

Colombeau型超函数の中での微分方程式の 可解性と非可解性

東大数理 富川 尚亮 (Takamitsu Tomikawa)

1. Colombeau型の超函数

1-1. Colombeauによる定義

定義1. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の部分集合列 $\mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n)$ ($g=0,1,2,\dots$) を、次のように定義する。

$$\mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x) dx = \delta_{0,|\alpha|}, 0 \leq |\alpha| \leq g \right\}$$

ここにおいて、 δ はクロネッカーのデルタである。

定義2. $\phi(x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、 $\phi_\varepsilon(x)$ ($\varepsilon \in (0,1]$) を次のように定義する。

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ここで、任意の $\varepsilon \in (0,1]$ に対して、 $\phi(x) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n)$ ならば、 $\phi_\varepsilon(x) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ。

定義3. Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。次のような写像を考える。

$$R: \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\phi, x) \longmapsto R(\phi, x)$$

ただし、 $\phi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ を固定すると $R(\phi, x) \in C^\infty(\Omega)$

このとき、次の条件を満たす写像を moderate な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists N_{K,\alpha} \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \phi(x) \in \mathcal{A}_{N_{K,\alpha}}(\mathbb{R}^n), \exists C_{K,\alpha,\phi} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi} \varepsilon^{-N_{K,\alpha}}$$

一方、次の条件を満たす写像を null な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists N_{K,\alpha} \in \mathbb{N}, \exists \{a_g(K, \alpha)\}_{g=0}^{+\infty} \text{ ただし } N \ni a_g \nearrow +\infty$$

$$\text{s.t. } \forall g \geq N_{K,\alpha}, \forall \phi(x) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n), \exists C_{K,\alpha,\phi} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi} \varepsilon^{a_g(K,\alpha) - N_{K,\alpha}}$$

定義 4. Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。このとき、新しい超関数の空間を次のように定義する。

$$\mathcal{Y}(\Omega) = \{ \text{moderate な写像} \} / \{ \text{null な写像} \}$$

ここで、 $\mathbb{R}^n$ 上の distribution は、次のように埋め込まれる。

$$Cd: \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto [(Cd f)(\phi, x)] \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$$

ただし、

$$(Cd f)(\phi, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) \phi(y) dy$$

定義5. $[R(\phi, x)]$ が $\mathcal{U}^\infty(\Omega)$ の元であるとは、 $R(\phi, x)$ が次の条件を満たすことである。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \exists N_K \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists M_{K, \alpha} \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{s.t. } \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_{M_{K, \alpha}}(\mathbb{R}^n), \exists C_{K, \alpha, \phi} > 0, \exists \varepsilon_{K, \alpha, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \alpha, \phi} \Rightarrow \sup\{|\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon, x)|; x \in K\} \leq C_{K, \alpha, \phi} \varepsilon^{-N_K}$$

定義6. $f = [R(\phi, x)] \in \mathcal{U}(\Omega)$ に対して、 $f \approx 0$ であることを、次のように定義する。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\phi_\varepsilon, x) = 0 \quad (\mathcal{D}'(\Omega) \text{ の意味で})$$

つまり、任意に固定した $\psi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ に対して、次が成り立つことである。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} R(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = 0$$

1-2. 片岡による定義

定義7. 急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の部分集合 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \hat{\phi}(\xi) = 1 + O(|\xi|^{-\infty}), \xi \rightarrow 0 \right\}$$

ここにおいて、 $\hat{\phi}(\xi)$ は $\phi(x)$ の Fourier 変換である。

ここで、 $\left\{ \phi_\varepsilon(x) (= \frac{1}{\varepsilon^n} \phi(\frac{x}{\varepsilon})) ; \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0 \right\}$ は、 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ に含まれる。

定義8. Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。次のような写像を考える。

$$R: \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\phi, x) \longmapsto R(\phi, x)$$

ただし、 $\phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ を固定するごとに $R(\phi, x) \in C^\infty(\Omega)$

このとき、次の条件を満たす写像を moderate な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists N_{K,\alpha} \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \exists C_{K,\alpha,\phi} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi} \varepsilon^{-N_{K,\alpha}}$$

一方、次の条件を満たす写像を null な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \forall \ell \in \mathbb{N}$$

$$\exists C_{K,\alpha,\phi,\ell} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi,\ell} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi,\ell} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi,\ell} \varepsilon^\ell$$

定義9. Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。このとき、新しい超函数の空間を次のように定義する。

$$\mathcal{Y}_*(\Omega) = \{ \text{moderate な写像} \} / \{ \text{null な写像} \}$$

ここで、

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto [(Cd f)(\phi, x)] \in \mathcal{Y}_*(\mathbb{R}^n)$$

は well-defined であり、"Cd" は局所性をもつので埋め込み

$$Cd: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{Y}_*$$

が得られる。

定義10. $[R(\phi, x)]$ が $\mathcal{G}_*(\Omega)$ の元であるとは、 $R(\phi, x)$ が次の条件を満たすことである。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \exists N_K \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \exists C_{K, \alpha, \phi} > 0, \exists \varepsilon_{K, \alpha, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \alpha, \phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K, \alpha, \phi} \varepsilon^{N_K}$$

定義11. $f = [R(\phi, x)] \in \mathcal{G}_*(\Omega)$ に対して、 $f \stackrel{\theta}{\approx} 0$ であることを、次のように定義する。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \exists C_{K, \phi} > 0, \exists \theta_{K, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } \forall \psi(x) \in C_0^\infty(K), 0 < \varepsilon < \theta_{K, \phi}$$

$$\Rightarrow \left| \int_K R(\phi, x) \psi(x) dx \right| \leq C_{K, \phi} \varepsilon^{\theta_{K, \phi}} \cdot \sup \{ |\partial_x^\alpha \psi(x)|; x \in K, |\alpha| \leq C_{K, \phi} \}$$

※ Ω が相対コンパクトな開集合の場合、 $(Cd u)(\phi, x) \in \mathcal{G}(\Omega)$ ($u \in \mathcal{D}'(\Omega)$)

は次のように定義する。 $\phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$d(\phi) := \sup \{ |x|; \phi(x) \neq 0 \}, \quad \overline{\Omega}_a := \{ x \in \Omega; \text{dist}(x, \Omega^c) \geq a \}$$

とし、次の性質をもつ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の元 K_ϕ を考える。

$$K_\phi(x) = 1 \quad (x \in \overline{\Omega}_{2d(\phi)}), \quad \text{supp } K_\phi \subset \overline{\Omega}_{d(\phi)}, \quad 0 \leq |K_\phi(x)| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

ここで、次のようにおく。

$$(Cd u)(\phi, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (K_\phi f)(t+x) \phi(t) dt$$

2. あるクラスの微分方程式の一般解について

補題1. Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。 $C(\Omega)$ - 函数列 $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Ω 上 $f(x) \in C(\Omega)$ に一様収束するとする。

このとき、任意の $\phi \in \mathcal{A}_0$ を固定して、 $x \in \Omega$ と $\varepsilon \in (0, 1]$ を変数と考えるとき、固定した ϕ と Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して正の定数 $\varepsilon_{K, \phi}$ が定まり、 $(Cd f_n)(\phi, x)$ は $(Cd f)(\phi, x)$ に $(0, \varepsilon_{K, \phi}) \times K \subset (0, 1] \times \Omega$ 上一様収束する。
証明. $\phi \in \mathcal{A}_0$ に対して、 $\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\varepsilon(t)| dt = \int_{\text{supp } \phi} |\phi(t)| dt$ が成り立つので、左辺は $\varepsilon \in (0, 1]$ によらず ϕ によって定まる定数 $M_\phi (< +\infty)$ になる。 Ω に含まれるコンパクト集合 K と $\phi \in \mathcal{A}_0$ に対して

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi} \Rightarrow K + \text{supp } \phi_\varepsilon \subset \Omega$$

を満たすように正の定数 $\varepsilon_{K, \phi}$ をとれる。このとき、

$0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi}, x \in K, t \in \text{supp } \phi_\varepsilon \Rightarrow |(K\phi_\varepsilon f_n)(t+x) - (K\phi_\varepsilon f)(t+x)| \leq \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)}$ が成り立つ。よって、 $0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi}, x \in K$ ならば、

$$\begin{aligned} & |(Cd f_n)(\phi, x) - (Cd f)(\phi, x)| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |(K\phi_\varepsilon f_n)(t+x) - (K\phi_\varepsilon f)(t+x)| |\phi_\varepsilon(t)| dt \leq M_\phi \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

が成り立つことから $(0, \varepsilon_{K, \phi}) \times K$ 上一様収束することがわかる。

補題2. Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。 Ω 上の $\mathcal{A}(\Omega)$ - 函数列 $\{\psi_n(\phi, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は、任意に固定した $\phi \in \mathcal{A}_0$ と、 Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して正の定数 $\varepsilon_{K, \phi}$ が定まり、 $(0, \varepsilon_{K, \phi}) \times K$ 上 0 に

一様収束するとする。

このとき、 $v(\phi, x) \in \mathcal{U}(\Omega)$ が、 $\mathbb{R}_+$ で定義され自然数値をとり広義単調増加で無限大に発散する函数 $n(y) \in \mathbb{N} (y > 0)$ と上記の $\{v_n(\phi, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を用いて

$$v(\phi, x) = v_{n(\|\phi\|)}(\phi, x) \quad (\|\cdot\| \text{ は } L^\infty\text{-ノルム, 以下同様})$$

と書き表せるならば、 $v(\phi, x) \approx 0$ が成り立つ。

証明、任意の $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して、 $K_\psi = \text{supp } \psi$ とおくと、

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx \right| &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\psi} v(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx \right| = \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\psi} v_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx \right| \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}\|_{K_\psi} \int_{K_\psi} |\psi(x)| dx = 0 \end{aligned}$$

補題3、 Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。 $C(\Omega)$ -函数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、次の条件(★)を満たし、 $\mathbb{R}_+$ で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する函数 $n(y) \in \mathbb{N} (y > 0)$ が存在するとする。

$$(\star) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists m_\alpha \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathcal{A}_0, \exists C_{\alpha, \phi} > 0, \exists \varepsilon_{\alpha, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{\alpha, \phi} \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} |\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(x)| \leq C_{\alpha, \phi} (\|\phi_\varepsilon\|)^{m_\alpha}$$

このとき、 $F(\phi, x) := (C_\alpha f_{n(\|\phi\|)})(\phi, x)$ は $\mathcal{U}(\Omega)$ の元になる。

証明、任意に固定した $\phi \in \mathcal{A}_0$ と $K \subset \subset \Omega$ に対して

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi} \Rightarrow K + \text{supp } \phi_\varepsilon \subset \Omega$$

を満たすように $\varepsilon_{K, \phi}$ をとり、任意に固定した $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ に対して、

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_{\alpha, \phi} \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} |\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(x)| \leq C_{\alpha, \phi} (\|\phi_\varepsilon\|)^{m_\alpha}$$

を満たすように $C_{\alpha, \phi}, \varepsilon_{\alpha, \phi}$ をとることができる。ここにおいて、

$\varepsilon_{K,\alpha,\phi} := \min\{\varepsilon_{K,\phi}, \varepsilon_{\alpha,\phi}\}$, $C_{K,\alpha,\phi} := C_{\alpha,\phi} \|\phi\|^{m_\alpha} M_\phi$ とおけば,

$$|\partial^{(\alpha)} F(\phi_2, x)| \leq \|\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_2\|)}\|_{L^\infty(\Omega)} \times \int_{\text{supp } \phi_2} |\phi_2(t)| dt \leq C_{\alpha,\phi} (\|\phi_2\|)^{m_\alpha} M_\phi$$

($0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi}$, $\forall x \in K$)

が成り立つ。 M_ϕ は補題 1 の証明中に出てくるものである。

定理、 Ω は $\mathbb{R}^l$ の相対コンパクトな開集合、 Ω_1 は $\mathbb{R}^{m-l}$ ($l \leq m$) の相対コンパクトな開集合とする。次の型の微分方程式

$$(\star\star) \quad Lu(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_l)$$

ただし、 $F(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}) = Lu(x_1, x_2, \dots, x_l)$ と考

え、 $F(y_0, y_1, \dots, y_k)$ は緩増加函数であるとする。

を考える。任意の l 変数多項式 $P(x_1, x_2, \dots, x_l)$ に対して、

$$Lv(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, x_2, \dots, x_l)$$

が $C^\infty(\Omega \times \Omega_1)$ 解 $v(x_1, x_2, \dots, x_m)$ をもつとき、任意の $f \in C(\Omega)$ に対して $(\star\star)$ は $\mathcal{G}^\infty(\Omega \times \Omega_1) / \sim$ 解をもつ。

証明、補題 1, 補題 2 により、次の 2 つの条件を満たす $C^\infty(\Omega \times \Omega_1)$ 函数列 $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を構成すれば充分である。

- (i) $Lf_n(x) - f(x)$ が $\Omega \times \Omega_1$ 上 0 に一様収束する。
- (ii) $\mathbb{R}_+$ で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する適当な函数 $N(y) \in \mathbb{N}$ ($y > 0$) を用いて

$$F(\phi, x) = (Cd f_{n(\|\phi\|)}) (\phi, x)$$

と定めると、 $F(\phi, x)$ は $\mathcal{G}^\infty(\Omega)$ の元になる。

補題 3 により、条件 (ii) は次の条件 (ii)' を示せば充分である。

(ii)' 補題 3 の条件 (☆) を満たす、 $\mathbb{R}_+$ で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する函数 $N(y)$ ($y > 0$) が存在する。

Ω はコンパクト集合なので、Weierstrass の多項式近似定理によって、 $f \in C(\Omega)$ に対して Ω 上一様収束する多項式列 $\{P_n(x_1, x_2, \dots, x_d)\}_{n \in \mathbb{N}}$ をとることができる。この多項式列に対し、

$$L U_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

を満たす $C^\infty(\Omega \times \Omega_1)$ -函数列 $\{U_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\}_{n \in \mathbb{N}}$ をとれる。ここで、

$$N(y) := \max \left\{ \left\{ m \in \mathbb{N} : \sup_{x \in \Omega \times \Omega_1} \left| \partial_j^{(\alpha)} U_j(x) \right| : |\alpha| \leq m, 1 \leq j \leq m \right\} \leq y \right\}, 1 \right\}$$

とおけば、 $N(y)$ は $\{U_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して (ii)' を満たす。

3. Lewy-溝畑の方程式の $\mathcal{G}_*$ / 総解 について

定理、 $f(x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus C^\omega(\mathbb{R})$ で、周期 2π の周期函数、また、 $g(\phi, x_2) \in \mathcal{G}_*(\mathbb{R})$ は $g(\phi, x_2) \stackrel{0}{\sim} 0$ で、 ϕ を固定すると x_2 について周期 2π の周期函数になるとする。このとき、

(1) $(\partial_1 + i x_1 \partial_2) u(\phi, (x_1, x_2)) \stackrel{\text{in } \mathcal{G}_*}{=} (Cdf)(\phi, x_2) + g(\phi, x_2)$ を満たすような $u(\phi, (x_1, x_2)) \in \mathcal{G}_*(\mathbb{R})$ は存在しない。

証明、以下、等号は $\mathcal{G}_*$ での意味のものとする。ただし、絶対値に関する等号、不等号は通常の意味のものとする。

条件を満たす $u(\phi, (x_1, x_2)) \in \mathcal{G}_*(\mathbb{R})$ が存在すると仮定して矛盾

を導く。 u は ϕ, x_1 を固定するごとに x_2 についての周期 2π の周期函数と考えよう。 u, f, g の x_2 についての複素 Fourier 級数展開を考え、式(1)は各 Fourier 係数 $u_p(\phi, x_1), f_p, g_p(\phi)$ についての常微分方程式と考えることができる。

$$(\partial_1 - px_1)u_p(\phi, x_1) = f_p + g_p(\phi)$$

解は、 $u_p(\phi, x_1) = u_p(\phi, 0) + e^{\frac{1}{2}px_1^2} \int_0^{x_1} (f_p + g_p(\phi)) e^{-\frac{1}{2}ps^2} ds$ となる。

ある $x_1 = 2\delta > 0$ に対して成り立つので代入し、変形すると、

$$(2) \quad f_p \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2}p(4\delta^2 - s^2)} ds = u_p(\phi, 2\delta) - u_p(\phi, 0) - g_p(\phi) \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2}p(4\delta^2 - s^2)} ds$$

$$(3) \quad |\delta e^{p\delta^2}| \leq \left| \int_0^\delta e^{\frac{1}{2}p(4\delta^2 - s^2)} ds \right| \leq \left| \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2}p(4\delta^2 - s^2)} ds \right|$$

$K = [0, 2\pi]$ と $\phi(x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ に対しては

$$\exists C_{K,\phi}, \exists \theta_{K,\phi}, \exists l_{K,\phi} \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (4) \quad |g_p| = \left| \int_0^{2\pi} g(\phi, x_2) e^{-ipx_2} dx_2 \right| \leq C_{K,\phi} e^{\theta_{K,\phi}} (|p|+1)^{l_{K,\phi}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \theta_{K,\phi}$$

$K' = [0, 2\delta] \times [0, 2\pi]$ と $\phi(x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^2)$ に対しては

$$\exists C_{K',\phi}, \exists \varepsilon_{K',\phi}, \exists m_{K'} \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \sup_{(x_1, x_2) \in K'} |u(\phi, (x_1, x_2))| \leq C_{K',\phi} e^{-m_{K'}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_{K',\phi}$$

$$\text{よって、} (5) \quad \sup_{x_1 \in [0, 2\delta]} |u_p(\phi, x_1)| = \sup_{x_1 \in [0, 2\delta]} \left| \int_0^{2\pi} u(\phi, (x_1, x_2)) e^{-ipx_2} dx_2 \right| \leq 2\pi C_{K',\phi} e^{-m_{K'}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_{K',\phi}$$

ここで、式(3), (4), (5) を用いて $|f_p|$ を評価すると、

$$|f_p| \leq \frac{1}{\delta e^{p\delta^2}} 4\pi C_{K',\phi} \frac{1}{\varepsilon^{m_{K'}}} + C_{K,\phi} e^{\theta_{K,\phi}} (|p|+1)^{l_{K,\phi}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \min\{\theta_{K,\phi}, \varepsilon_{K',\phi}\}$$

また、 ε を p の狭義単調減少函数 $\varepsilon(p) = \exp(-\frac{p\delta^2 \theta_{K,\phi}}{2m_{K'}})$ と

思えば、

$$|f_p| \leq \left(\frac{4\pi C_{K',\phi}}{\delta} + C_{K,\phi} (|p|+1)^{l_{K,\phi}} \right) \exp\left(-\frac{p\delta^2 \theta_{K,\phi}}{2m_{K'}}\right)$$

となり、 f の Fourier 係数 f_p が p に関して指数的に減少するので $f(x_2) \in C^\omega(\mathbb{R})$ が導かれる。これは矛盾である。