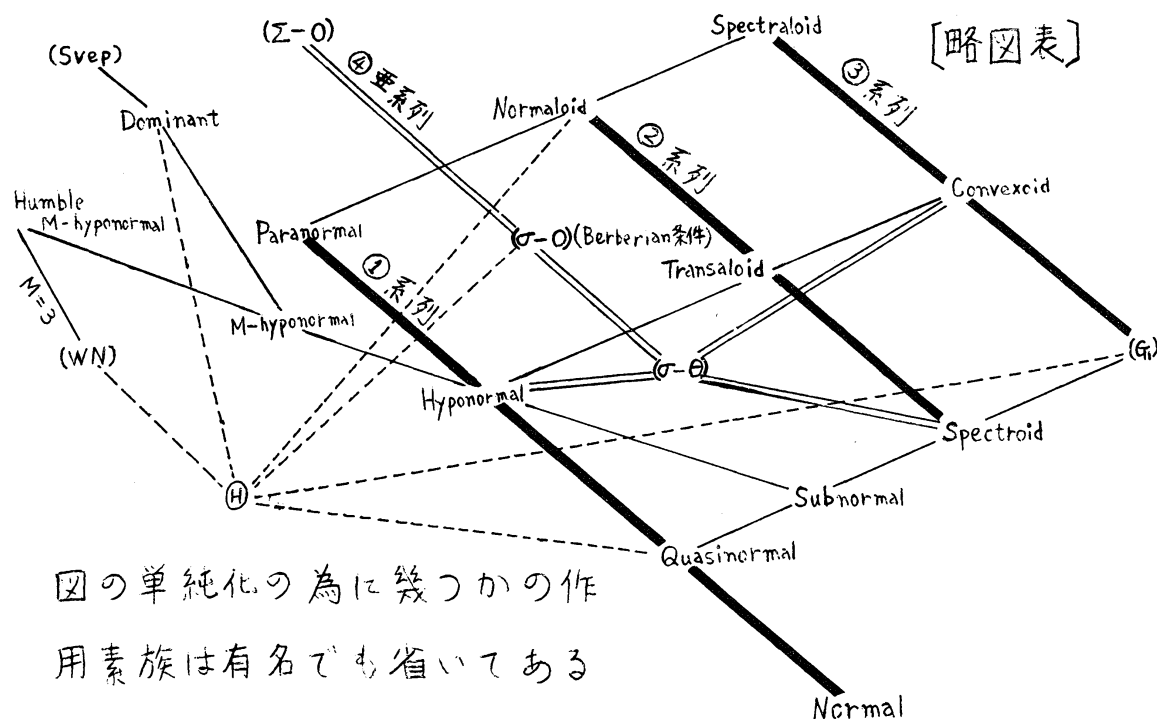


④作用素族について

桃谷高校

加藤佳宣

§ 0. 方針と内容 ④作用素 T とは複素 Hilbert 空間上の(有界線形)作用素で T^*+T と T^*T が可換であるようなものであ



①: Algebraically definite 系列

②: Spectral set 系列

③: Growth condition 系列

④: Berberian 条件に関連した系列

る。この作用素族は5年前に S.L.Campbell により導入され、その後の作用素論の研究で相当に興味深い性質が発見されてきている。本稿ではその概略を、最近得た一結果も含め、紹介したい。④作用素族の話題は今後更に急旋回を見せる兆があり、しかも海外研究者の間でも現在までの基本成果の評定にかなりの食い違いが認められるようなので到底、公正な survey などとは及ばぬ処である。そこでむしろ本稿では、大幅に私見を加えて筆者なりの見取り図の提示を試みることにした。文献の調査不足も手伝い、不徹底な出来上がりになってしまったが、せめてこれをきっかけに④作用素族に関心を持たれる方が多くなればと願っている。

§ 1. ④作用素族前史 ④作用素族の導入は、調べた限りで1975年に文献[2]で行なわれている。その頃までの、いわゆる非正規作用素の理論についての研究状況は、例えば[10][16]などに詳しい解説が見られる。取り敢えずここでは、その頃までに非正規な作用素族が大きく三系列に分かれるという図式が固められてきていたことを述べておきたい。その三系列というのは前頁の図にも示したように([14]も参照)

① Algebraically definite 系列

② Spectral set 系列

③ Growth condition 系列

であり、その他に亜系列として Berberian condition(後述)を満たす作用素族($\sigma - 0$)を含むものが考えられていた。そしてその頃の主な研究テーマというのは「正規作用素で成り立っている種々の性質の成立範囲の見きわめ」ということに集約できるように考えられる。この線に沿いながら種々の非正規な作用素族が開発、研究されてきた訳である。その当時、非常によい性質を示し研究も活発に行なわれたのは hyponormal と convexoid 作用素族周辺のものであったようである。反面、subnormal 作用素族は非正規作用素の一般論からは扱いにくく、また quasinormal 作用素族は極めて構造のよく判ったものとして、どちらも研究の中心からはやや離れていた。図式的に言えば、normal 作用素に近い部分の研究がまだ十分整備されていなかったということである。S.L.Campbellはこの部分に目を向け、quasinormal 作用素族と hyponormal 作用素族との間に新しく興味深い作用素族を見つけないと考えたようである。その狙いは結果的に成功したと言えるが、見つかった④作用素族は以下に見ていくように、必ずしも彼の思惑通りに振舞うものではなかったのである。

§ 2. ④作用素の発見 発見当時の Campbellの問題意識は、どうやら不変部分空間問題の解けるよううまく制限された作用素族を見つけることにあったらしい。つまり正規性の概念をうまく一般化していき、不変部分空間予想の成立する範囲をじわじわと広げて、ひとまず hyponormal 作用素族にまで至ろう、というのがもくろみであったように見える。ここでもう少し臆測を許して頂くと、④で hyponormal のすぐ下には subnormal があり、更にその下に quasinormal, normal と続いている。ここで subnormal は扱いにくいので除外するとすれば、hyponormal と normal との間で残るのは quasinormal しかない。しかし quasinormal 作用素族についての不変部分空間問題は殆んど自明に近い話である。そこで何とかこの quasinormal 作用素族をもう少し広げられないかということになってくる。この拡張を試みる一つの自然な方法は hyponormal 作用素族と比較することである。勿論以上の考え方の他にも、例えば hyponormal 性の条件を少し強めてみるという方法も可能である。実は Campbell は④作用素族導入の少し前にその方法も試みていて別の作用素族も得ているがこの話題については割愛したい。さて、或る特定の作用素族が或る演算操作に関して閉じているかど

うかというのは重要な作用素論のテーマの一つである。
 例えば hyponormal 作用素族が scalar 倍と scalar 和に対して閉じていても $*$ 演算に関して閉じていないということが、
 seminormal 作用素族導入の一動機となっている。一方、
 quasinormal 作用素族では、実は scalar 倍について閉じてはいても scalar 和でも $*$ 演算でも閉じていない。real scalar 和でさえ閉じていない実例として simple unilateral shift S を挙げる事が出来る。この場合 S は quasinormal であるが $S + 1$ は $[(S+1)^*(S+1), (S+1)] = 1 - SS^* \neq 0$ から quasinormal とはならない。これは案外に狭い作用素族なのである。しかし、計算してみると作用素 T が

$$(*) \quad T = A + B \quad A: \text{quasinormal} \quad B = B^* \quad A \text{ と } B \text{ (可換)}$$

の形のときでも、 T は $[T^*T, T^* + T] = 0$ は満たされていると判る。これが $\textcircled{H}$ 作用素族の条件である。実はこの $\textcircled{H}$ 作用素族はやはり $*$ 演算については閉じていないが、real scalar 倍と real scalar 和について閉じているので十分自然な概念と考えられる。初め Campbell は $\textcircled{H}$ 作用素 T はすべて $(*)$ の形になると予想していた。 $(*)$ の形であれば $[T] = [A] \geq 0$ から hyponormal となる訳で更に都合がいい。残念ながらこの予想はのちに否定される。(§4 参照) 彼はこの論文 [2] では、不変部分空間問題に関連させて operator valued

inner functionの考察を行ない、特に次の関数、($\|T\| < 1, |w| < 1$)

$$V(w) = (1 - T^*T)^{-1/2} (w - T^*)(1 - wT)^{-1} (w - T)(1 - wT^*)(1 - T^*T)^{1/2}$$

が scalar 値となる T の十分条件として $T \in \mathcal{H}$ を提示している。

その真意はともかく、以後の彼の論文では $\mathcal{H}$ 作用素族

族について $V(w)$ との関連を論じたものは姿を消している。

そして、このような形で言わば暫定的に導入された $\mathcal{H}$ 作用

素族に思いがけず深い性質が発見されて新しい発展が始ま

る訳である。

§ 3. $\mathcal{H}$ 作用素族研究の基礎技術 その次に出た論文は [1] で

ある。この論文のテーマは先の(*)についての予想の考察

であるが、それと同値な(予想)命題を提示するだけに終わっ

ている。しかし、この論文が重要なのは $\mathcal{H}$ 作用素 T に対

して (λ : scalar)

$$B_T(\lambda) = (\lambda - T^*)(\lambda - T) = \lambda^2 - \lambda(T^* + T) + T^*T$$

という関数が導入されたことにある。この一風変わった

関数は以後の研究に本質的な役割を果たすことになる。

Campbell 自身によるこの応用の一例を見てみよう。

命題 1. $T \in \mathcal{H}$, $Tx = \lambda x \implies T^*x = \lambda^*x$

略証. $\lambda \neq \lambda^*$ かつ $T: 1-1$ としてよい。 $Tx = \lambda x$ より $[T]x$

$= (\lambda - T)T^*x$ 、そして $T \in \mathcal{H}$ より $T^*[T] = [T]T$ であることが

ら、 $B_T(\lambda)T^*x = (\lambda - T^*)[T]x = [T](\lambda - T)x = 0$ となる。ここで $T \in \mathcal{H}$ より $B_T(\lambda)$ は normal となるので、 $B_T(\lambda^*)T^*x = B_T(\lambda)^*T^*x = 0$ が判り、そして $0 = B_T(\lambda^*)T^*\lambda x = B_T(\lambda^*)T^*Tx = T^*TB_T(\lambda^*)x$ が言える。 T が 1-1 から $B_T(\lambda^*)x = 0$ 、そこで $0 = B_T(\lambda^*)x = (\lambda - \lambda^*)(\lambda^* - T^*)x$ が示せたが、 $\lambda \neq \lambda^*$ より証明が終わった。

この命題そのものはそれ程深みのある内容には感じられないが、それでも証明はこれだけかかってしまう。しかも論証の進め方も何となく異質である。

実は、この命題は一番最後に述べることになる或る事実の一部になっているのだが、その事実の証明には更に以下の論文で展開される $\mathcal{H}$ 作用素族特有の結果と手法が必要である。

さて、次の[5]でも、まだ $\mathcal{H}$ 作用素が一般に hyponormal でないことは知られていない。それは更に次の論文になる。

[5]では $\mathcal{H}$ 性から hyponormal 性にどの程度迫れるかがテーマである。この中で彼らが発見した最も注目すべき事実というのは次のものと考えられる。

定理 2. $4T^*T - (T^* + T)^2 \geq 0 \quad (T \in \mathcal{H})$

これは $\mathcal{H}$ の hyponormal 性を導こうと試みているうち偶然に得られたものかもしれないが、これが $\mathcal{H}$ 作用素族に対して更

に独特の研究方法を与えることになる。この事情をはっきりさせる為に、[13]でexplicitに導入したCampbell同値性 $\sim^{\text{H}}$ の概念を述べる。作用素 S, T に対して

$$S \sim^{\text{H}} T \iff \operatorname{Re} S = \operatorname{Re} T, |S| = |T|$$

これも一風変わった感じの同値関係である。この同値関係も real scalar 倍と real scalar 和で保存される。更に幾つかの性質を挙げてみよう。

命題3. $N \sim^{\text{H}} N^* \iff N : \text{normal}$ (自明)

定理4. $B = B^*, A \sim^{\text{H}} B \implies A = B$

略証. $A = B + \operatorname{Im} A$ とデカルト分解すれば $B^2 = A^*A = B^2 -$

$i[\operatorname{Im} A, B] + (\operatorname{Im} A)^2$ だから、 $[\operatorname{Im} A, B] = (\operatorname{Im} A)^2$ となり、

Kleinecke-Shirokov の定理から $(\operatorname{Im} A)^2$ が quasinilpotent と

なって $\operatorname{Im} A = 0$ が示せる。すなわち $A = B + \operatorname{Im} A = B$

定理5. $T \sim^{\text{H}} U : \text{unitary} \iff T : \text{isometry}$

略証. $\implies$: はよい。 $\impliedby$: は $U = \operatorname{Re} T + i\sqrt{1 - (\operatorname{Re} T)^2}$ と置けばよい。

次の定理は[15]で初めて指摘された。

定理6. $N : \text{normaloid} (\iff \|T\| = r(T)) \quad T \sim^{\text{H}} N \implies T : \text{normaloid}$

これは次の補題から判る。

補題7. $S \sim^{\text{H}} T \implies \|S\| = \|T\|, r(S) = r(T)$

($w(S) = w(T)$ となるかどうかはまだ知られていないようである)

略証. 前半はよい。後半は、 ∂ を境界、 $\hat{\sigma}(T)$ を $\{\lambda; B_T(\lambda) \text{ が非可逆}\}$ としたとき、 $\partial \sigma(S) \subset \hat{\sigma}(T) \subset \sigma(S) \cup \sigma(S^*)$ を示せば済む。この前半の包含関係は $\lambda \in \partial \sigma(S)$ が approximate point spectrum となっていることから $\|(\lambda - S)x_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる $\|x_n\| = 1$ を取ることで、 $\|B_T(\lambda)x_n\| \leq \|\lambda - S^*\| \|(\lambda - S)x_n\| \rightarrow 0$ と出来ると注意すれば判る。後半も $B_T(\lambda) = \lambda^2 - (T^* + T)\lambda + T^*T = (\lambda - S^*)(\lambda - S)$ であることに注意してみればよい。

補題 7 からは次のことも得られる。

命題 8. $Q: \text{quasinilpotent}$ $T \stackrel{\textcircled{H}}{\sim} Q \implies T: \text{quasinilpotent}$

これに関連して直接計算で、

命題 9. $Q^2 = 0$, $T \stackrel{\textcircled{H}}{\sim} Q \implies T = Q$

命題 8 と 9 は [11] にある。また、次の事実は文献には載っていないが、idempotent ($J^2 = J$) が $\begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形に (適当な基底の取り方で) 表せることに注意すれば容易である。

命題 10. $J^2 = J$, $T \stackrel{\textcircled{H}}{\sim} J \implies T = J$

このような文脈の中で、彼らの発見した定理 2 の結果が次のように意味づけられる。

定理 11. $T \stackrel{\textcircled{H}}{\sim} N: \text{normal} \iff T \in \textcircled{H}$

略証. $\implies$: は明らか。 $\impliedby$: は、 $T \in \textcircled{H}$ ならば定理 2 より

り $N = \frac{T^* + T + \lambda \sqrt{4T^*T - (T^* + T)^2}}{2}$ と置いて、この N が求める normal と判る。

勿論、定理11から直ちに定理2が出せるから両者は同値な命題である。この定理11に定理5を組み合わせると

定理12. $T \in \mathcal{H} \implies T : \text{normaloid}$

が得られる。このように、 $\mathcal{H}$ 作用素 T の性質の解明に定理11での normal N の考察が、Campbell 同値を経由して積極的に利用できることになる。これは命題1の段階では思いもよらなかった展開である。

しかしながら定理11や2の成立する根拠というものはもう一つは、きりしない。現在知られている証明は技術的にうますぎて感覚がついて行けない気がする。そこで証明は略すことにし、代わりに一つの Speculation のようなものを述べてみたい。その Speculation の出発点は $\mathcal{H}$ 作用素が hyponormal 作用素と奇妙に似た振舞いをするというところにある。hyponormal 作用素については最近、構造の完全決定が成され、[6]に発表されているがそこで重要な役割を演じた道具の一つに $(A = A^*)$

$$S_A^\pm(T) = \text{strong-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itA} T e^{-itA}$$

という作用素がある。これは常に存在する訳ではないが存在するとときには $A \subset S_A^\pm(T)$ となる。 $A = \text{Re } T$ のときには従って $S_A^\pm(T) = A + i S_A^\pm(\text{Im } T)$ は normal となるが、実際 hyponormal T についてはこれが成立している。さて $T \in \mathcal{H}$

に対しては $A = \operatorname{Re} T$ として

$$(e^{itA} T e^{-itA})^* + (e^{itA} T e^{-itA}) = e^{itA} (T^* + T) e^{-itA} = T^* + T$$

$$(e^{itA} T e^{-itA})^* (e^{itA} T e^{-itA}) = e^{itA} (T^* T) e^{-itA} = T^* T$$

から、 $T \overset{\textcircled{H}}{\sim} e^{itA} T e^{-itA}$ が判る。ここで右辺を $t \rightarrow \pm\infty$ としてみる。hyponormal作用素からの類推で、 $T \overset{\textcircled{H}}{\sim} S_A^\pm(T)$ が成り立ってもよさそうである。このとき $S_A^\pm(T)$ は normal であるから定理IIが直ちに得られることになる。かなり粗雑な議論であるが、せめて $S_A^\pm(T)$ の片方だけの存在でも自然な論法で示せるなら、この筋書きが遂行できるかもしれない。勿論、 $S_A^\pm(T)$ の存在が示されたとすれば、これを利用して hyponormal の議論に並行させて、 $\textcircled{H}$ 作用素の構造の決定を行なう見込みも生まれてくる。そうなれば、最終的に $\textcircled{H}$ 作用素と hyponormal作用素との奇妙な類似性の根拠も明らかになることだろう。

§4. Hyponormal性との関連 実は既に、或る種の $\textcircled{H}$ 作用素についてはその構造の完全決定が(hyponormalの場合とは全く異なった形で)行なわれている。それは次の文献[4]にある。[4]ではまず、 $\sigma(T) \cap \mathbb{R}(\text{実数}) = \emptyset$ である $\textcircled{H}$ 作用素 T の構造決定が成され、その応用として懸案だった hyponormalではない $\textcircled{H}$ 作用素の実例が作られている。今、 $T \in \textcircled{H}$ を、

$\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ であるようなものとする。そのような T であれば $\sigma(T)$ は $\mathbb{R}$ で分割(片方は空かもしれないが)されるからその上半開平面内で $\sigma(T)$ を囲むように Jordan 曲線 Γ を取り $J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - T)^{-1} d\lambda$ と置けば idempotent J が得られる。

更に定理 11 の N を取ってやれば、

定理 13. このような J と N は次を満たす

$$(0) \quad T = NJ + N^*(1 - J)$$

$$(i) \quad JN^*(1 - J) = 0$$

$$(ii) \quad (1 - J)NJ = 0$$

$$(iii) \quad J^*(N - N^*)(1 - J) = 0$$

しかも逆に、

定理 14. idempotent J , normal N が定理 13 (i) - (iii) の条件を満たしていれば、 $T = NJ + N^*(1 - J)$ は $T \in \mathcal{H}$ となる。

これに関連して、実は次の事実も示されている。

定理 15. N が normal で $\sigma(N)$ が上半開平面に含まれるものとし

$\mathcal{M}_1$ を N の不変部分空間、 $\mathcal{M}_2 = (N - N^*)\mathcal{M}_1^\perp$ 、 J を $\mathcal{M}_1$ 上への $\mathcal{M}_2$ に沿う idempotent とすれば N と J は定理 13 (i) - (iii) の条件を満たす

これで $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ であるような $T \in \mathcal{H}$ の構造決定ができた。そしてこのような T については、

定理 16. $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ である $T \in \mathcal{H}$ が normal でなければ

hyponormalでもない

こうしていよいよ懸案となっていた hyponormal でない $\textcircled{H}$ 作用素の例が得られる。

実例17. Hilbert空間を Hardy空間 H^2 とみて、 T が単位円周、 N を $L^2(T)$ 上の作用素で $Nf(\theta) = (e^{i\theta} + 2\lambda)f(\theta)$ と置く。 J は H^2 上への $(2 + \lambda \sin \theta)^{-1} H^{\perp}$ ($\perp$ は直交補空間) に沿う idempotent とし $T = NJ + N^*(1-J)$ と置けば、 T が求めるものである。

これで $\textcircled{H}$ 作用素が一般に hyponormal 性を持ち得ないことが判った。しかし既に定理12で見たように hyponormal 性を弱めた normaloid 性は持っている訳である。[4]では更に次の事実を示している。

定理18. $T \in \textcircled{H} \implies T \in (G_1)$ すなわち $\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \text{dist}(\lambda, \sigma(T))^{-1}$

それでは例えば $\textcircled{H}$ 作用素が paranormal 性を持つかどうかということも問題になってくる。 $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ である $T \in \textcircled{H}$ について調査して見当がつけられればかなりはつきりする筈であるが、残念ながら定理15や実例17での J の与え方は余り計算し易い形ではないようである。もう少しこの J の形が、 2×2 行列表示などで具体的に出来るなら反例の発見が相当楽になると思われる。

[4]ではまた、 $T \in \textcircled{H}$ が hyponormal であっても $(*)$ の形ではないという実例を示している。そのほかに興味深い結果も述

べられているが、やや散発的と見えるので略すことにしたい。

[3]では更に次の結果が示されている。

定理19. $T \in \mathcal{H}$ が hyponormal $\implies T$: subnormal

これには大変な証明が必要で、非有界擬逆作用素などが使われる。そして証明の同じ文脈で次も示されている。

定理20. $T, T^* \in \mathcal{H} \implies T$: normal

これは $\mathcal{H}$ 作用素族の代わりに hyponormal 作用素族の話であれば自明な結果にあたるが、この場合はこれ程難解な定理となる。しかし、それにもかかわらずともかくも、hyponormal 作用素族と並行した結果が成立しているというのが特に定理19の結果と併せて考えてみると、相当に意味深長と思える。

なお、Campbell には他にも $\mathcal{H}$ 作用素族に触れた論文があるが、本稿ではその性格上省略することにした。

§ 5. $\mathcal{H}$ 作用素族の位置づけ ここで $\mathcal{H}$ 作用素族の図式上の位置づけを検討してみたい。まず $\mathcal{H}$ 作用素族は明らかに

① Algebraically definite 系列

に属する。反面、定理12から $\mathcal{H}$ 作用素族は normaloid 性を持つから

② Spectral set 系列

にも属している。更に定理18から $T \in \mathcal{H}$ は (G_1) となるので

③ Growth condition 系列

ともつながってくる。ところが実は $\mathcal{H}$ 作用素族は残りの亜系列とも関わっているのである。

定理21. $T \in \mathcal{H} \implies T$ は Berberian 条件を満たす $(\sigma - 0)$

$$\text{すなわち } \operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma(\operatorname{Re} T)$$

これは[3]にある。こうしてみると $\mathcal{H}$ 作用素族は全部の系列に加わっている訳で、これまでの図式ではうまく分類し切れない。そうすると、 $\mathcal{H}$ 作用素族を位置づけようとするれば、その図式を再検討する必要が生ずる。[8]はそうした方向を目指した試みのように見える。この論文では彼らは

$$T \in (WN) \iff |T|^2 \geq (\operatorname{Re} T)^2$$

という新しい作用素族を導入してくる。 (WN) 作用素族は定理2から明らかに $\mathcal{H}$ 作用素族を含むが、同時に hyponormal 作用素族も含んでいることが判る。すなわち彼らは $\mathcal{H}$ 作用素族と hyponormal 作用素の奇妙な並行性の根拠を (WN) のレベルで捉えようと試みているのである。彼らの指摘した重要な事実として

命題22. (i) $T : \text{hyponormal} \iff |T|^2 \geq (\operatorname{Re} T)^2 + (\operatorname{Im} T)^2$

$$(ii) \quad T^*: \text{hyponormal} \iff |T|^2 \leq (\operatorname{Re} T)^2 + (\operatorname{Im} T)^2$$

$$\text{定理 23. } T = T^* \iff |T|^2 \leq (\operatorname{Re} T)^2$$

命題 22 は計算だけの話だが、定理 23 はそうではない。そして前者は $\mathcal{H}$ 作用素族と hyponormal 族との奇妙な関連を暗示しているし、後者は (WN) 作用素が “co-selfadjoint” といった性格のものであると表明している。このことに関連して最近 [9] で次が示された。

$$\text{定理 24. } |T| \leq \operatorname{Re} T \implies T \geq 0$$

証明は見かけの簡明さに反して全く簡単ではない。このような斬新なテーマが発展して行くことで、 $\mathcal{H}$ 作用素族を核とした図式の再編成が進んで来るように感じられる。

勿論、 $\mathcal{H}$ 作用素族の今後の研究方向がこのような方向だけに限られるべきだとは思えない。研究を十分に進める為には更に様々の方向を探ってみる必要がある筈である。そこで最後の章では、その一つの試みとして、 $\mathcal{H}$ 作用素族を single valued extension property の方向から眺めてみたい。

§ 6. Single valued extension property ((Svep)) ここ数年来、hyponormal 作用素族周辺の研究はめざましく、その成果の一つが § 3 でも触れた通り hyponormal 作用素の構造の完全決定である。そして、hyponormal 作用素で成り立っている種々

の性質の成立範囲のを見をわめ、という線に沿いながら M -hyponormal や dominant といった新しい作用素族が導入されてきた。

$$T : M\text{-hyponormal} \iff M \|(T-\lambda)x\| \geq \|(T-\lambda)^*x\| \quad (M \text{ is scalar}) \\ \forall \lambda, \forall x$$

$$T : \text{dominant} \iff \forall \lambda \text{ に対して } \exists M_\lambda \text{ で } M_\lambda \|(T-\lambda)x\| \geq \|(T-\lambda)^*x\| \quad \forall x$$

また、 M -hyponormal の定義で λ を real scalar に弱めたものを、humble M -hyponormal と呼ぶことにする。このような研究で重要になってくるのが Svep (Single valued extension property) の概念である。詳細は [6], [17] など参照して頂きたい。

$$T \in (\text{Svep}) \iff \forall \Omega : \text{複素平面内の開集合に対し、}\Omega\text{上の正則} \\ \text{な vector 値関数 } f \text{ が } (T-\lambda)f(\lambda) \equiv 0 \text{ を満た} \\ \text{せば } f \equiv 0 \text{ となる}$$

Svep は基本的な概念であり、今回の研究集会でも幾つもの話題の中に出現している。そうした事情については、それぞれの方の論説を参照して頂きたい。ここでは蛇足ながら、今回の研究集会では触れられなかった方向の一つとして [7] だけを挙げて置く。さて、ここでの文脈では、Svep の重要性は dominant 作用素が (従って hyponormal 作用素が) Svep を持つことにある。もし T が Svep を持てば、 T の local spectrum $\sigma_f(T)$ (f は vector) を local resolvent $f_T(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}f$ を最大元解析接続したその domain の補集合として

定めることが出来る。この概念にも様々な応用があるがここではこれを用いて次の (G_1) の local version を定義する。

$T \in (l.G_1)$ (local growth condition) $\iff \|f_T(\lambda)\| \leq \frac{\|f\|}{\text{dist}(\lambda, \sigma_T(f))} \quad \forall \lambda \notin \sigma_T(f) \quad \forall f$

$(l.G_1)$ が重要であるというのは次の定理が知られているからである。

定理 25. $T \in (l.G_1)$ であれば $\forall \delta$: 複素平面内の閉集合に対し、

$$(\#) \quad \bigcup_{\lambda \notin \delta} \text{Ran}(T - \lambda) = \{f : \sigma_T(f) \subset \delta\}$$

(#) はそれ自体としても興味深い式であるが、不変部分空間問題との関連もある。しかしながら M -hyponormal が、果たして $(l.G_1)$ であり (#) を満たしているかについては現在不明のようである。dominant については残念ながら或る種の quasinilpotent 作用素が dominant になっていて、 (G_1) にせえならず (#) も満たしてくれない。このような文脈に ④ 作用素をうまく載せてみたいというのが目標なのであるが余り進展していない。ただ、どうもはっきり断言はできないのであるが、こうした文脈で dominant についての研究は相当の水準で行なわれていながら、その具体的で自然な実例となるともとの hyponormal 作用素の他にはかなり乏しいのではないかと感じられる。もしそうであるとすれば次の結果は幾分か ④ 作用素についての興味を増すかもしれない。これが一番最後の定理であり、予告の通り明らか

に命題1 導く。これは[12]にあるものである。

定理26. $T \in \mathcal{H}$ は dominant である 従って S_{vep} を持ち $\sigma_f(T)$ が定められる

略証.
$$M_\lambda = \begin{cases} 3 & (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \frac{2\|T^* - \lambda\|}{|\lambda - \lambda^*|} & (\lambda \neq \lambda^*) \end{cases}$$

と置く。 $T \in \mathcal{H}$ が humble 3-hyponormal であることは[8][3]に見られる通り簡単な計算から出せる。そこで λ : real scalar の場合が判ったから、以下 $\lambda \neq \lambda^*$ と仮定する。そして定理11での normal N を取ってくる

$$\begin{aligned} M_\lambda \|(T - \lambda)x\| &\geq \frac{2}{|\lambda - \lambda^*|} \|B_N(\lambda)x\| + \|(T - \lambda)x\| \\ &= \frac{1}{|\lambda - \lambda^*|} (\|B_N(\lambda)x\| + \|B_{N^*}(\lambda)x\|) + \|(T - \lambda)x\| \\ &\geq \frac{1}{|\lambda - \lambda^*|} \|(\lambda - \lambda^*) \operatorname{Re}(N - \lambda)x\| + \|(T - \lambda)x\| \\ &\geq \|\operatorname{Re}(T - \lambda)\| + \|(T - \lambda)\| \geq \|(T - \lambda)^*x\| \end{aligned}$$

となり示せた。

しかしながら目下の処、 $\mathcal{H}$ 作用素が M -hyponormal であるかどうか判らないし、 (l, G_1) や $(\#)$ についての調査も進んでいない。

この方向に限らず $\mathcal{H}$ 作用素族については、だんだんと判らないことが増えていくようで、更に新しい breakthrough の起きるのを待っている状態である。

主要参考文献表(本文に引用した文献に限定)

1. S.L.Campbell, Pacific J. Math., 61(1975), 53-57.
2. ----, Pacific J. Math., 60(1975), 37-50.
3. ----, Linear operators for which T^*T and $T + T^*$ commute, III. (preprintのものしか入手していない)
4. S.L.Campbell and R.Gellar, Trans. Amer. Math. Soc., 226 (1977), 305-319.
5. ---- and ----, Proc. Amer. Math. Soc., 60(1976), 53-58.
6. K.Clancey, Springer Lecture Notes in Math., 742(1979).
7. M.J.Conway and R.G.Douglas, Acta Math., 141(1978), 187-261.
8. C.-K.Fong and V.I.Istrăţescu, Proc. Amer. Math. Soc., 76(1979), 107-112.
9. C.-K.Fong and S.-K.Tsui, A note on positive operator, preprint.
10. T.Furuta, 数学, 25(1973), 20-37.
11. Y.Kato, Math. Japon., 23(1978), 123-126.
12. ----, Operators in $\mathcal{H}$ are dominant, preprint.
13. Y.Kato and N.Moriya, Math. Japon., 22(1978), 233-238.
14. F.Kubo, Math. Japon., 21(1976), 23-35.
15. R.Nakamoto, Math. Japon., 22(1977), 379-382.
16. T.Saito, Springer Lecture Notes in Math., 247(1972).
17. ----, 数理解析研究所講究録, 377(1980), 23-49.