

コンパクト多様体上の接触変換群について.

都立大 理 大森 英樹.

§1. 序.

S. Lie の連続群の研究と始めにのぼ、今から丁度百年程前であった。彼の目的としたものは、(1)方程式のガロア理論に相当するものを微分方程式に就いて建設すること、(2)接触変換群の如き、多様体の上の構造と不変にする群の研究、であったと思われる。彼の研究は、その後、(a)有限次元 Lie 群論、(b)無限次元の pseudo transformation group の理論、と成って発展してわけである。

こゝに於ける私の立場は、上記(b)の理論を、filtered Lie algebra 等の研究によって代表されるように、Lie 環論だと思ふという立場である。ようすいば、次の問題意識は自然に発生するのである。即ち、「有限次元 Lie 群とはどの程度の取扱いができて、かつ、S. Lie や E. Cartan が研究した無限次元 Lie 群と、実例として持つような、辺相群と、変換群の立場と離

以て抽象的に定義することができるが、

この設問は、ほゞ肯定的に解決される。即ち、次章で定義する I.L.H.-Lie 群の概念がそれである。I.L.H.-Lie 群は、次のような実例を持つている。

- (1) すべての有限次元 Lie 群。
- (2) すべての無限次元 Hilbert Lie 群。
- (3) M が多様体とし、 M の C^∞ -可微分同相写像の全体。
- (4) M が C^∞ volume element を持つ C^∞ 可微分同相写像の全体。
- (5) M の任意の foliation を持つ C^∞ 可微分同相写像の全体。
- (6) M が偶数次元とし、更に M 上には C^∞ symplectic 2-form ω があるものとして、 C^∞ -symplectic diffeomorphism の全体。
- (7) M が奇数次元とし、更に M 上には C^∞ contact 1-form α があるものとして、 C^∞ -contact diffeomorphism の全体。
- (8) (7) と同じ条件下で、更に、characteristic vector field $\alpha^\#$ が S^1 (円周) の free action を引き起しているとき、 M 上の strictly contact diffeomorphism の全体。但し、 M は単連結とする。

上記の (1) ~ (8) を全部例としていえるようは、I.L.H. Lie 群よりもっと強い条件をもった Lie 群の概念が存在するかどうかについては不明であるが、少なくとも、群演算の微分可能性に因る限り、これ以上長くは行かない。その意味で、I.L.H.-Lie 群の概念は、上の設問に対する、ざりざりいっぱいの答えで

ある。

では、I.L.H.-Lie 群に於て、どの位有限次元 Lie 群と同じ事が成立するかという事、それはもう決まらないうのである。有限次元 Lie 群論で、基礎的の定理である陰函数定理とフロベニウスの定理も I.L.H.-Lie 群では一般には成立しない。それ等は、いくつかのかなり強い条件（有限次元の場合は、いつでも成立しているような条件）の下に証明されるのみである。

こゝでは、I.L.H.-Lie 群中特に、(7), (8) であげた接触変換群を中心にして話を進める。特に、これに興味があるのは、次の理由による。(3), (4) であげた I.L.H.-Lie 群 $\mathcal{Q}$ であり、 $\mathcal{Q}_{dv}$ とすると、実は、 $\mathcal{Q}_{dv}$ は $\mathcal{Q}$ の内 I.L.H.-部分群である。factor set $\mathcal{Q}_{dv} \backslash \mathcal{Q}$ と考えれば、これは、total volume が 1 の volume element のなる空間と一致する。この集合は、位相的には可縮である。又、 $\mathcal{Q}_{dv}$ は $\mathcal{Q}$ の内 I.L.H.-部分群とある事は、実は、 $\mathcal{Q}_{dv}$ の Lie 環について、フロベニウスの定理を証明して得られるのである。 $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}_{dv} \backslash \mathcal{Q}$ を基底とし、 $\mathcal{Q}_{dv}$ を fibre とする fibre bundle であることがわかる。 $\mathcal{Q}_{dv} \backslash \mathcal{Q}$ は可縮だから、この fibre bundle は実は trivial だ。 $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}_{dv}$ と total volume が 1 の volume element 全体の空間との直積に homeomorphic となる。これと同じような事は A' (7) と (8) でも云えるのである。この事柄が興味のあるところである。即ち、(7), (8) の群 $\mathcal{Q}$

γ 以 γ' 以. $\mathcal{D}_\omega, \mathcal{D}_{\Delta\omega}$ としむとき. 「 $\mathcal{D}_\omega$ は, $\mathcal{D}_{\Delta\omega}$ と $\mathcal{D}_{\Delta\omega} \setminus \mathcal{D}_\omega$ の直積に homeomorphic であるまいか」という予想に興味を持つのである.

§ 2. I. L. H. Lie 群.

$N(d) \in \mathbb{N} \geq d$ と $\mathbb{N}$ 整数全体の集合とする. 線型位相空間の族 $\{E, E^k, k \in N(d)\}$ を I. L. H.-system とは, (i) 各 E^k は, separable Hilbert space, (ii) E^{k+l} は E^k の中に, 線型に, dense に imbed されていゝ. (iii) $E = \bigcap E^k$ であり, E の位相は, $\{E^k\}$ の ω の inverse limit topology である. とする. とする.

位相群 G を I. L. H.-system $\{E, E^k, k \in N(d)\}$ と τ する I. L. H.-Lie 群 とは, G が 次の (I) ~ (VII) の条件を充たすこととする.

(I) G の単位元 e の近傍 $\tilde{U}$ と, E^d の 0 の近傍 U と, $U \cap E$ から $\tilde{U}$ の上への同位相写像 ξ を $\xi(0) = e$ とおき ξ が存在する.

(II) E^d の 0 の近傍 V があって, $\xi(V \cap E)^2 \subset \xi(U \cap E)$, 及 $\xi(V \cap E)^{-1} = \xi(V \cap E)$ が成立.

(III) $\eta(u, v) = \xi^{-1}(\xi(u)\xi(v))$ とすると, η は $V \cap E^{k+l} \times V \cap E^k$ から $V \cap E^k$ への C^0 写像に拡張できる. 但し, $l \geq 0, k \in N(d)$.

(IV) v を固定し, $\eta_v(u) = \eta(u, v)$ とすると, η_v は, 各 $u \in V \cap E^k$ に対して, $V \cap E^k$ から $V \cap E^k$ への C^∞ 写像になる.

(V) η_v の u に於ける微分 $(d\eta_v)_u \omega \in \Theta(\omega, u, v)$ とすると, Θ は, $E^{k+l} \times V \cap E^{k+l} \times V \cap E^k$ から E^k への C^l 写像に拡張可能。

(VI) $\iota: V \cap E \rightarrow V \cap E$ と $\iota(u) = \xi^{-1}(\xi(u)^{-1})$ で定義すると, ι は $V \cap E^k$ から $V \cap E^k$ 自身への連続写像に拡張可能。

(VII) G の g を任意に固定すると, g に対して, E^d の 0 の近傍 W が存在して, $g^{-1}\xi(W \cap E)g \subset \xi(U \cap E)$ となり, $A_g \in A_g(u) = \xi^{-1}(g^{-1}\xi(u)g)$ とすると, ι は, $W \cap E^k$ から $U \cap E^k$ への C^∞ 写像に拡張される。

$k \in N(d)$ を固定し, π^k を E^k に於ける 0 の近傍系とする。但し, π^k の各元 W は, $U \cap E^k$ の中に入っているものとする。

Lemma $\{\xi(W \cap E); W \in \pi^k\}$ なる e の近傍の族は, G に最初に入っている位相よりも弱い位相を定義し, g によって, G は再び位相群となる。

この弱い位相, $\{\xi(W \cap E); W \in \pi^k\}$ によって G 上の右一致位相により G は完備化し $u, v \in G^k$ と書く。 G^k は無論, 位相群である。 $\{G^k, k \in N(d)\}$ の性質は, 次の定理で与えられる。

定理 $\{G^k, k \in N(d)\}$ は次の (G.1) ~ (G.8) の性質を持つ。

(G.1) E^d の 0 の近傍 V_i で $V_i \subset U$ となるものがあり, 写像

$\xi: V_i \cap E \rightarrow G$ は, $V_i \cap E^k$ から G^k の単体 e の近傍 $\tilde{V}_{1/2}^k$ の上へ

の homeomorphism に拡張される。但し k は任意の $N(d)$ の元である。

更に、 $\tilde{V}_{1,e}^k = \tilde{V}_{1,e}^d \cap G^k$ が成立。

(G.2) 各 G^k は C^∞ Hilbert manifold であり、かつ topological group である。

(G.3) $G^{k+1} \subset G^k$ であり、inclusion map は C^∞ 写像である。

(G.4) $G = \bigcap G^k$ であり、位相は、 $\{G^k\}$ より inverse limit topology である。1 の近傍は各 G^k の中である。

(G.5) 群演算 $(g, h) \mapsto gh$ は、 $G^{k+l} \times G^k$ より G^k への C^l 級写像となる。

(G.6) 任意の $g \in G^k$ に対して right translation $R_g: G^k \rightarrow G^k$ は C^∞ 写像である。

(G.7) 群演算 $g \mapsto g^{-1}$ は G^{k+l} より G^k への C^l 写像となる。

(G.8) $dR: T_{G^{k+l}} \times G^k \rightarrow T_{G^k}$ へ $dR(v, g) = (dR_g)(v)$ と定義すると、これは C^l 級写像である。但し、 T_{G^k} 等は、 G^k 等の接ベクトルを表す。

§3 接触変換群.

M は n 次元 C^∞ 多様体で奇数次元であり、 C^∞ contact 1-form ω を持つものとする。

T_M は M の接ベクトルとし、 $\Gamma(T_M)$ は C^∞ vector field 全体とする。 $\Gamma(T_M)$ の元 u, v には内積 $\langle u, v \rangle_\omega \in \mathbb{R}$ を与える。

$$\langle u, v \rangle_k = \int_M \sum_{\lambda=0}^k \langle \nabla^\lambda u, \nabla^\lambda v \rangle dV$$

を代入して、 γ により与えられる norm で $\Gamma(T_M)$ を完備化したものを $\Gamma^k(T_M)$ と書く。又、 C^∞ 函数の全体 $\Gamma(M)$ に対しては、上と同様に $\Gamma^k(M)$ を定義しておく。

(7) で定義される群 $\mathcal{D}_\omega$ は次式で与えられる。(これは接触変換群という。)

$$\mathcal{D}_\omega = \{ \varphi \in \mathcal{D} ; \varphi^* \omega = \tau \omega, \tau \text{ は } C^\infty \text{ 函数} \}.$$

(8) で定義される群 $\mathcal{D}_{\lambda\omega}$ は次式で与えられる。(これは強接触変換群と呼んでおこう。)

$$\mathcal{D}_{\lambda\omega} = \{ \varphi \in \mathcal{D} ; \varphi^* \omega = \omega \}.$$

γ により γ に対応する無限小変換の全体 $\mathcal{G}_\omega, \mathcal{G}_{\lambda\omega}$ (これは等 $\mathcal{D}_\omega, \mathcal{D}_{\lambda\omega}$ の Lie 環と呼ぶ) は次式で与えられる。

$$\mathcal{G}_\omega = \{ u \in \Gamma(T_M) ; d(\omega \lrcorner u) + d\omega \lrcorner u = h\omega, h \text{ は } C^\infty \text{ 函数} \},$$

$$\mathcal{G}_{\lambda\omega} = \{ u \in \Gamma(T_M) ; d(\omega \lrcorner u) + d\omega \lrcorner u = 0 \}.$$

$\mathcal{D}_\omega, \mathcal{G}_\omega$ の定義には、 τ とか h とかいう函数が入っている。一寸取扱いが面倒だから、以下に述べるような記法を用いておく。

$\Gamma_*(M)$ は positive 又は negative definite な C^∞ 函数の全体とする。

又、 $\Gamma_*^k(M)$ は、 $f \in \Gamma^k(M)$ で、positive 又は negative definite な函数の全体とする。Sobolev の補題があるから、 $\Gamma_*^k(M)$ は、 $k \geq [\frac{1}{2} \dim M] + 1$ で定義できる。又、 $\Gamma^k(M)$ の部分集合である。

$\Pi_*(\mathcal{L}_M) * \mathcal{Q}$ は、直積 $\Pi_*(\mathcal{L}_M) \times \mathcal{Q}$ に群演算 $(f, \varphi) * (g, \psi) = ((\psi^* f) \cdot g, \varphi \psi)$ を与えることができる。但し、 $(\psi^* f)(x) = f(\psi(x))$ である。

$n = \dim M$ とし、まず、次の事実がある。

定理 (1) $\mathcal{Q}$ は、I.L.H.-system $\{\Gamma(T_M), \Gamma^k(T_M), k \in N(n+5)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群である。

(2) $\Pi_*(\mathcal{L}_M) * \mathcal{Q}$ は I.L.H.-system $\{\Pi(\mathcal{L}_M) \oplus \Gamma(T_M), \Gamma^k(\mathcal{L}_M) \oplus \Gamma^k(T_M), k \in N(n+5)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群である。

(i) $\Pi(\mathcal{L}_M) \oplus \Gamma(T_M)$ には自然に Lie 環の構造が入る。Lie bracket は、
 $[(f, u), (h, v)] = (uh - vf, [u, v])$ と与えられる。

このことを用いて、 $\mathcal{G}_\omega$ を次のように定義し得る。

$$\mathcal{G}_\omega = \{(f, u) \in \Pi(\mathcal{L}_M) \oplus \Gamma(T_M) : f\omega + d(\omega \lrcorner u) + d\omega \lrcorner u = 0\}.$$

更に、 $\mathcal{Q}_\omega \subset \{(c, \varphi) \in \Pi_*(\mathcal{L}_M) * \mathcal{Q} : c\varphi^*\omega = \omega\}$ と定義し得る。

$\mathcal{G}_\omega^k \subset \mathcal{G}_\omega$ が $\Gamma^k(\mathcal{L}_M) \oplus \Gamma^k(T_M)$ に於ける closure となる。

定理 $\mathcal{Q}_\omega$ は I.L.H.-system $\{\mathcal{G}_\omega, \mathcal{G}_\omega^k, k \in N(n+7)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群である。更に、 $\Pi_*(\mathcal{L}_M) * \mathcal{Q}$ は $\{\Pi(\mathcal{L}_M) \oplus \Gamma(T_M), \Gamma^k(\mathcal{L}_M) \oplus \Gamma^k(T_M), k \in N(n+7)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群と考えることができる。 $\mathcal{Q}_\omega$ は、その内 I.L.H. 部分群である。

$\pi \in \Pi_*(\mathcal{L}_M) * \mathcal{Q}$ から $\mathcal{Q}$ への射影とすれば、これは群の準同型であり、自然に $\Gamma_*(\mathcal{L}_M) * \mathcal{Q}^k$ から $\mathcal{Q}^k$ への射影に拡張される。

$\pi \in \mathcal{Q}_\omega$ に制限したものは kernel を持つらしいから、 $\mathcal{Q}_\omega$ は自然に $\mathcal{Q}$ の中に入っていると思うことになり得るのだが、実は、 $\mathcal{Q}_\omega$ は $\mathcal{Q}$ の I.L.H. 部分群ではない。その事情を説明しよう。

$\pi: \mathcal{Q}_\omega \rightarrow \mathcal{Q}$ は、各 $k \in N(n+r)$ に対して、 $\mathcal{Q}_\omega^k$ から $\mathcal{Q}^k$ への C^∞ 級写像に拡張され、それは 1:1 であり、homomorphism になっている。 $\mathcal{Q}_\omega$ から $\mathcal{Q}$ の I.L.H. 部分群と見做す為には、 $(d\pi)_* g_\omega^k$ から $\Gamma^k(T_M)$ の中で閉集合になっていること、当然要求される。(I.L.H. 部分群の定義を書いておいたものの、この点不明確だが、有限次元多様体の部分多様体の定義と同様に定義してある。) しかし、実際には $(d\pi)_* g_\omega^k$ は $\Gamma^k(T_M)$ の中で closed subspace になっているのである。その理由を略記すれば次の如くなる。

ω に対して、characteristic vector field $\xi_\omega \in \omega \cup \xi_\omega = 1, d\omega \cup \xi_\omega = 0$ と定義する。 $E_\omega \in \omega = 0$ と定義される T_M の subbundle, $E_\omega^* \in \xi_\omega = 0$ と定義される T_M^* の subbundle とする。 $T_M = R\xi_\omega \oplus E_\omega$, $T_M^* = R\omega \oplus E_\omega^*$ である。 $\Gamma(E_\omega)$ は E_ω の C^∞ section の全体とし、それらは前と同様に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の内積を作り、更に $\Gamma^k(E_\omega) \in \mathbb{R}$ である。 g_ω^k は、 $\Gamma^k(T_M) \oplus \Gamma^k(T_M)\xi_\omega \oplus \Gamma^k(E_\omega)$ の subspace である。実は、

$$g_\omega^k = \{ (h, f\xi_\omega + u) \in \Gamma^k(T_M) \oplus \Gamma^{k+1}(T_M)\xi_\omega \oplus \Gamma^k(E_\omega); h = df \lrcorner \xi_\omega, u = -d\omega^{-1}(df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega) \}$$

である。(f は任意である。これは g_ω^k と $\Gamma^{k+1}(T_M)$ から 1:1 に対応していることを示している。)

一方 $(d\pi)_e$ は ω -成分を消す写像だから.

$$(d\pi)_e \mathcal{G}_\omega^k = \{ f\xi_\omega + u \in \Gamma^{k+1}(L_H) \oplus \Gamma^k(E_\omega) ; u = -d\omega^{-1}(df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega) \}$$

である. したがって, $\Gamma^k(T_H) = \Gamma^k(L_H)\xi_\omega \oplus \Gamma^k(E_\omega)$ の closure を考えよう.

もし, $\mathcal{G}_\omega^k$ が $(d\pi)_e \mathcal{G}_\omega^k$ と一致しているならば, $df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega \in \Gamma^k(E_\omega^*)$

という事になる. $df \in \Gamma^k(L_H)$ 従って $f \in \Gamma^{k+1}(L_H)$ である結論が得られる.

もしそうなら等式である. ところが $\Gamma^k(L_H)$ の元 $df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega$ が

$\Gamma^k(E_\omega^*)$ に入るものは存在する. (局所座標 x と y を用いて局所的に考えれば存在する.)

従って, $(d\pi)_e \mathcal{G}_\omega^k$ は $\Gamma^k(T_H)$ の中で閉集合である.

以上である. この事情から, 序で述べた予想を考えたとき困難の一つである.

§4 強接触変換群.

強接触変換群は, 一般には I.L.H. Lie 群にはならないと思われている. $\mathcal{G}_\omega$ は, 次の式で与えられる.

$$\mathcal{G}_\omega = \{ f\xi_\omega + u \in \Gamma(L_H)\xi_\omega \oplus \Gamma(E_\omega) ; df \lrcorner \xi_\omega = 0, u = -d\omega^{-1}df \}.$$

従って, $\mathcal{G}_\omega$ のときと違っていて, f は任意関数である. ξ_ω の積分曲線上で一定の関数である. 従って, ξ_ω の積分曲線が複雑

だと, $\mathcal{G}_\omega$ の方がより複雑になる等である. したがって, $\mathcal{G}_\omega$ は,

characteristic vector field ξ_ω が S^1 の free action を引き起こすと仮定する.

奇数次元の球面に入る自然な contact 構造等は, この

性質を持つている. ξ_ω が生成する one parameter group を $\mathbb{R}_\omega$ と

する。仮定 π は orbit space N は 閉多様体であり、 M は N 上の S^1 bundle である。 M は N への射影 π とする。

$\mathfrak{g}_{\Delta\omega}^k \in \mathfrak{g}_{\Delta\omega}$ の $\Gamma^k(T_M) = \Gamma^k(L_M)\xi_\omega \oplus \Gamma^k(E_\omega)$ 内での closure とする。簡単に、 $\mathfrak{g}_{\Delta\omega}^k = \{ \xi \xi_\omega - d\omega^{-1}d\xi ; \xi \in \pi^*\Gamma^{k+1}(L_N) \}$ である。 $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$, $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ は $\mathcal{Q}_\omega$, $\mathcal{Q}_\omega^k$ の部分群として、 $\mathcal{Q}_{\Delta\omega} = \{(\tau, \varphi) \in \mathcal{Q}_\omega ; \tau = 1\}$, $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k = \{(\tau, \varphi) \in \mathcal{Q}_\omega^k ; \tau = 1\}$ と定義しておく。

定理 Characteristic vector field ξ_ω は S^1 の free action を引き起こす。 $\mathcal{Q}_\omega$ の中では、 $\mathfrak{g}_{\Delta\omega}$ は Lie 環を持つ連結な I.L.H. 部分群 $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}$ が存在する。 かつ、 $\mathcal{Q}_{\Delta\omega} \subset \mathcal{Q}_{\Delta\omega}$, $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k \subset \mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ である。 但し、 $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ は I.L.H. Lie 群として、§1 の定理による Q^k にあたるものである。 更に、 $\mathcal{Q}_\omega^k$ の中の始点と単位元とする C^1 -curve は各点で $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ に入るならば、その curve は実は $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ に入っている。

ここで、 $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ はまだ、どんな集合であるかわからないうことは注目しよう。 $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ は locally C^1 -arcwise connected という事であることを $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ は $\mathcal{Q}_{\Delta\omega}^k$ の連結成分と認めるのである。 ここで、まだそれだけ云えていないのである。

この定理の証明の大筋は、 $\mathfrak{g}_{\Delta\omega}^k$ は right translation で $\mathcal{Q}_\omega^k$ 上に行くと、実は $k \in N(n+r)$ に於ては C^∞ distribution と認めることを云い、(これは面倒である) $\mathfrak{g}_{\Delta\omega}$ は Lie 環である、これは involutive と認めることを云い、それに対してフロベニウスの定理が成立することを云い、単位元を通る極大積分曲面を作るの

である。こうして得られる $\mathcal{Q}'_{\omega}$ であって、これについては上の定理までいえるのである。

M が単連結ならば N もそうであるから、この事と、 ω は N の symplectic 2-form とより、 $\mathcal{Q}_{\omega}$ の ω は N に symplectic diffeom. を引き起こすことと、序文 (5) の事実を使うと、実は、 $\mathcal{Q}_{\omega}^k$ が locally C^1 -arcwise connected であることが得られる。従って、

定理 前定理の条件に加え M が単連結という事に加えられる、 $\mathcal{Q}_{\omega}$ は $\mathcal{Q}_{\omega}$ の内 I.L.H. 部分群である。しかも、 $\mathcal{Q}_{\omega}$ は、 $\mathcal{Q}_{\omega}/\mathcal{Q}_{\omega}$ は底空間とし、 $\mathcal{Q}_{\omega}$ をファイバーとする fibre bundle である。しかも、各 $\mathcal{Q}_{\omega}^k/\mathcal{Q}_{\omega}^k$ は C^{∞} Hilbert 多様体である。(実際には、もう少し強く、 $\mathcal{Q}_{\omega}/\mathcal{Q}_{\omega}$ は I.L.H.-多様体と呼ぶものになっている。)

§5 商空間 $\mathcal{Q}_{\omega}/\mathcal{Q}_{\omega}$

序文で述べた予想は、 $\mathcal{Q}_{\omega}/\mathcal{Q}_{\omega}$ が可縮であれば無論肯定的に解決される。しかし、実際には、この商空間がどれほど奇妙かは全く見当がつかない。その難しさの説明にとどめることにする。

$\Gamma_*(1_H)$, $\Gamma^k_*(1_H)$ は §3 で定義したのと同一とする。 $\mathcal{Q}_{\omega}$ の $\Gamma_*(1_H)\omega$ への写像 $p \in p(\tau, q) = q^*\omega = \tau^*q$ で定義すれば、これは、各 k に対して $\mathcal{Q}_{\omega}^k$ から $\Gamma^k_*(1_H)\omega$ への C^{∞} 写像に拡張で

こと。(但し、 $k \in N(n+r)$) $p\mathcal{Q}_\omega^k$ は ω の $\mathcal{Q}_\omega^k$ に属する orbit と云うことが出来る。従って、 $\mathcal{Q}_\omega^k \setminus \mathcal{Q}_\omega^k$ と $p\mathcal{Q}_\omega^k$ とは自然に同一視できる。従って、商空間を調べるには、 $p\mathcal{Q}_\omega^k$ を調べれば良い。

$$E^k = \{f \in \Gamma^k(I_M) : \int_{S^1} f(\Sigma_t x) dt = 0\}, \quad E = \bigcap E^k, \quad \text{と可なり。}$$

$$\Gamma(I_M) = \rho^* \Gamma(I_N) \oplus E, \quad \Gamma^k(I_M) = \rho^* \Gamma^k(I_N) \oplus E^k \quad \text{とある。}$$

Lemma $(dp)_* \mathcal{Q}_\omega^k$ は $E^k \omega$ の中の dense subset である。従って、 $p\mathcal{Q}_\omega^k$ は $\Gamma^k(I_M)$ の Hilbert submanifold であり得る。

証) $\mathcal{Q}_\omega^k, \Gamma^k(I_M)$ は C^∞ Hilbert 多様体、 p は C^∞ 写像だから、微分 dp は考えられる。

$$(dp)_* (-df \lrcorner \xi_\omega, f\xi_\omega - d\omega^{-1}(df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega)) = (df \lrcorner \xi_\omega)\omega$$

であり、 $f \in \Gamma^{k+1}(I_M)$ ならば $(df \lrcorner \xi_\omega)\omega \in \Gamma^k(I_M)\omega$ であるから $\mathcal{Q}_\omega^k$ 上の $\int_{S^1} (df \lrcorner \xi_\omega)(\Sigma_t x) dt = 0$ ならば $E^k \omega$ に属する。このことより $E^k \omega$

全体と見做すことができる。 $g \in E^k$ に対して $h \in \Gamma^{k+1}(I_M)$ があり、

$$g = dh \lrcorner \xi_\omega \quad \text{と表すことは一般には結論できない。} \quad (\text{しかし、}(dp)_* \mathcal{Q}_\omega^k$$

が $E^k \omega$ の中で dense であることは上の事実から示すことが出来る。

$$\text{Lemma} \quad (dp)_{(\tau, \varphi)} T_{(\tau, \varphi)} \mathcal{Q}_\omega^k = \left\{ df \lrcorner \xi_\omega - \frac{1}{\tau} df \lrcorner \{\tau\} \omega, f \in \Gamma^{k+1}(I_M) \right\}$$

$$\text{但し、}\{\tau\} = d\omega^{-1}\{d\tau - (d\tau \lrcorner \xi_\omega)\omega\}.$$

この事は、 $p\mathcal{Q}_\omega^k$ が $\Gamma^k(I_M)$ の中の affine space の中に属する

という事と都合の良い性質は示すことが出来る。従って、

$p\mathcal{Q}_\omega^k$ の性質は、今の所全く不明である。