

EH D と GH D

東大 宇宙研 橋本 英典

§ 1 序

それぞれクーロン力および万有引力が支配する気体の力学として EH D (Electrohydrodynamics) と GH D (Gravito hydrodynamics) を考えるとき、相対論的效果が無視できる範囲において、両者は互に類似あるいは対照的な挙動を示す。特に一次元の運動についてこれを示すのが此の稿の目的である。

§ 2. 基礎方程式

非相対論的近似において EH D および GH D の基礎方程式は無次元化した形で^{*)}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho F \dots\dots\dots (2) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \cdot \nabla)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho/\rho_0) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\nabla \cdot F = \pm \rho, \quad \nabla \times F = 0 \quad (4), (5)$$

の形に書ける。たゞし速度 V , 密度 ρ , 圧力 p , 長さ λ , 時間も, 単位体積に働く力 F の単位として, $\rho_0, p_0, p_0/p_0 = p_0/\rho_0^2, L_0, L_0/\rho_0, \rho_0 V_0^2/L_0$ とする。添字 0 は標準値をあらわし, γ は断熱指数で (4) の複号は EHD で +, GHD で -, ととり, 長さの単位としては, それぞれデ바이長, ジーンス波長に相当する $L_D = \sqrt{\epsilon m / 4\pi e^2}, \rho_0 / \sqrt{4\pi \rho_0 q}$ とするのが便がある。勿論 p, ρ は正の値をとるべきものであるが (1) - (5) で $p \rightarrow -p, \rho \rightarrow -\rho$ とおけば EHD と GHD が互に移行することから, "一方で p, ρ 共に負という不合理的な得られたときは上記の置きかえによって他方の解が得られることわかる."

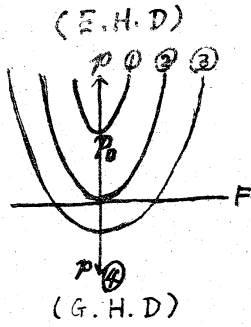
§3 一次元静的解

$V=0, \partial/\partial t=0$, 現象が x だけに依存するとすれば (1), (3), (5) は自動的に満たされ (2), (4) は

$$\rho' = \rho F, \quad F' = \pm \rho \dots\dots\dots (1)$$

となる。これから積分として

$$\rho = \pm \frac{1}{2} F^2 + \text{const} \dots\dots\dots (2)$$



第1図

が得られ、第1図の示すように典型的な
ばあいとして、①、②、③ (E.H.D)¹⁾、
④ (G.H.D) の各場合に分れる。

特に等温の場合は T_0 として音速 a_0 と
れば $p = \rho$ とする ρ で積分して

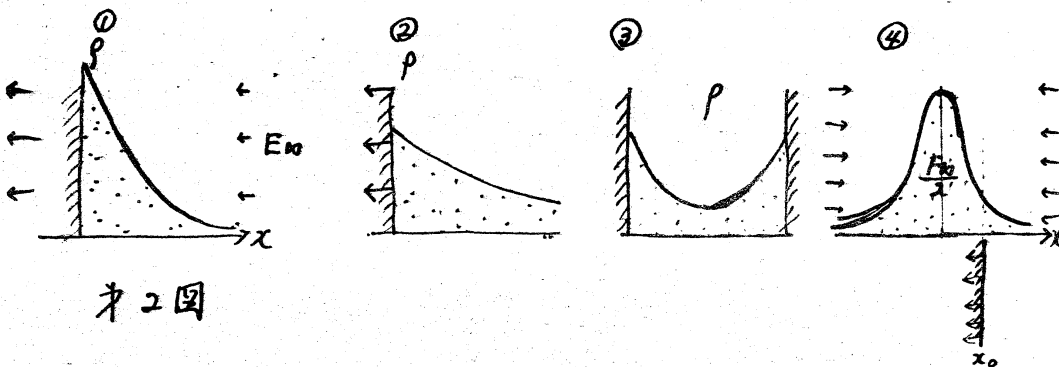
$$\textcircled{1}: F = E_0 \cosh \left[-\frac{1}{2} E_0 (x+x_0) \right], \quad p = \rho = \frac{1}{2} E_0^2 \operatorname{cosech}^2 \left[\frac{1}{2} E_0 (x+x_0) \right]$$

$$\textcircled{2}: F = -2/(x+x_0), \quad p = \rho = 2/(x+x_0)^2$$

$$\textcircled{3}: F = \sqrt{2\rho_0} \tan \left[\sqrt{\frac{\rho_0}{2}} x \right], \quad p = \rho = \rho_0 \sec^2 \left[\sqrt{\frac{\rho_0}{2}} x \right]$$

$$\textcircled{4}: F = -F_0 \tanh \frac{F_0}{2} x, \quad p = \rho = \frac{F_0}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{F_0}{2} x$$

①、②は壁 $x=0$ に電場 $E_0 \cosh \left[-\frac{1}{2} E_0 x_0 \right]$, $-2/x_0$ で confine
された荷電気体であり、②は $x \rightarrow \infty$ で $F=0$ とする臨界状態
で壁の電場をこれ以上小さくすることは出来ない。③は2つ
の壁の間にはさまれた荷電気体、④は $x=0$ で最大密度の重力



第2図

気体、 $x=x_0$ で切れれば壁 $x=x_0$ に引力 $F_0 \tanh \frac{F_0}{2} x_0$ で引きつ
けられている重力気体をあらわす。

§ 4 非定常流²⁾

壁を正の x 方向に $V(t)$ で動かすばあいを考えよう。座標変換を実行して壁に静止した座標系に移れば運動方程式 (1.2) の右辺に $-\rho \dot{V}(t)$ の項があらわれる。(対応原理²⁾)。

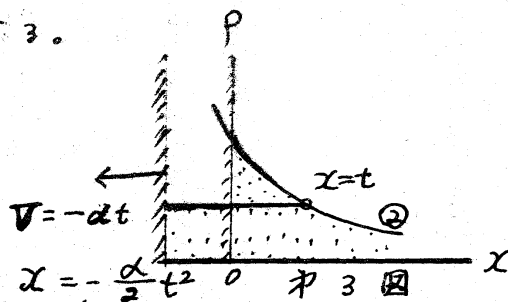
これは、静止系に外部から $-\dot{V}$ の場を加えたことに相当する。 $V(t)$ が一定 V ならば $-V \delta(t)$ という瞬間力、 $V(t)$ が等加速度 αt ならば $-\alpha$ という一様場に相当する。

§ 4.1 臨界状態と等密度解^{2), 4)}

臨界状態②で壁を $\alpha = 2/x_0 = -E_0$ の加速度で左方に進めると実験系で $-\alpha t/2 < x < t$ において、等密度状態

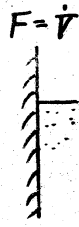
$$\rho = \frac{2}{(t+x_0)}, \quad u = \frac{-2(t-x)}{(t+x_0)}, \quad p = \frac{2(x-2t-x_0)}{(t+x_0)^2}$$

となる解が得られる。これは音速 1 で右方に進む Front ($x=t$) で $u=0$, $\rho=2/(x+x_0)^2$ となり②の乱されない状態に継続する。



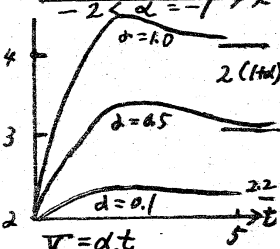
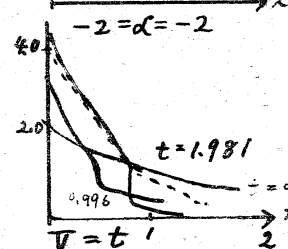
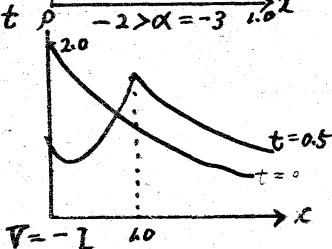
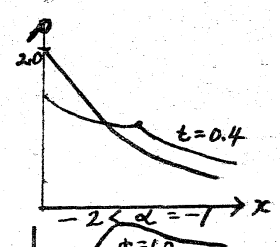
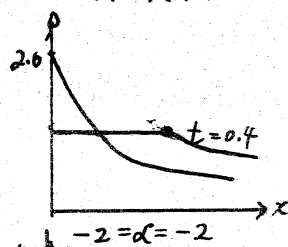
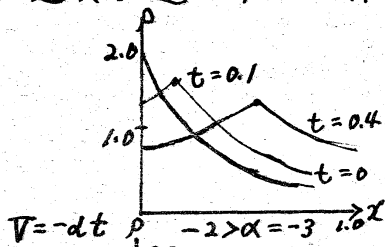
一般に壁における密度については、運動系で見るとき運動方程式の壁における値 ($u=0$)

$$0 = \frac{-1}{\rho w} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) w + F_w - \dot{V}(t)$$



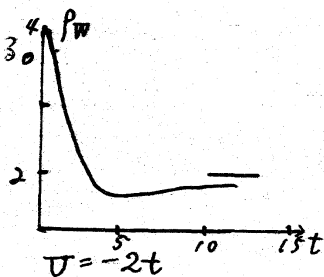
を知る。平衡状態では $F = \dot{V}$ である。

特に $x_0 = 1$, 壁の電場が -2 のとき定差分式 (Lax の方法) による数値解は, 壁を引くことに対し, 頂が壁に相対的に $1 - V$ の速度で進行する三角波乃至は階段波を生じる。



壁を押すばあいには場の中に衝撃波を生じる共に, 壁の密度加速運動に対しては α Overshoot して ① で壁の電場が $-2 - \alpha$ のときの終極値 $2(1 + \alpha)$ に達する。

このような Overshoot は逆に上の終極状態から壁を加速度 α で引くときにも生じる。



§ 5. EHD-GHD Pulsation

現象を立ち入ってしらべるために壁の速度が小さいとした近似解を求めて見よう。

Lagrange 座標

$$\begin{cases} \psi = \int_0^x \rho(x, t) dx \\ \tau = t \end{cases}$$

を導入すれば、基礎式は等温のばあいについて、Wall systemで

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \psi} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial \rho}{\partial \psi} + F - V_w \\ F = \pm \psi + F_w \end{cases}$$

と書ける。定常解は $V_w = 0$, $u = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$ に対するもので

$x \rightarrow \infty$ するのを $\psi = \psi_w = \int_0^\infty \rho(x, t) dx$ で $\rho \rightarrow 0$ となるものは

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \pm \frac{1}{2} (\psi \pm F_w)^2 \mp \frac{1}{2} (\psi_w \pm F_w)^2 \\ &= \mp \frac{1}{2} F_w^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{F_w}{2} x - \tanh^{-1} \frac{F_w}{F_0} \right] \\ \psi &= \mp F_w \mp F_w \tanh \left[\frac{F_w}{2} x - \tanh^{-1} \frac{F_w}{F_0} \right] \end{aligned}$$

ただし $F_0 = \pm \psi_w + F_w$

壁を V_w の微小速度で動かす: $V_w = \epsilon g \neq 0$ のときは

$$\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1, \quad u = \epsilon v$$

とき ϵ の一次の項をとれば

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho_1 = -\rho_0^2 \frac{\partial v}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} v = -\frac{\partial \rho_1}{\partial \psi} - g \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \rho_0^2(\psi) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right] \rho_1 = 0$$

が得られる:

= 初期条件

$$x=0: \quad \rho_1 = 0, \quad u=0$$

境界条件: $\psi = 0: \quad \dot{x} = 0$; $\psi = \psi_0: \quad v = -V_w, \quad \rho_1 = 0$

の下に解く。Impulsive Motion $\dot{V}_w = \delta(t)$ に対する解は

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \psi_0 |F_\infty + F_w|} \rho_0 \quad Y(t-\theta) \\ \times \left[e^{\frac{1}{2} F_w (t-\theta)} - \frac{F_\infty}{2} \int_0^{t-\theta} e^{\frac{1}{2} F_w (\sqrt{t^2 - \xi^2} - \theta)} J_1\left(\frac{F_\infty}{2} \xi\right) d\xi \right]$$

ただし $Y(t)$ は階段関数 $\begin{cases} Y(t) = 1 & t > 0 \\ = 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\theta = \frac{1}{F_\infty} \log \frac{(F_\infty + F_w)(\psi_0 - \psi)}{\psi_0 (\pm \psi + F_\infty + F_w)} > 0$$

i) 特に GHD case で $F_w = 0$ のときは $F_\infty = -\psi_0$,

$$\theta = \frac{1}{\psi_0} \log \frac{\psi + \psi_0}{\psi_0 - \psi}$$

$$\rho_1 = \frac{\psi_0}{2} (\psi_0^2 - \psi^2)^{\frac{1}{2}} J_0\left(\frac{1}{2} \psi_0 \sqrt{t^2 - \theta^2}\right) Y(t-\theta)$$

ii) EHD case で $F_\infty = 0$ のときは $F_w = -\psi_0$, $\theta = \frac{2\psi}{\psi_0(\psi_0 - \psi)}$

$$\rho_1 = \frac{\psi_0}{2} (\psi_0 - \psi) \exp\left[-\frac{\psi_0}{2} (t-\theta)\right] Y(t-\theta)$$

iii) 壁の密度: $\psi = 0$, 従って $\theta = 0$ だから

$$\rho_1 = \frac{\psi_0}{2} |F_\infty + F_w| \left[e^{\frac{1}{2} F_w t} - \frac{1}{2} F_\infty \int_0^t e^{\frac{1}{2} F_w (\sqrt{t^2 - \xi^2} - \frac{\xi}{2})} J_1\left(\frac{F_\infty}{2} \xi\right) d\xi \right] \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \psi_0 |F_\infty + F_w| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \left(\frac{F_w^2 t}{4 F_\infty}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_\infty t}{2}\right) \\ \sim \frac{1}{2} \psi_0 |F_\infty + F_w| \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-1) \cdots 3 \cdot 1] \left(\frac{2 F_\infty}{F_w^2} t\right)^n J_n\left(\frac{F_\infty}{2} t\right).$$

ii) とおいて密度の Oscillation が見られる。

- 1) F. H. Clauser : Int. Ser. Aero. Sci and Space Flight 4 (Pergamon Press, 1960) 305.
- 2) H. Hasimoto : Proc. 12th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1962) 151.
- 3) H. Hasimoto & S. Kuwabara: J. Phys. Soc. Japan 20 (1965) 859
- 4) H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Japan 25 (1968) 1524.
- 5) 橋本英典, 桑原真二, 神部勉: 日本物理学会, 航空学会
才13会応用数学力学講演会予稿集2 (1968年
9月) p.28