$$(4.5) \quad \sum_{\bar{k}} A_{a\bar{k}k}^i e_{\bar{k}} - \sum_{\bar{a}, \bar{k}} A_{\bar{a}k}^i A_{a\bar{k}}^{\bar{a}} e_{\bar{k}} = 0, \quad \sum_{\bar{k}} A_{\bar{a}k\bar{k}}^i e_{\bar{k}} - \sum_{\bar{a}, \bar{k}} A_{\bar{a}k}^i A_{a\bar{k}}^{\bar{a}} e_{\bar{k}} = 0.$$

次に $g_2: M \rightarrow G(m+p, r)$ が調和であるための必要十分条件は

$$(4.6) \sum_{\bar{j}} A_{\alpha\bar{j}\bar{j}}^{\hat{\alpha}} e_{\bar{j}} + \sum_{\alpha, \bar{j}} A_{\alpha\bar{j}}^{\alpha} A_{\alpha\bar{j}}^{\hat{\alpha}} e_{\bar{j}} = 0, \sum_{\bar{j}} A_{\alpha\bar{j}\bar{j}}^{\alpha} e_{\bar{j}} + \sum_{\alpha, \bar{j}} A_{\alpha\bar{j}}^{\hat{\alpha}} A_{\alpha\bar{j}}^{\alpha} e_{\bar{j}} = 0.$$

同様に $g_3: M \rightarrow G(n+q, p)$ に関する条件は

$$(4.7) \sum_{\bar{j}} A_{\alpha\bar{j}\bar{j}}^{\alpha} e_{\bar{j}} - \sum_{\alpha, \bar{j}} A_{\alpha\bar{j}}^{\alpha} A_{\alpha\bar{j}}^{\hat{\alpha}} e_{\bar{j}} = 0, \sum_{\bar{j}} A_{\alpha\bar{j}\bar{j}}^{\hat{\alpha}} e_{\bar{j}} + \sum_{\alpha, \bar{j}} A_{\alpha\bar{j}}^{\alpha} A_{\alpha\bar{j}}^{\hat{\alpha}} e_{\bar{j}} = 0.$$

(4.4), (4.5), (4.6), (4.7) より次がある。

定理 4.3. g_1, g_2, g_3, g のどれか 3 つが調和であれば, 残りも調和で, さらに次が成立する。

$$\sum_{\alpha, R} A_{\alpha R}^{\alpha} A_{\alpha R}^{\hat{\alpha}} e_R = \sum_{\alpha, \bar{j}} A_{\alpha\bar{j}}^{\hat{\alpha}} A_{\alpha\bar{j}}^{\alpha} e_{\bar{j}} = \sum_{\alpha, \bar{j}} A_{\alpha\bar{j}}^{\hat{\alpha}} A_{\alpha\bar{j}}^{\alpha} e_{\bar{j}} = 0.$$

次に N が E^{n+p+q} に totally umbilic にそう入されているときを考える。このとき

$$A_{i^* j^*}^{\alpha} = \frac{1}{n+p} \sum_{R^*} A_{R^* R^*}^{\alpha} e_{R^*} \delta_{i^* j^*}.$$

従って $A_{\alpha i}^{\alpha} = 0, A_{\alpha j R}^{\alpha} = 0$ がある。これより

定理 4.4. N が E^{n+p+q} に totally umbilic にそう入されているとする。もし M が N で constant mean curvature を持つとき, g と g_1 が調和である。さらにもし M が N で極小的のとき g_2 と g_3 も調和である。

系 4.5. N を定理 2.3. のように仮定する。リーマン多様体 M が N に極小的にそう入されることが, Obata のガウス写像が調和であるための必要十分条件である。

§ 5. 双形的なガウス写像

擬リーマン多様体 M, N の Ricci 曲率を, 直交 base $\mathcal{E}$ に関して local に, R_{jk} , $K_{j^*k^*}$ と表わしておく. すると

$$(5.1) \begin{cases} K_{jk} = \sum (A_{jk}^\alpha A_{i^*i^*}^\alpha - A_{ji^*}^\alpha A_{i^*k}^\alpha) e_{i^*} e_\alpha, \\ R_{jk} = \sum (A_{jk}^{a^*} A_{ii}^{a^*} - A_{ji}^{a^*} A_{ik}^{a^*}) e_\alpha e_i. \end{cases}$$

次に, g, g_1, g_2, g_3 が双形的であるための条件はそれぞれ M 上の smooth な関数 μ, μ_1, μ_2, μ_3 が存在して, 次式が成立することである。

$$(5.2) \begin{cases} \sum A_{a^*j}^i A_{a^*k}^i e_i e_{a^*} + \sum A_{aj}^a A_{ak}^a e_a e_\alpha = \mu e_j \delta_{jk}, \\ \sum A_{a^*j}^i A_{a^*k}^i e_i e_{a^*} = \mu_1 e_j \delta_{jk}, \\ \sum A_{aj}^{i^*} A_{ak}^{i^*} e_{i^*} e_\alpha = \mu_2 e_j \delta_{jk}, \\ \sum A_{a^*j}^a A_{a^*k}^a e_a e_{a^*} = \mu_3 e_j \delta_{jk}. \end{cases}$$

これらより直ちに次を得る。

命題 5.1. g, g_1, g_2, g_3 のどれか3つが双形的ならば, 残りも双形的である。

M が $E^{n+p,q}$ で pseudo-umblic であるとは M 上の smooth な関数 η が存在して $\sum A_{ij}^{a^*} A_{jk}^{a^*} e_i e_{a^*} = \eta e_j \delta_{jk}$ となるときである。 N に対しても同様に定義できる。これらのことと, (5.1), (5.2) より次が従う。

定理 5.2. M, N を $E^{n+p,q}$ の Einstein, pseudo-umblic な部

分多様体とする。すると g が共形的なら g_3 も共形的であり、逆も成立する。

定理 5.3. N を定曲率で, $E^{n+p+\delta}$ の pseudo-umblic な部分多様体とする。すると次の3つの条件のうち、2つが成立すると残りも従う。

- (1) M は N の pseudo-umblic な部分多様体である。
- (2) N は Einstein である。
- (3) ガウス写像 $g (t \rightarrow g_3)$ が共形的である。

参考文献

- [1] B.Y. Chen, Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [2] B.Y. Chen and K. Yano, On Submanifolds of Submanifolds of a Riemannian Manifold, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 548-554.
- [3] S.S. Chern and S.I. Goldberg, On the Volume-decreasing Property of a class of Real Harmonic Mappings, Amer. J. Math. 97 (1975), 133-147.
- [4] A. Fujimoto, On Automorphisms of G -structures, J.

- Math. Kyoto Univ. 1(1961), 1-20.
- [5] S. I. Goldberg and T. Ishihara, Harmonic Quasiconformal Mappings of Riemannian Manifolds, Amer. J. Math. 98 (1976), 225-240.
 - [6] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry I, II, Wiley(Interscience), New York, 1963, 1969.
 - [7] S. Nishikawa, The Gauss map of Kähler Immersions, Tokoku Math. J. 27(1975), 453-460.
 - [8] M. Obata, The Gauss Map of Immersions of Riemannian Manifolds in Spaces of Constant Curvature, J. Differential Geometry 2(1968), 217-223.
 - [9] E. A. Ruh and J. Vilms, The Tension Field of the Gauss Map., Trans. Amer. Math. Soc. 149(1970), 569-573.
 - [10] J. A. Wolf, Space of Constant Curvature, McGraw-Hill, 1967.