

磁場をもつ Schrödinger 作用素の 固有値の漸近分布について

京都大理 岩塚 明 (Akira Iwatsuka)

大阪大理 白井 慎一 (Shin-ichi Shirai)

以下では次のような形の Schrödinger 作用素のスペクトル
ギャップにおける固有値の漸近分布について考える。

$$H_V = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} - b(x)\right)^2 + V(x, y) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2).$$

ここで、 $b(x)$ はベクトル・ポテンシャル、 $V(x, y)$ は遠方で
減衰するスカラー・ポテンシャルであるが、それらについて
の仮定を述べていくことにする。

1. $V(x, y)$ についての仮定

(V.1): $V(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, 実数値 であり次の評価をみ
たす:

$$\exists m > 0 \quad \text{s.t.} \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta V(x, y) \right| \leq C_{\alpha\beta} \langle x, y \rangle^{-m-\alpha-\beta} \quad (\forall \alpha, \beta)$$

ここで $\langle x, y \rangle = (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ である。

次に、 $\mu > 0$, $a_0 > 0$ に対して

$$\nu_{\pm}(\mu; a_0) = \frac{1}{2\pi} \text{vol} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x > a_0 > 0, \pm V(x, y) > \mu \}$$

と定義する。 $\nu_{\pm}(\mu) \equiv \nu_{\pm}(\mu; a_0)$ について次の仮定をおく:

(V.2): $\exists a_0 > 0$, $\exists \gamma_1, \exists \gamma_2, \exists \gamma_3 > 0$, $\exists \mu_0 > 0$ st.

$\nu_{\pm}(\mu; a_0)$ は $(0, \mu_0)$ で微分可能であり、

$$\gamma_1 \nu_{\pm}(\mu; a_0) \leq -\mu \nu'_{\pm}(\mu; a_0) \leq \gamma_2 \nu_{\pm}(\mu; a_0)$$

$$\nu_{\pm}(\mu; a_0) \geq \gamma_3 \mu^{-\frac{2}{m}}$$

をみたす。ただし $\nu'_{\pm}$ は μ についての微分を表す。

注意 (V.2) をみたす $a_0 > 0$ のとり方は後述の漸近分布には関係しないことがわかる。

2. 磁場についての仮定

H_V における $b(x)$ を定義するために、以下のような磁場 $B(x)$ を考える。

(B.1): $B(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 実数値であり、単調増加かつ

$$\exists B_{\pm} > 0 \text{ st. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} B(x) = B_{\pm} < \infty$$

ここで

$$b(x) = \int_0^x B(t) dt$$

と定義する。

すると、以上の仮定の下で、作用素 H_V は $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ (C^∞ -関数であり台 (support) がコンパクトなもの全体) を定義域として本質的自己共役であることが知られている。([L-S])

3. $V \equiv 0$ の場合

H_V において $V \equiv 0$ の場合、つまり、 H_0 については次のようなことが知られている。([Iwa])

H_0 のスペクトル集合 ($\sigma(H_0)$ とかく) は絶対連続であり、バンド構造を持つ：

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\Lambda_n^-, \Lambda_n^+]$$

$$\text{ただし } \Lambda_n^\pm = (2n-1)B_\pm$$

また、 H_0 は次のような直積分 (direct integral) 分解をもつ作用素 L とユニタリ同値であることがわかる。

$$L = \int_{\mathbb{R}_3}^{\oplus} L(\xi) d\xi \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_3)$$

$$\text{ただし } L(\xi) = -\frac{d^2}{dx^2} + (b(x) - \xi)^2 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_x)$$

この $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の 2 階常微分作用素 $L(\xi)$ については、さらに詳しく次のことが示される。([Iwa])

補題 (B.1) の仮定の下で、 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $L(\xi)$ の固有関数の完全系 $\{\varphi_n(x, \xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ と対応する固有値 $\{\lambda_n(\xi)\}$ が存在して次をみたす。

(i) $0 < \lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \dots \rightarrow \infty$

(ii) 各 $\lambda_n(\xi)$ は ξ に関して解析的であり、単調増加関数。
また、 $\lambda_n(\xi)$ は固有値として非退化 (non-degenerate)。

(iii) $\varphi_n(\cdot, \xi) \in \text{Dom}(L(0))$ ($\forall \xi$)，かつ $\varphi_n(\cdot, \xi)$ は ξ に関してグラフノルム $\|u\| := (\|u\|_{L^2}^2 + \|L(0)u\|_{L^2}^2)^{1/2}$ で考えれば解析的。

(iv) $\varphi_n(x, \xi) \in C^0(\mathbb{R}^2)$ ($\mathbb{R}^2$ 上の連続関数)，実数値
かつ、各 ξ に対し $\varphi_n(\cdot, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ，各 x に対して $\varphi_n(x, \cdot)$ は解析的。

注 実は $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \lambda_n(\xi) = \frac{1}{4n^2}$ であり、 $\lambda_n(\xi)$ がバンド関数になっており、この点で H_0 は周期的ポテンシャルをもち Schrödinger 作用素と似た構造を持っている。

さて、この $\lambda_n(\xi)$ に対して次の仮定を置く。

$$(A.1): \exists C > 0 \text{ s.t. } |\lambda_j(z) - \lambda_k(z)| \geq C \quad \forall z, j, k (j \neq k)$$

上の (A.1) をみたすような磁場 $B(x)$ が存在するか否かは自明ではないが、その十分条件として

補題 (B.1) に加えて、 $B(x)$ に次の仮定を置けば (A.1) は満たされる:

$$B_+ < 3B_-$$

$$\|B'\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |B'(x)| < B_+ - B_-$$

$$(B_+ - B_-) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3B_- - B_+}} \right) < \frac{B_+ + B_-}{6}$$

この条件は、ある意味で $B(x)$ が定数磁場 (すなわち $B(x) \equiv \text{定数}$) に近いことを保証するものである。 H_V において磁場が定数の場合には、[Rai1] の中において、本質的に我々の結果と一致する結果が得られている。 ([Rai1], Theorem 2.6)

4. 結果

さて、定理を述べるために $B(x)$ に関する仮定をもう一つ用意する。

(B.2)_±: (B.1) に加えて

$$B(x) \in \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \|\partial_x^\alpha B\|_\infty < \infty \quad (\forall \alpha) \}$$

$\exists M > m$ s.t. 各 α に対して $\exists C_{\alpha M} > 0$

$$|\partial_x^\alpha (B_\pm - B(x))| \leq C_{\alpha M} \langle x \rangle^{-M} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty.$$

ここで $m > 0$ は (V.1) の中のものであり、この条件は $B(x)$ の $x \rightarrow \pm\infty$ での $B_\pm$ への近づき方を規定するものである。

記号 一般に自己共役作用素 A が、開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ に離散スペクトル (重複度有限の孤立固有値) のみ持つとき、その (重複度も込めた) 個数を $N((a, b) | A)$ で表す。

定理1 (V.1), (V.2)₊ (resp. (V.2)₋), (B.2)₊ (resp. (B.2)₋) (A.1) を仮定する。さらに、 $\Lambda_n^+ < \Lambda_{n+1}^-$ (resp. $\Lambda_{n-1}^+ < \Lambda_n^-$) となる n について次が成立:

$$N((\Lambda_n^+ + \mu, M_n) | H_V) = B_+ \cdot \nu_+(\mu) (1 + o(1)) \quad \text{as } \mu \downarrow 0$$

(resp.

$$N((M_{n+1}, \Lambda_n^- - \mu) | H_V) = B_- \cdot \nu_-(\mu) (1 + o(1)) \quad \text{as } \mu \downarrow 0)$$

ただし、 $M_n = \frac{\Lambda_n^+ + \Lambda_{n+1}^-}{2} \quad (n \geq 1)$, $M_0 = -\infty$ である。

定理の証明の方針

まず, [Rai1], Theorem 2.6 と同様な方法によって,

$$N((\Lambda_n^+ + \mu, M_n) | H_V) = N((\mu, \infty) | a_n(x, D_x)) + o(\mu^{-\frac{2}{m}})$$

となることと示される。ただし、ここで $a(x, D_x)$ は次で

定義される $L^2(\mathbb{R})$ 上の擬微分作用素である:

$$\begin{cases} a(x, D_x)u(x) = \iint_{\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\eta} e^{i(x-y)\eta} a\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y) dy d\eta \end{cases}$$

$$\left(u \in L^2(\mathbb{R}) \right)$$

$$\begin{cases} a(x, \eta) = \lambda_n(x) - \Lambda_n^+ + V(b^1(x), -\eta) \end{cases}$$

後は適当な phase space $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\eta$ の分割により、コンパクト

自己共役作用素の固有値の漸近分布についての結果

([D-R])を用いることにより証明される。

$N((M_n, \Lambda_n^- - \mu) | H_V)$ についても同様である。

補足 (K1)における $m > 0$ が常に $0 < m < 1$ のときにはより弱い条件で同じ漸近分布が示される。正確には次のとおりである。

(V.1)': $V(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$, 実数値とある。さらに

$$0 < \exists m < 1, \quad \exists m' > 2m, \quad \exists C > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$|V(x,y)| \leq C \langle x,y \rangle^{-m}$$

$$|\partial_x V(x,y)| + |\partial_y V(x,y)| \leq C \langle x,y \rangle^{-m'}$$

(B.2)'_±: (B.1) に加えて、 $\exists M > m, \quad \exists M' > 3M, \quad \exists C > 0$ s.t.

$$|B(x) - B_{\pm}| \leq C \langle x \rangle^{-M} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty$$

$$|\partial_x B(x)| \leq C \langle x \rangle^{-M'} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty$$

定理2 (V.1)', (V.2)₊ (resp. (V.2)₋), (B.2)₊' (resp. (B.2)₋)

(A.1) を仮定する。このとき定理1と同じ漸近分布を得る。

定理2は[Col]の結果を用いて、min-max principle を使うことで示される。

References

[Col] Colin de Verdière, Yves., L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques, Commun. Math. Phys. 105 327-335 (1986)

[D-R] Dauge, M. and Robert, D., Weyl's formula for a class of pseudodifferential operators with

negative order on $L^2(\mathbb{R}^n)$, Lecture Note in Math. 1256 91-122 (1987).

[Iwa] Iwatsuka, A., Examples of absolutely continuous Schrödinger operators in magnetic fields, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21 385-401 (1985).

[L-S] Leinfelder, H. and Simader, C.G., Schrödinger operators with singular magnetic potentials, Math. Z., 176 1-19 (1981).

[Rai1] Raikov, G.D., Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with homogeneous magnetic potential and decreasing electric potential I. Behaviour near the essential spectrum tips, Comm. in P.D.E., 15 (3) 407-434 (1990).

[Rai2] ———, Border-line eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with electromagnetic potential, Integral Eq. and Operator Theory, 14 875-888 (1991).

(文責 白井)