

氏 名	西 谷 達 雄 にし たに たつ お
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 博 第 646 号
学位授与の日付	昭 和 55 年 9 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 専 攻
学位論文題目	On the Lax-Mizohata theorem in the analytic and Gevrey classes (解析函数及びジュブレイ函数の空間におけるラックス-溝畑 の定理について)
論文調査委員	(主 査) 教 授 溝 畑 茂 教 授 山 口 昌 哉 教 授 池 部 晃 生

論 文 内 容 の 要 旨

$(t, x) \in R^{n+1}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ とし, 原点の近傍で定義された一般な偏微分作用素

$$P\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j \leq |a|+m} a_{j, \alpha}(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j$$

を考える。ここで $t=0$ は非特性的であるとし, したがって $a_{m, 0}=1$ と仮定する。原点の近傍で, $t=0$ を初期面とするコーシー問題

- (1) $P\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) = f(t, x)$
- (2) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(0, x) = u_j(x), \quad 0 \leq j \leq m-1$

を考える。次の事はよく知られている。原点の近傍で定義された任意の C^∞ -データ (u_j, f) に対して, 解 $u(t, x)$ が原点の近傍で一意的に存在するためには, 原点での P の特性方程式

$$Pm(0, 0; \tau, \xi) = \sum_{j+|\alpha|=m} a_{j, \alpha}(0, 0) \xi^\alpha \tau^j = 0$$

の根 $\tau = \lambda_j(\xi)$ が任意の ξ に対してすべて実であることが必要である。これが Lax-Mizohata の定理とよばれるものである。

ところで, 係数が解析的である場合は, Cauchy-Kowalewsky の定理によって, 上記の条件とは無関係に, データ (u_j, f) が解析的であれば解が一意的に存在する。さらに一般に, 解析的クラスを直接広げた Gevrey 関数族についても 1960 年代以降種々の仮定のもとで解の存在が示されるようになった。ここで一般に $f(x)$ がクラス $s(\geq 1)$ の Gevrey 関数族に属するとは,

$$|D^\alpha f(x)| < C \alpha!^s K^{|\alpha|}$$

が任意の α に対してなりたつときをいう。これを $\gamma^{(s)}$ とかく。

主論文では次の基本的な定理がまず示されている。原点での特性方程式が $\xi = \xi^0$ に対して, k 個の実根

と $(m-k)$ -個の非実根をもつとする。($k \leq m-1$ とする)。このとき $Pu=0$ の解 $u \in C^\infty$ で、 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(0, x) = 0 (0 \leq j \leq k-1)$ をみたすものをとれば、 $(0, \xi^0)$ は

$$\bigcup_{j=k}^{m-1} WF_s(D_t^j u(0, x))$$

に属さない。ここで WF_s は $\gamma^{(s)}$ の意味での波面集合を示す。この証明の方針は次のように要約される。 P を楕円部分とそうでない部分 (粗く言って双曲部分) との積に擬微分作用素の範囲で (漸近的な意味で) 分解する。この際、同じ $\gamma^{(s)}$ の中での分解になっていることが Boutet de Monvel と Krée による解析を参考にしながら詳しい計算によって示されている。ついで楕円部分に対しては Gevrey の意味においても準楕円性になりたつことの証明に立ち戻って推論が行われている。

コーシー問題の適切性については次の定義が採用されている。係数 $a_{j\alpha}$ はすべて $\gamma^{(s)}$ にぞくするとする。コーシー問題が $\gamma^{(s)}$ の範囲内で適切であるとは、原点のある近傍 D があって、任意の初期データ $\gamma^{(s')}(V)$ に対して、一意的な (1)-(2) の解 $u(t, x) \in C^\infty(D)$ が存在するときをいう。上記の基本定理から、 $\gamma^{(s)}$ の意味でのコーシー問題が適切であるためには特性根がすべて実であることが必要であることが導かれている。このことを $s=1$ の場合に適用してみると、Cauchy-Kowalewsky との関係も明らかにされている。

参考論文 1, 2 は弱双曲型方程式に対するコーシー問題を論じたものである。特性根は高々 2 重であるが、それらの多重度の一定は仮定しないで、Levi 関数の挙動に関する一般的な仮定から解の一意的存在が示されることが示されており注目すべきものである。

論文審査の結果の要旨

主論文のとりあつかっている問題は微妙な問題である。特性根がすべて実である方程式 (広義双曲型方程式) において、係数にある程度の Gevrey class に関する制限を設ければ、データがまた適当な Gevrey class に属していれば、解が一意的に存在することが明らかになってきた。反面、Cauchy-Kowalewsky の定理は、すべてが解析的であれば特性根についての制限はいらないことを主張している。主論文は、Gevrey class で考えるときには特性根が実であることがやはり必要であることを主張している。

所でこの問題は C^∞ -データに対する問題とくらべた場合、見かけ上は類似の推論が有効であるように思われるが、実際にはかなりかけ離れた問題である。これらの差異を見抜いて、新しい視点に立ち問題を取り扱っている点に申請者の秀れた創意が見られる。

基本定理の方法を見ると、

$$P(t, x; \tau, \xi) = (\tau^k + \sum_j a^j(t, x; \xi) \tau^{k-j}) \circ (\tau^{m-k} + \sum_i b^i(t, x; \xi) \tau^{m-k-i})$$

と (漸近的な意味で) 作用素を分解した場合、第 2 項の楕円型作用素の、 $\gamma^{(s)}$ の作用素としての、くわしい評価が必要であり、さらにその逆作用素の評価も必要になるが、巧みな計算によってこれが遂行されている。 $D_t^j u(0, x) = 0 (0 \leq j \leq k-1)$ と逆作用素を用いて、 $D_t^k u(0, x), \dots, D_t^{m-1} u(0, x)$ の局所化された Fourier 像の性質が導かれるのであるが、手法そのものにも興味があり、得られた結果と共に、こ

の方面の発展に寄与する所が大であると思われる。

よって申請論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。