

画像分離と 2 次元ウェーブレット解析

大阪教育大学・数理情報* 守本 晃

Akira Morimoto

mathematics and informatics

Osaka Kyoiku University

e-mail: morimoto@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

概要

いくつかの元画像を回転・平行移動した重み付き重ね合わせを複数回観測する。観測画像から、混合モデルのパラメータを推定し、元画像に分離する逆問題を画像分離問題とよぶ。ここでは、回転・平行移動の入らない重ね合わせ問題の解法、元画像を平行移動した重ね合わせ問題の解法、回転・平行移動した重み付き重ね合わせ観測画像 2 個から、相対的なモデルパラメータを推定する方法を述べる。

1 はじめに

カクテルパーティ問題 [1, 2] は、いろいろな分野で研究されている。工学分野では、この問題はある混合モデルにしたがって混合された観測信号を元の信号に分離する逆問題であり、ブラインド信号源分離 (BSS: blind source separation) とよばれている。独立成分分析 (ICA: independent component analysis) [3, 4] は、ブラインド信号源分離問題を解くために開発された。

独立成分分析以外の方法でもブラインド信号源問題を解くことができる。Balan-Rosca [5] や Jourjine-Rickard-Yilmaz[6] は、窓フーリエ変換を用いた時間周波数解析に基づく解法を提案した。我々 [7, 8] はウェー

*〒 582-8582 大阪府柏原市旭ヶ丘 4-698-1

ブレット変換を用いた時間スケール解析による解法を提案した．さらに，我々 [9, 10, 11] は元信号の時間遅れの重ね合わせを混合信号とする時空間混合問題 (spatio-temporal problem) を取り扱った．

画像の重ね合わせを分離する画像分離問題 (BIS: blind source image separation) に対しても，独立成分分析は強力な道具である [3] が，独立成分分析以外の方法もいろいろ提案されている．たとえば，Abolghasemi-Ferdowsi-Sanei [12] は適応辞書学習に基づいた画像分離方法を提案している．Arai [13] は，いくつかの画像分離方法を比較している．我々 [14, 15, 16, 17, 18] は，連続マルチウェーブレット変換を提案し，それを画像分離問題に応用した．

我々は，文献 [19] で平行移動した元画像を重ね合わせた観測画像を分離する問題を考察した．さらに文献 [20, 21, 22] では，元画像を回転・平行移動した重み付き重ね合わせを考察した．

本講究録では，画像分離問題に対して，2次元ウェーブレット解析を利用した解法について得られた結果をまとめた．特に，最近の結果である元画像を回転・平行移動したモデルの相対重みを求める方法について述べる．

2 画像混合モデル

画像は，2乗可積分関数 $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ であると考える． $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の基本的なユニタリ作用素を定義しよう．平行移動作用 $\mathcal{T}_c$, $c \in \mathbb{R}^2$ を

$$(\mathcal{T}_c f)(x) = f(x - c)$$

で定義する．次に，回転作用素 $\mathcal{R}_\theta$, $\theta \in [0, 360)$ [degree] を

$$(\mathcal{R}_\theta f)(x) = f(P_{-\theta}x)$$

で定義する．ただしここで， $P_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の回転行列である．最後に，変調作用素 $\mathcal{M}_\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^2$ を

$$(\mathcal{M}_\omega f)(x) = e^{-i\omega \cdot x} f(x).$$

とする．このとき，次式が成立する．

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta \mathcal{T}_c f(x) &= \mathcal{R}_\theta f(x - c) = f(P_{-\theta}(x - c)) \\ &= f(P_{-\theta}x - P_{-\theta}c) = \mathcal{T}_{P_{-\theta}c} f(P_{-\theta}x) = \mathcal{T}_{P_{-\theta}c} \mathcal{R}_\theta f(x). \end{aligned}$$

次に, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ のフーリエ変換を

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$$

で定義する. このとき, $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ の逆フーリエ変換は,

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

となる. $\mathcal{T}_c f$ と $\mathcal{R}_\theta f$ のフーリエ変換は, それぞれ

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{T}_c f}(\xi) &= \int f(x - c) e^{-i\xi \cdot x} dx = e^{-ic \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) = \mathcal{M}_c \widehat{f}(\xi), \\ \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\xi) &= \int f(P_{-\theta} x) e^{-i\xi \cdot x} dx = \int f(y) e^{-iP_{\theta} y \cdot \xi} dy \\ &= \int f(y) e^{-iy \cdot P_{-\theta} \xi} dy = \widehat{f}(P_{-\theta} \xi) = \mathcal{R}_\theta \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

である.

定義 1 (画像混合モデル). 元画像を $s_n \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $n = 1, \dots, N$ とする. このとき, 観測画像 y_k は,

$$y_k = \sum_{n=1}^N a_{k,n} \mathcal{T}_{c_{k,n}} \mathcal{R}_{\theta_{k,n}} s_n, \quad k = 1, \dots, K \quad (1)$$

で与えられる. ただし, ここで, 定数 $a_{k,n} \in \mathbb{R}$ を混合係数, 定数 $c_{k,n} \in \mathbb{R}^2$ を平行移動パラメータ, 定数 $\theta_{k,n} \in [0, 360]$ [degree] を回転角度とよぶ.

混合画像の例を図 1 に描く. 画像混合モデル (1) をフーリエ変換すると,

$$\widehat{y}_k = \sum_{n=1}^N a_{k,n} \mathcal{M}_{c_{k,n}} \mathcal{R}_{\theta_{k,n}} \widehat{s}_n$$

である.

2.1 回転操作に対して強健な元画像

一般的に, グレースケール・デジタル画像は, 正方形格子点上に輝度の値をのせた行列で与えられる. 図 2 左に標準画像 peppers の濃淡図, 右に俯瞰図を描いた.

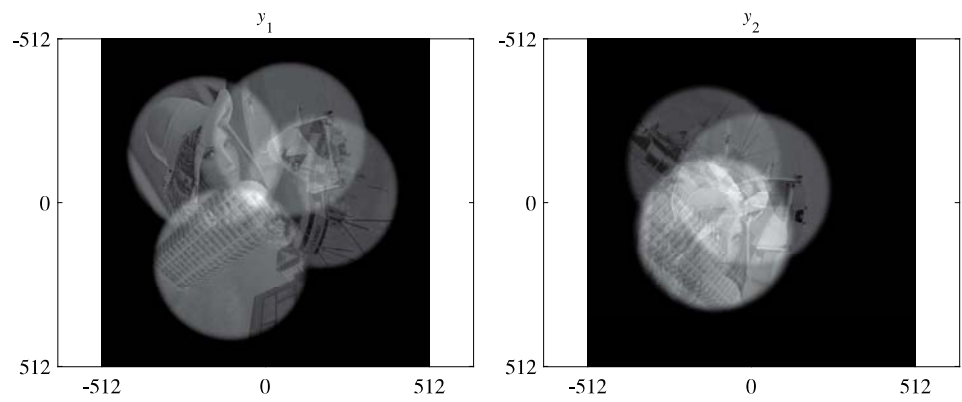


図 1: 観測画像の例 y_1 と y_2 .

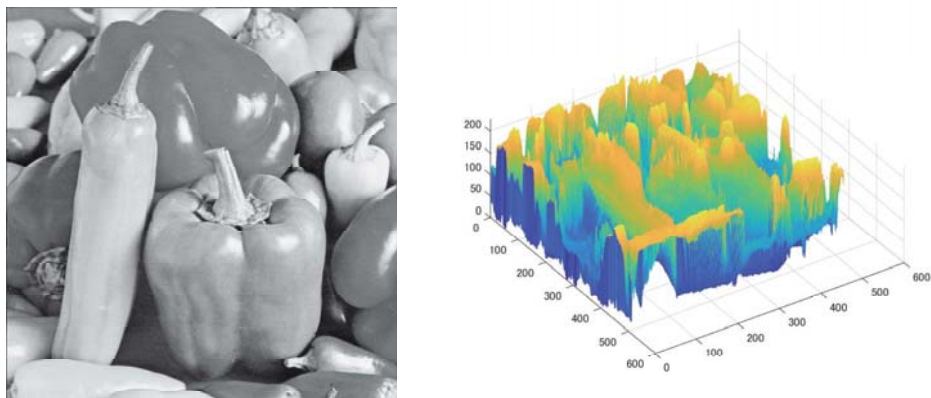


図 2: 左 : peppers 画像（濃淡図），右 : peppers 画像（俯瞰図）.

デジタル画像の回転を考えるとときには，回転中心を画像の中央の画素とするので，元画像は奇数サイズの正方画像であることが望ましい．回転操作により，画像サイズの正方形から外側にはみ出た画素は削除し，足りなくなった画素は値を 0 とするのが普通の回転方法である．図 3 の左上図が， 512×512 サイズの peppers 画像の下端と右端に 0 を埋め込み 513×513 サイズに拡張した図である．この図を 35 [degree] 回転すると右上図になる．画像の 513×513 サイズからはみ出た部分は削除し，足りなくなった部分は黒（画素値 0）で埋めてある．この操作により，peppers 画像が 8 角形に切り取られ，境界部分が回転によって人為的に生じる強いエッジとして現れる．右上図をさらに 45 [degree] 回転させると左下図

になる．左下図では 2 度の回転操作により 12 角形に切り取られている．一方，左上の元画像を一気に $35 + 45 = 80$ [degree] 回転させると右下図になる．下の左右の図は異なっているので，例えば，我々の画像混合モデル (1) で得られた観測画像 y_2 を回転させて，観測画像 y_1 と重ねようとしたときに，回転操作により人為的に生じたエッジが邪魔になる．

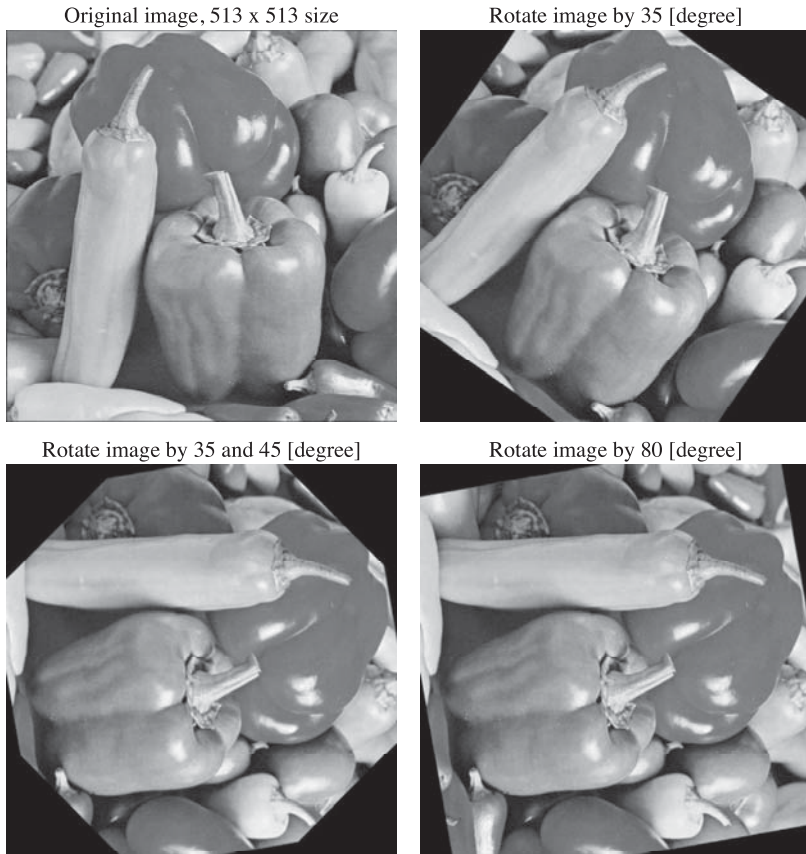


図 3: 左上 : 513×513 peppers 画像，右上 : 35 [degree] 回転．左下 : 右上図をさらに 45 [degree] 回転，右下 : 左上図を $35 + 45$ [degree] 回転．

そこで回転操作（実空間とフーリエ空間両方）に対して強健な元画像を図 4 のように次の手順で作成する．

1. 左上図：標準画像に対してゼロ埋めで奇数サイズの画像を作成する．
2. 右上図：フーリエ変換する．
3. 左中図：滑らかなで同心円状のローパス・マスクを作成する．

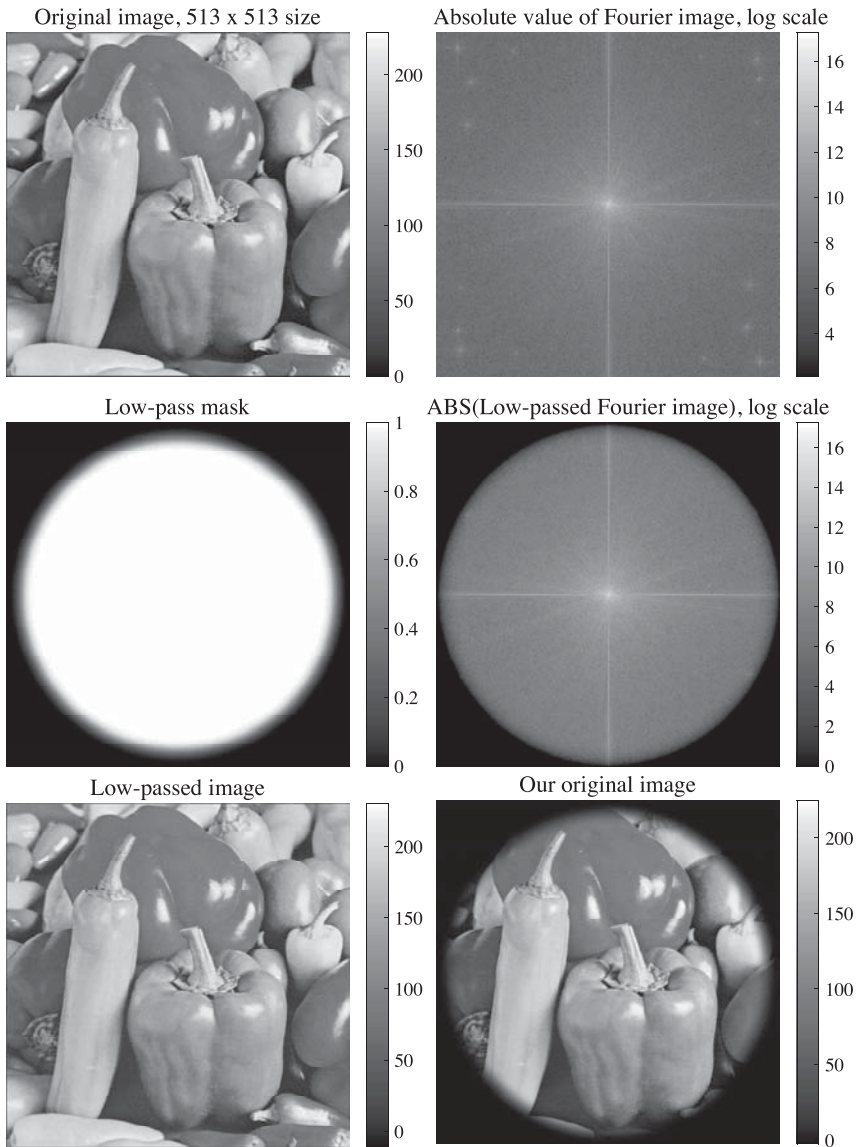


図 4: 左上 : 513 × 513 peppers 画像, 右上 : フーリエ画像 (絶対値のログスケール). 左中 : Low pass マスク, 右中 : 帯域制限したフーリエ画像 (絶対値のログスケール). 左下 : 帯域制限 (ローパス) 画像, 右下 : マスクをかけた帯域制限画像.

4. 右中図 : フーリエ像にローパス・マスクをかける.
5. 左下図 : 逆フーリエ変換し, ローパス画像を作成する.

6. 右下図：ローパス画像にローパス・マスクをかけて、円状の画像を作成し、元画像とする。

3 連続マルチウェーブレット変換

連続マルチウェーブレット変換 [16] を定義しよう．このためには，スケールパラメータを伴ったバンドパス・フィルタの集合を構成する必要がある．最初に，連続ウェーブレット変換は，フーリエ・マルチプライアーであることを示す．

3.1 連続ウェーブレット変換

画像 $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ のウェーブレット関数 $\psi(x)$ による 2 次元連続ウェーブレット変換を

$$W_\psi f(b, a) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{1}{a} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \quad (2)$$

で定義する．ここで， $a > 0$ はスケールパラメータ， $b \in \mathbb{R}^2$ は位置パラメータである．このとき，

$$W_\psi \mathcal{T}_c f = \mathcal{T}_c W_\psi f$$

が成立する．

もしウェーブレット関数 ψ がアドミッシブル条件：

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{a} da < +\infty, \quad \text{for } \forall \xi \neq 0 \quad (3)$$

を満たせば（ ξ によらず積分が一定値 C_ψ になるという意味），逆連続ウェーブレット変換

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty W_\psi f(b, a) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^3}$$

が成立する．

もし，ウェーブレット関数のフーリエ変換 $\widehat{\psi}(\xi)$ が原点 $\xi = 0$ で連続ならば，アドミッシブル条件 (3) から $\widehat{\psi}(0) = 0$ が必要である．このとき，ウェーブレット関数はバンドパス特性を持つ．アドミッシブル条件を満たすウェーブレット関数を設計するときには，フーリエ変換 $\widehat{\psi}(\xi)$ を動径関数（原点からの距離のみの関数）として設計するのが簡単である．

3.2 バンドパス・フィルタ

スケールパラメータ $a > 0$ を固定したウェーブレット関数

$$\tilde{\psi}_a(x) = \frac{1}{a} \overline{\psi\left(\frac{-x}{a}\right)}$$

を定義する．すると連続ウェーブレット変換 (2) は、画像 $f(x)$ と関数 $\tilde{\psi}_a(x)$ の合成積（コンボリューション）である．つまり、

$$W_\psi f(b, a) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \tilde{\psi}_a(b - x) dx. \quad (4)$$

このことから、連続ウェーブレット変換は画像 $f(x)$ にバンドパス・フィルタ $\tilde{\psi}_a(x)$ を作用させることと等しい．

3.3 フーリエ・マルチプライアー

合成積で表現した連続ウェーブレット変換式 (4) を位置パラメータ b に関してフーリエ変換すると、画像 f のフーリエ変換と $\tilde{\psi}_a(x)$ のフーリエ変換の積：

$$(\mathcal{F}_{b \rightarrow \xi} W_\psi f(b, a))(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{\tilde{\psi}_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi) a \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \quad (5)$$

で書き表せる．

したがって、連続ウェーブレット変換 $W_\psi f(b, a)$ は以下の 3 ステップで計算できる．

1. 画像 $f(x)$ をフーリエ変換する．
2. フーリエ像 $\widehat{f}(\xi)$ にマスク（フーリエ・マルチプライアー）とよぶ関数 $a \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$ をかける．
3. 積 $\widehat{f}(\xi) a \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$ を逆フーリエ変換する．

このように、フーリエ変換像にマスクをかけて逆フーリエ変換する過程をフーリエ・マルチプライアーを作用させるという．

連続ウェーブレット変換 $W_\psi f(b, a)$, $a = 1$ をフーリエ・マルチプライアーを用いて計算するには、図 5 の手順を経る．図 6 に、スケールパラメータ $a = 1.5$ と $a = 0.75$ の時のマスクと連続ウェーブレット変換の絶対値を描く．スケールパラメータ a が小さくなると高周波数のバンドパス・フィルターになる．

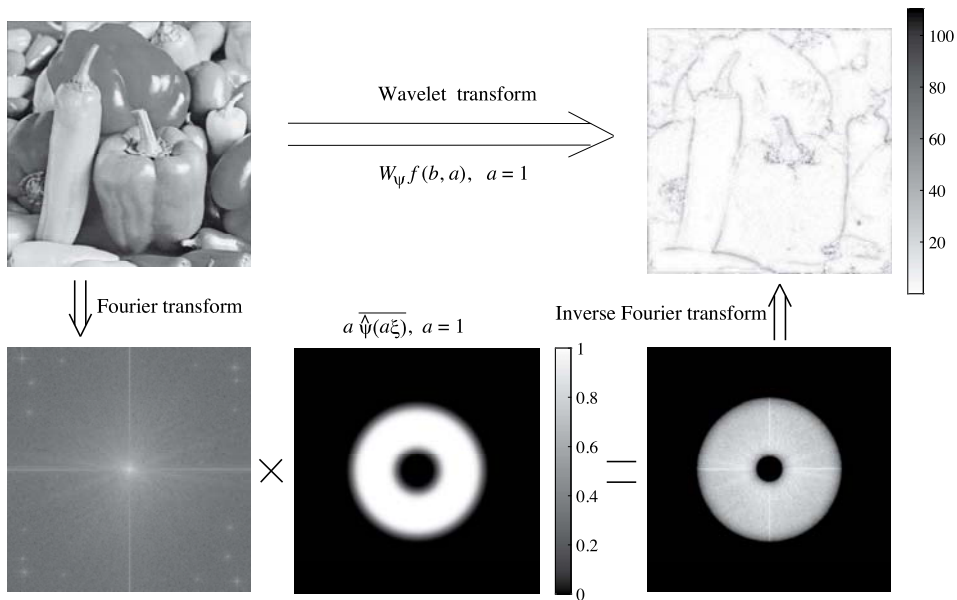


図 5: 連続ウェーブレット変換 $W_{\psi}f(b, a)$, $a = 1$ をフーリエ・マルチプライアーで計算する. 左上: 元画像, 左下: 元画像のフーリエ変換 (絶対値), 中下: マスク ($a = 1$), 右下: フーリエ像とマスクの積, 右上: 右下の逆フーリエ変換の絶対値.

3.4 連続マルチウェーブレット変換

アドミッシブル条件 (3) を満たす 2 次元ウェーブレット関数 ψ を, 動径関数 (原点からの距離のみの関数) 以外で設計するのは難しい. ウェーブレット関数 ψ が動径関数ならば, そのフーリエ変換 $\hat{\psi}(\xi)$ もまた動径関数になる. 図 5 の中下がマスク $\hat{\psi}(\xi)$ の例である.

このトーラス状のマスク $\hat{\psi}(\xi)$ を, 図 7 左のように, 等角度に J 個のパーティションに分ける. それぞれの $\hat{\psi}_j(\xi)$, $j = 1, \dots, J$ は滑らかで,

$$|\hat{\psi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^J |\hat{\psi}_j(\xi)|^2$$

を満たすように作る.

集合 $\{W_{\psi_j}f(b, a) : j = 1, \dots, J\}$ を, マルチウェーブレット関数 $\Psi(x) = (\psi_j(x))_{j=1, \dots, J}$ を用いた, 画像 $f(x)$ の連続マルチウェーブレット変換とよぶ. 各 ψ_j もマルチウェーブレット関数とよぶ. マルチウェーブレット関

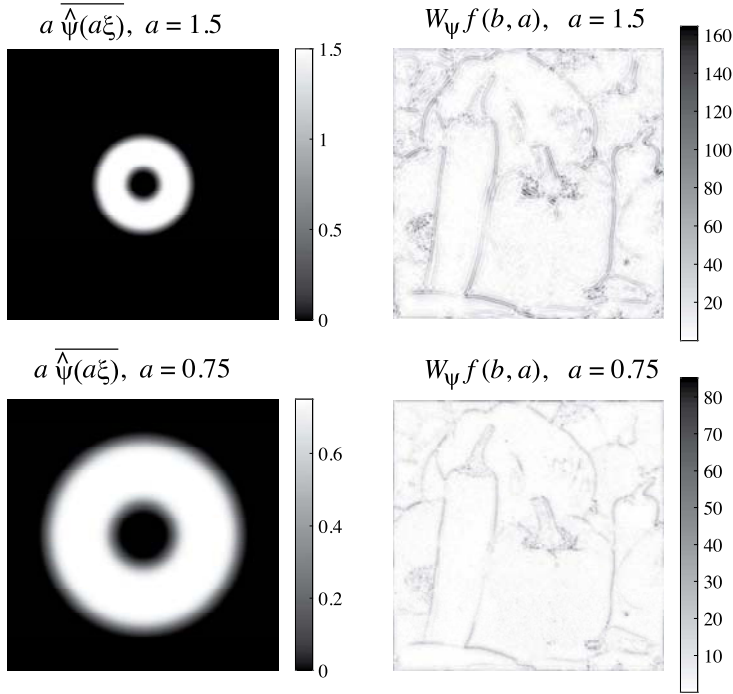


図 6: 連続ウェーブレット変換 $W_{\psi}f(b, a)$, $a = 1.5, a = 0.75$. 左: マスク, 右: 連続ウェーブレット変換の絶対値

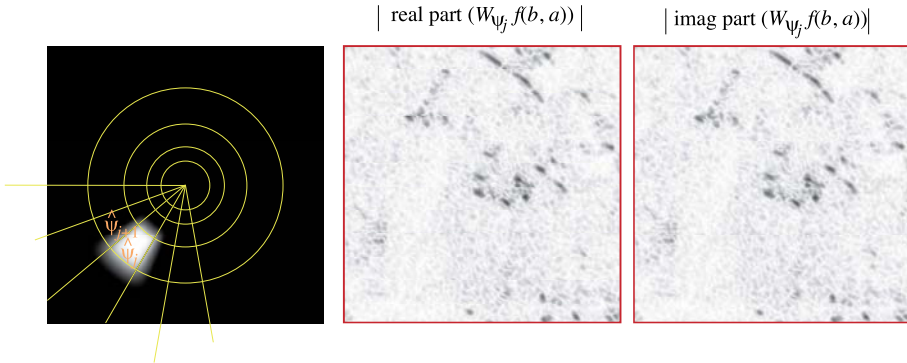


図 7: 連続マルチウェーブレット変換 $W_{\psi_j}f(b, a)$, $a = 1$. 左: マスク $\hat{\psi}_j$, 中: $|\Re W_{\psi_j}f(b, a)|$ ログスケールネガ, 右: $|\Im W_{\psi_j}f(b, a)|$ ログスケールネガ.

数 $\psi_j(x)$ は複素数値関数なので, $W_{\psi_j}f(b, a)$ も複素数値になる. その実部の絶対値 $|\Re W_{\psi_j}f(b, a)|$ と虚部の絶対値 $|\Im W_{\psi_j}f(b, a)|$ をログスケールの

ネガ画像として描くと図 7 の中図と右図をえる．その他のマルチウェーブレット関数の例は文献 [16] を参照のこと．

4 回転・平行移動の無い混合モデルの解法

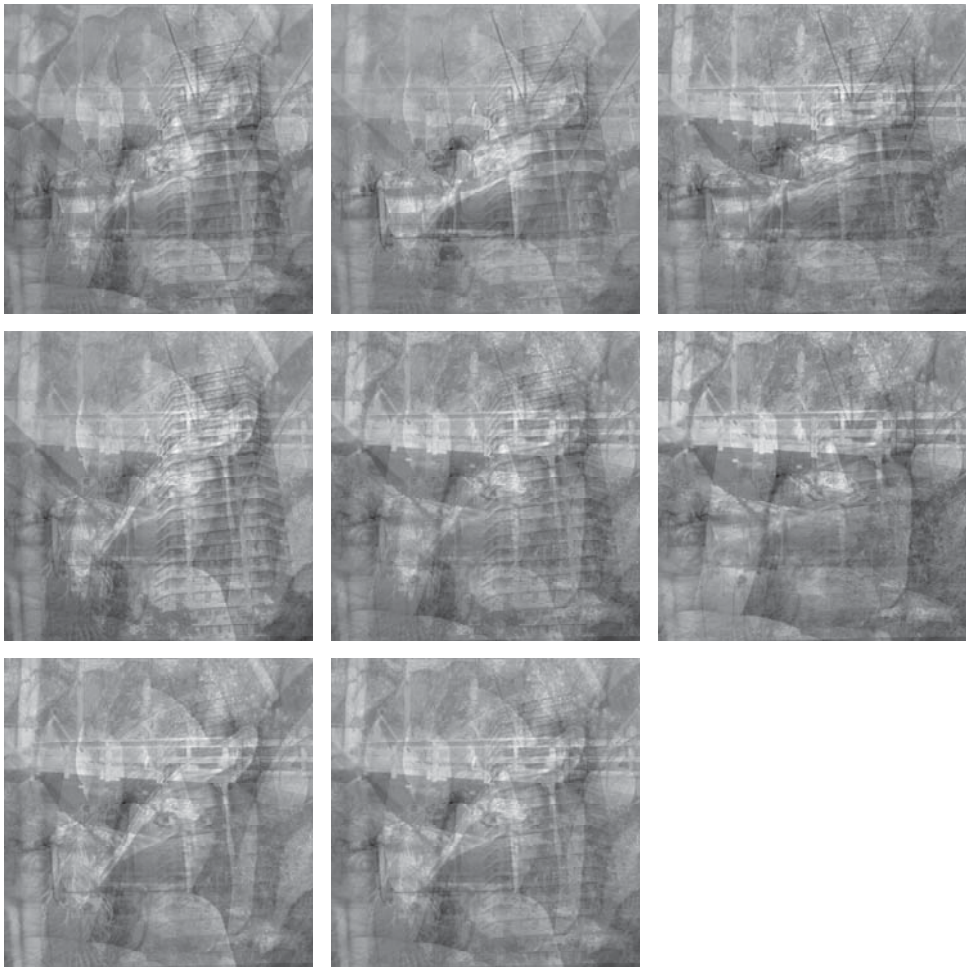


図 8: 8 個の観測画像の例．元画像は 6 個．

我々 [16, 17] は，混合モデル (1) で平行移動と回転が無い場合つまり， $\forall c_{k,n} = 0$ かつ $\forall \theta_{k,n} = 0$ の場合：

$$y_k = \sum_{n=1}^N a_{k,n} s_n, \quad k = 1, \dots, K$$

を考察した．ただし， $K \geq N$ ，つまり観測画像の個数が元画像の個数より多いと仮定する．観測画像の例を図 8 に描いた．

さて，観測画像と元画像の位置 x での輝度を縦ベクトルで $y(x) = (y_1(x), \dots, y_K(x))^T$ ， $s(x) = (s_1(x), \dots, s_N(x))^T$ とおく．混合行列を $A = (a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{K \times N}$ とすると，混合モデルは

$$y(x) = As(x)$$

と記述できる．各マルチウェーブレット関数 ψ_j に対して，連続ウェーブレット変換 $W_{\psi_j}f(b, a)$ は複素数値で画像 f に対して線形写像である．そこで，観測画像と元画像を連続ウェーブレット変換し実部と虚部を並べた行列

$$Y_j(b, a) = \begin{pmatrix} \Re W_{\psi_j} y_1(b, a) & \Im W_{\psi_j} y_1(b, a) \\ \vdots & \vdots \\ \Re W_{\psi_j} y_K(b, a) & \Im W_{\psi_j} y_K(b, a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times 2},$$

$$S_j(b, a) = \begin{pmatrix} \Re W_{\psi_j} s_1(b, a) & \Im W_{\psi_j} s_1(b, a) \\ \vdots & \vdots \\ \Re W_{\psi_j} s_N(b, a) & \Im W_{\psi_j} s_N(b, a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 2}$$

を作ると，

$$Y_j(b, a) = AS_j(b, a)$$

が成立する．

ここで，連続ウェーブレット変換 $W_{\psi_j} s_n(b, a)$ はバンドパス・フィルタを s_n に作用させた結果なので，元画像のエッジや輪郭線に相当する．エッジ・輪郭線は，2 次元画像の中の 1 次元要素（曲線や直線）である．したがって，元画像 $s_1, \dots, s_N$ のエッジ・輪郭線の共通部分は交点なので，それほど大きな面積は持たない．元画像 s_n のみのエッジである点 (j, b, a) の集合：

$$E_n = \{(j, b, a) : |W_{\psi_j} s_n(b, a)| \text{ is large, other } |W_{\psi_j} s_{n'}(b, a)| \text{ are small } (n' \neq n)\}$$

を考えよう．点 $(j, b, a) \in E_n$ に対して，

$$Y_j(b, a) \doteq \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{K,n} \end{pmatrix} (\Re W_{\psi_j} s_n(b, a), \Im W_{\psi_j} s_n(b, a))$$

であるから、行列 $Y_j(b, a) \in \mathbb{R}^{K \times 2}$ の階数は 1 であり、 $Y_j(b, a)$ の第 1 列と第 2 列と混合行列 A の第 n 列は平行である。そこで、混合行列 A のある列を決定し、この列に対応する元画像を含まない新しい観測画像の集合を与える次のアルゴリズム 2 とアルゴリズム 3 を提案した。

アルゴリズム 2 (ガウスの消去法).

0. $K_1 := K$ とおく。

K_1 個の観測画像 $\{y_k\}_{k=1, \dots, K_1}$ に対して、ある元画像を取り除いた新しい $(K_1 - 1)$ 個の観測画像の集合を作成する。

最初に、 $K_1 \times 2$ 行列 $Y_j(b, a)$ が階数 1 になったとき、第 1 列を大きさ 1 に正規化して記憶する。

1. ある範囲の全ての (j, b, a) に対して、次の 2. と 3. を行う。
2. $Y_j(b, a)$ を特異値分解する。

$$Y_j(b, a) = U \Sigma V^T.$$

3. 第 1 特異値が第 2 特異値より十分大きいとき（行列 $Y_j(b, a)$ の階数が 1）、直交行列 U の第 1 列（混合行列 A のある列の大きさを 1 に正規化したベクトルの候補）を記憶する。

次に、記憶したベクトルの単位球面 $\mathbb{S}^{K_1-1}$ 上での分布を作る。

4. 記憶した大きさ 1 のベクトルを単位球面 $\mathbb{S}^{K_1-1}$ 上でクラスタリングする。
5. 最も密度の高いクラスタの代表元 $b = (b_1, \dots, b_{K_1})^T$ を選ぶ。

最後にガウスの消去法を用いて、代表元 b に対応する元画像を含まない新しい観測画像の集合を作成する。

6. 代表元 $b = (b_1, \dots, b_{K_1})^T$ の各成分の内、絶対値が最大の添字 ℓ を選びピボット行とする。

$$\ell = \arg \max_k |b_k|$$

7. ピボット画像 $y^{K_1} := y_\ell$ を記録し、観測画像 $\{y_k\}_{k=1,\dots,K_1}$ でガウスの消去法を行う。

$$y_k^{(1)} = y_k - \frac{b_k}{b_\ell} y_\ell, \quad k = 1, \dots, K_1, (k \neq \ell).$$

8. $(K_1 - 1)$ 個の新しい観測画像 $\{y_k^{(1)}\}_{k \neq \ell}$ の番号を打ち直し、観測画像 $\{y_k\}_{k=1,\dots,K_1-1}$ とする。 $K_1 := K_1 - 1$ とする。

終了条件と繰り返し

9. 新しい観測画像が、全て同じ (ℓ^2 ノルムを正規化した観測画像 $\{y_k\}_{k=1,\dots,K_1}$ に対して、画像の差または和の ℓ^2 ノルムがほぼ 0 となる) か $K_1 = 1$ であれば、ピボット画像 $y^{K_1} := y_1$ を記録し、終了する。そうでなければ、新しい観測画像 $\{y_k\}_{k=1,\dots,K_1}$ に対して、上記ステップを 1. から繰り返す。

アルゴリズム 3 (元画像の復元). アルゴリズム 2 により、ピボット画像の集合 $\{y^k\}_{k=K_1, K_1+1, \dots, K}$ が作成できている。

1. $N_1 = 1$ とおく。最初の推定元画像を $\tilde{s}_1 := y^{K_1}$ とする。
2. 推定元画像 $\{\tilde{s}_n\}_{n=1,\dots,N_1}$ とピボット画像 $y^{K_1+N_1}$ を観測画像の組とした次の画像混合問題を考える。

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ \tilde{s}_{N_1} \\ y^{K_1+N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ \tilde{s}_{N_1} \\ \tilde{s}_{N_1+1} \end{pmatrix}$$

ただし、 I_{N_1} は、 N_1 次単位行列である。

3. 2. の画像分離問題をアルゴリズム 2 で $\tilde{b} = (0, \dots, 0, 1)^T$ が代表元にならないように (最も密度の高いクラスタの代表元が $\tilde{b}$ なら次に密度の高いクラスタの代表元を選ぶ), 終了条件まで動かした最後のピボット画像を推定元画像 $\tilde{s}_{N_1+1}$ とする。
4. N_1 が $(K - K_1 + 1)$ に等しいとき、終了する。異なれば、 $N_1 := N_1 + 1$ とおき、ステップ 2. へ

我々 [17] は、これらのアルゴリズムをマルチステージ・ブラインド信号源分離法と名づけた。この方法により、図 8 にある 8 個の観測画像から図 9 にある 6 個の推定元画像に分離できる。ただし、画像分離問題は逆問題であるので、元画像の ℓ^2 ノルム、元画像の符号（ポジ、ネガ）、元画像の順番には任意性がある。



図 9: マルチステージ・ブラインド信号源分離法により得られた 6 個の推定元画像。注意：下中図の boats 画像はネガ画像である。

5 回転の無い混合モデルの解法

我々 [19] は、回転の無い画像混合モデルを考えた。つまり、画像混合モデル (1) で、 $\forall \theta_{k,n} = 0$ とした場合であり、

$$y_k = \sum_{n=1}^N a_{k,n} \mathcal{T}_{c_{k,n}} s_n, \quad k = 1, \dots, K.$$

図 10 に 4 個の観測画像の例をあげる。マルチウェーブレット関数 ψ_j に対して、観測画像 y_k の連続ウェーブレット変換（エッジ画像）を平行移

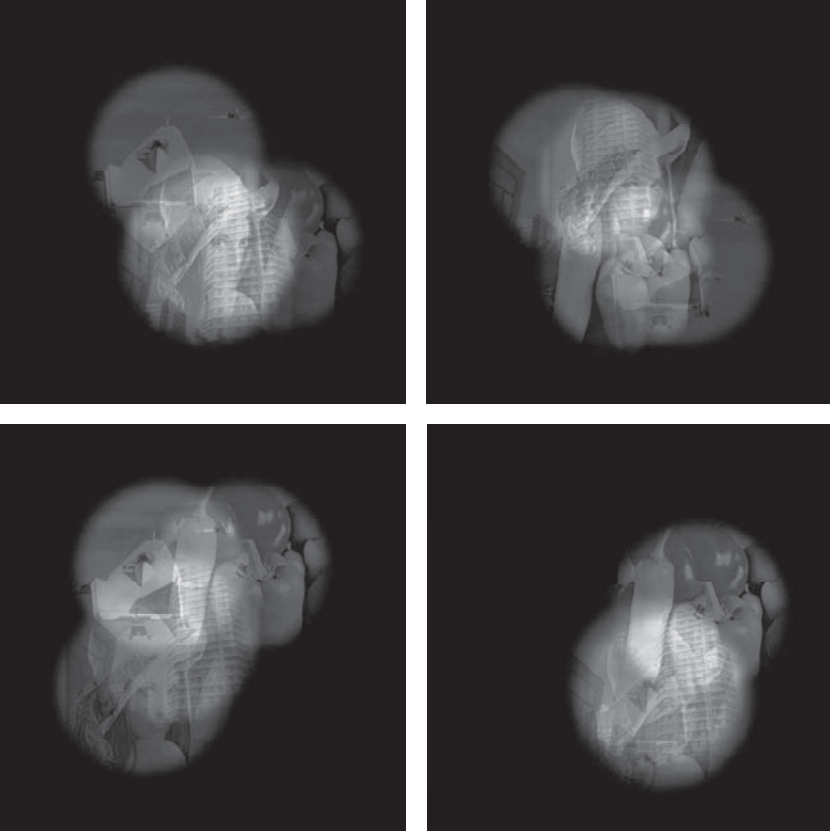


図 10: 平行移動ありの元画像の重ね合わせ例. 左上 : y_1 , 右上 : y_2 , 左下 : y_3 , 右下 : y_4 .

動した $\mathcal{T}_c W_{\psi_j} y_k(b, a)$ と, 観測画像 y_ℓ の連続ウェーブレット変換 (エッジ画像) $W_{\psi_j} y_\ell(b, a)$ の内積 $R_{k,\ell}^j(c, a)$ を計算しよう. ある元画像のエッジが重なると, 内積の絶対値が大きくなるはずである.

$$\begin{aligned}
 R_{k,\ell}^j(c, a) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{T}_c W_{\psi_j} y_k(b, a) \overline{W_{\psi_j} y_\ell(b, a)} db \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{M}_c \widehat{y}_k(\xi) \overline{\widehat{a\psi_j}(a\xi)} \overline{\widehat{y}_\ell(\xi)} \overline{\widehat{a\psi_j}(a\xi)} d\xi \\
 &= \frac{a^2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ic \cdot \xi} \left| \widehat{\psi_j}(a\xi) \right|^2 \widehat{y}_k(\xi) \overline{\widehat{y}_\ell(\xi)} d\xi \\
 &= \frac{a^2}{(2\pi)^2} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow c} \left[\left| \widehat{\psi_j}(a\xi) \right|^2 \widehat{y}_k(\xi) \overline{\widehat{y}_\ell(\xi)} \right].
 \end{aligned}$$

パーセバルの等式でフーリエ空間での積分に書き換えた．最後の式から，内積 $R_{k,\ell}^j(c, a)$ は， $\left[\left| \widehat{\psi}_j(\omega) \right|^2 \widehat{y}_k(\xi) \overline{\widehat{y}_\ell(\xi)} \right]$ を変数 ξ でフーリエ変換して，変数 c に取り替えれば求まることが分かる．高速フーリエ変換を用いて計算すると，画素が最小単位になるから，平行移動パラメータは $c \in \mathbb{Z}^2$ に制限される．

内積 $R_{k,\ell}^j(c, a)$ の絶対値を全ての $j = 1, \dots, J$ について和を取り，

$$R_{k,\ell}(c, a) = \sum_{j=1}^J |R_{k,\ell}^j(c, a)|$$

とおく．図 10 の観測画像を用いて， $R_{1,2}(c, 1)$ を平行移動パラメータ $c \in \mathbb{Z}^2$ で描くと，図 11 がえられる．この図 11 のピークの個数が 4 個なので， y_1 のエッジ画像動かすと，4 箇所 y_2 のエッジ画像と重なることが分かる．したがって，元画像の個数は 4 と推定される．ピークを取る座標がある元画像の y_2 に対する y_1 の元画像の相対平行移動パラメータ $(c_{2,n} - c_{1,n})$ の推定値である．

図 10 の観測画像を，図 12 の推定元画像に分離できた．詳しくは文献 [19] を参照せよ．ただし，平行移動パラメータが整数値の場合 ($c_{k,n} \in \mathbb{Z}^2$) には，元画像の分離がうまくできる．平行移動パラメータが非整数値の場合，最も近い整数値として相対平行移動パラメータ値を求めるところまではできるが，混合係数が正しく求まらない．

6 画像混合モデル (1) のパラメータ推定

我々 [20, 21, 22] は，回転・平行移動ありの画像混合モデル (1) を考察した．図 1 にあげた 2 個の観測画像から，

1. 元画像の個数 N
2. 相対回転角度 $(\theta_{1,n} - \theta_{2,n})$
3. 相対平行移動パラメータ $(c_{1,n} - P_{\theta_{1,n} - \theta_{2,n}} c_{2,n})$
4. 相対混合係数 $a_{2,n}/a_{1,n}$

を推定しよう．相対回転角度は，観測画像 y_1 を固定し， y_2 を回転したときに，元画像 s_n が同じ方向を向くための回転角度である．相対平行移動

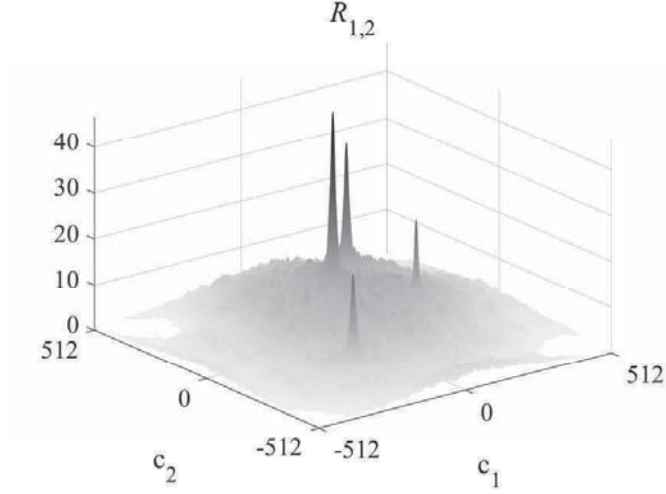


図 11: $R_{1,2}(c, a)$, for $a = 1$.

パラメータは、 y_1 を固定し、 y_2 を相対回転角度だけ回した後に、回転した y_2 をどれだけ平行移動すれば、元画像 s_n が重なるかを示すパラメータである。相対混合係数は、観測画像 y_1 内のある元画像の重み $a_{1,n}$ を基準とした観測画像 y_2 内の対応する元画像の重み $a_{2,n}$ である。相対混合係数は、ビンサイズ一定のヒストグラムを使って推定するので、比を推定するより、原点と点 $(a_{1,n}, a_{2,n})$ のなす角度（複素数 $a_{1,n} + ia_{2,n}$ の偏角）として推定した方が正確である。

6.1 元画像の枚数，相対回転角度，相対平行移動パラメータの推定

ウェーブレット関数 ψ として、動径関数（ここでは、フーリエ像 $\hat{\psi}$ が図 5 中下になる関数）を選ぶ。スケールパラメータ a を固定する。観測画像 y_1 のウェーブレット変換 $W_\psi y_1(b, a)$ と観測画像 y_2 のウェーブレット変換 $W_\psi y_2(b, a)$ を θ [degree] 回転して c だけ平行移動した $\mathcal{T}_c \mathcal{R}_\theta W_\psi y_2(b, a)$ の内積 $F_a(\theta, c)$ を計算する。

$$\begin{aligned} F_a(\theta, c) &= \int_{\mathbb{R}^2} W_\psi y_1(b, a) \overline{\mathcal{T}_c \mathcal{R}_\theta W_\psi y_2(b, a)} db \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{y}_1(\xi) \overline{a \hat{\psi}(a\xi)} \overline{\mathcal{M}_c \mathcal{R}_\theta \hat{y}_2(\xi)} a \hat{\psi}(a\xi) d\xi \end{aligned}$$

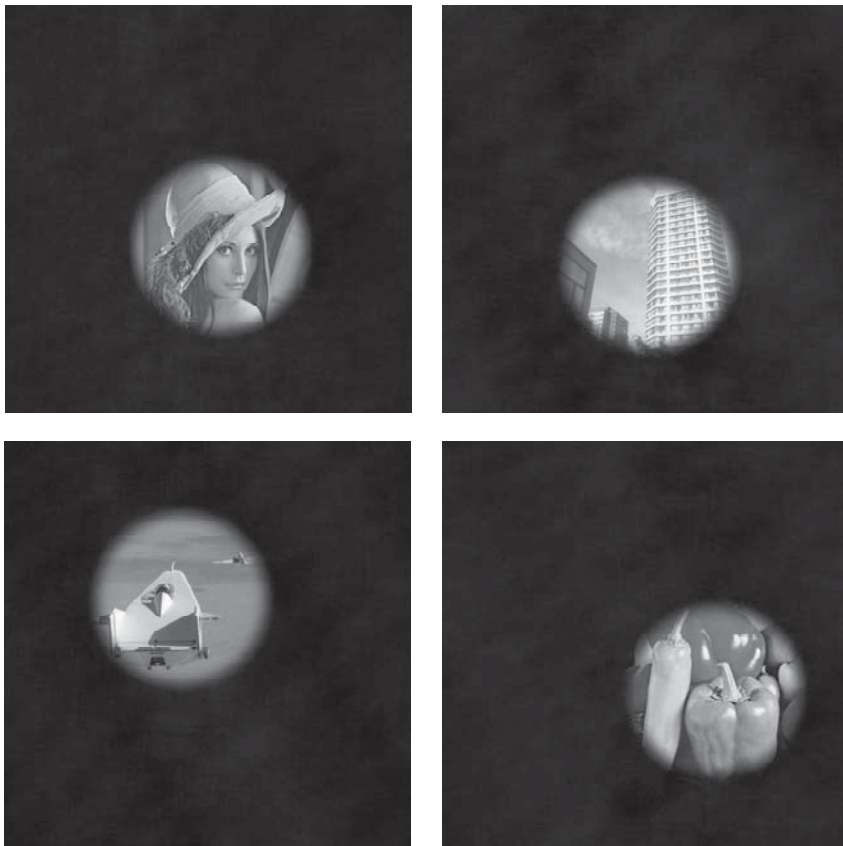


図 12: 推定した 4 個の元画像.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{y}_1(\xi) \left| a\hat{\psi}(a\xi) \right|^2 e^{ic \cdot \xi} \overline{\mathcal{R}_\theta \hat{y}_2(\xi)} d\xi \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left| a\hat{\psi}(a\xi) \right|^2 \hat{y}_1(\xi) \overline{\mathcal{R}_\theta \hat{y}_2(\xi)} \right] e^{ic \cdot \xi} d\xi
 \end{aligned}$$

ここで，パーセバルの等式を用いて，フーリエ空間での積分に置き換えた． $\hat{\psi}(a\xi)$ は，動径関数だから回転不変なので $\mathcal{R}_\theta$ の外に出せる．最終的に内積 $F_a(\theta, c)$ は， θ をとめるごとに， $\left[\left| a\hat{\psi}(a\xi) \right|^2 \hat{y}_1(\xi) \overline{\mathcal{R}_\theta \hat{y}_2(\xi)} \right]$ の逆フーリエ変換なので，高速フーリエ変換を用いて計算できる．このときは， $c \in \mathbb{Z}^2$ の制限を受ける．

いくつかのスケールパラメータ a について，内積 $F_a(\theta, c)$ の絶対値を

足し合わせて,

$$F(\theta, c) = \sum_a |F_a(\theta, c)|$$

を作成する. θ をとめるごとに, $F(\theta, c)$ の最大値を計算し,

$$H(\theta) = \max_{c \in \mathbb{Z}^2} F(\theta, c)$$

を作成する.

アルゴリズム 4. 元画像の個数, 相対回転角度, 相対平行移動パラメータの推定を以下で行う.

1. $H(\theta)$ をプロットし, グラフのピークの個数が元画像の個数の推定である. ピークを取る θ_n の値が, 相対回転角度の推定値である.
2. ピークを取る θ_n にたいして, $F(\theta_n, c)$ がピークを取る c_n が相対平行移動パラメータの推定である. つまり,

$$c_n = \arg \max_{c \in \mathbb{Z}^2} F(\theta_n, c).$$

図 1 にあげた 2 個の観測画像から, $H(\theta)$ を作成すると, 図 13 が得られる. ピークが 4 個とれるので, 元画像の個数は 4 であると推定する. 赤○のピークを取る θ が相対回転角度の推定である. モデルパラメータからえられる相対回転角度を θ 軸上に赤×で示した. ほぼ一致している.

次に, θ を固定して, $F(\theta_n, c)$ を描くと図 14 をえる. 図 14 の左図から, $H(\theta)$ がピークを取る θ_n に対応するとき, $F(\theta_n, c)$ も一カ所ピークが出ることが分かる. $F(\theta_n, c)$ がピークを取る座標 c_n で相対平行移動パラメータを推定する.

図 14 の右図から, θ がピークを取る θ_n から離れると, $F(\theta_n, c)$ の高さが低くなってピークが広がることが分かる. そこで, 各 θ を固定し, $F(\theta, c)$ が $\max_c F(\theta, c)$ の 0.9 倍より高い値を取る c の個数を数える.

$$P(\theta) = \# \left\{ c \in \mathbb{Z}^2 \mid F(\theta, c) \geq 0.9 \max_c F(\theta, c) \right\}.$$

$P(\theta)$ をプロットすると, 図 15 である. 図 14 の左図のように $F(\theta, c)$ が鋭いピークを持つときは, $P(\theta)$ の値が小さくなり, 図 14 の右図のように $F(\theta, c)$ が広がっているときには, $P(\theta)$ の値が大きくなることが分かる. 図 15 で赤○で描いた $P(\theta)$ が極小値を取る θ を, 相対回転角度の推定値とすることができる. θ 軸上の赤×は, モデルパラメータである.

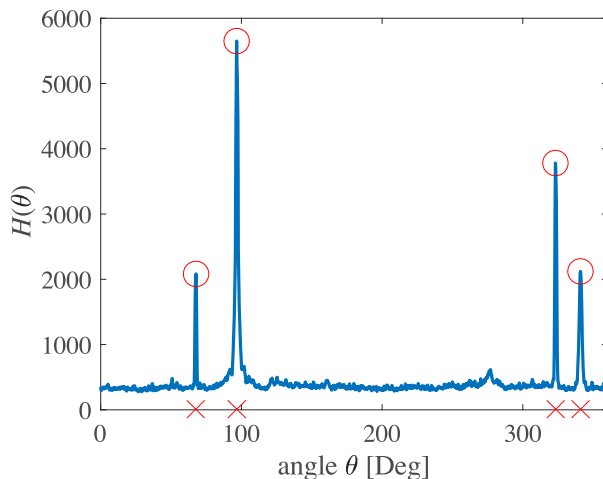


図 13: $H(\theta)$ のグラフ. θ は, 0.25 [degree] ごと. 赤○: 相対回転角度の推定値, θ 軸上の赤×: モデルパラメータ

6.2 相対混合係数の推定

図 16 の左上が観測画像 y_1 である. 右上が観測画像 y_2 である. y_2 を前小節で求めた, 相対角度だけ回転し, 相対平行移動パラメータだけ平行移動しよう. 図 16 の左下が, $H(\theta)$ の一番高いピーク $\theta_1 = 96.75$, c_1 に対応した場合であり, ビルの絵がほぼ同じ方向・位置にある. 図 16 の右下が, $H(\theta)$ の一番高低いーク $\theta_4 = 67.75$, c_4 に対応した場合であり, boats の絵がほぼ同じ方向・位置にある.

観測画像 y_1 と図 16 の左下の図で, § 4 の方法を用いて行列 $Y_j(b, a)$ が階数 1 になるときを求めても, 相対混合係数は求まらない.

これは, 非整数の相対平行移動パラメータ $(c_{1,n} - P_{\theta_{1,n} - \theta_{2,n}} c_{2,n})$ を整数値 $\mathbb{Z}^2$ で推定しているから, 観測画像 y_1 と回転・平行移動した y_2 の元画像がほんの少しずれているためである.

一般に画像を少しずらして元の画像を引くと, エッジ画像が求まる. これはエッジ画像を作成するときに差分を用いることができることから分かる. つまり, 少しのずれは, エッジの値 (連続ウェーブレット変換) に大きな差を生じさせる. これが, 相対混合係数は求まらない理由である.

そこで, 画像 f の連続マルチウェーブレット変換の c だけ平行移動のフーリエ変換を近似してみよう. マルチウェーブレット関数のフーリエ変換 $\hat{\psi}_j(\xi) \geq 0$ がコンパクトサポート (サポートが十分小さいと仮定) で

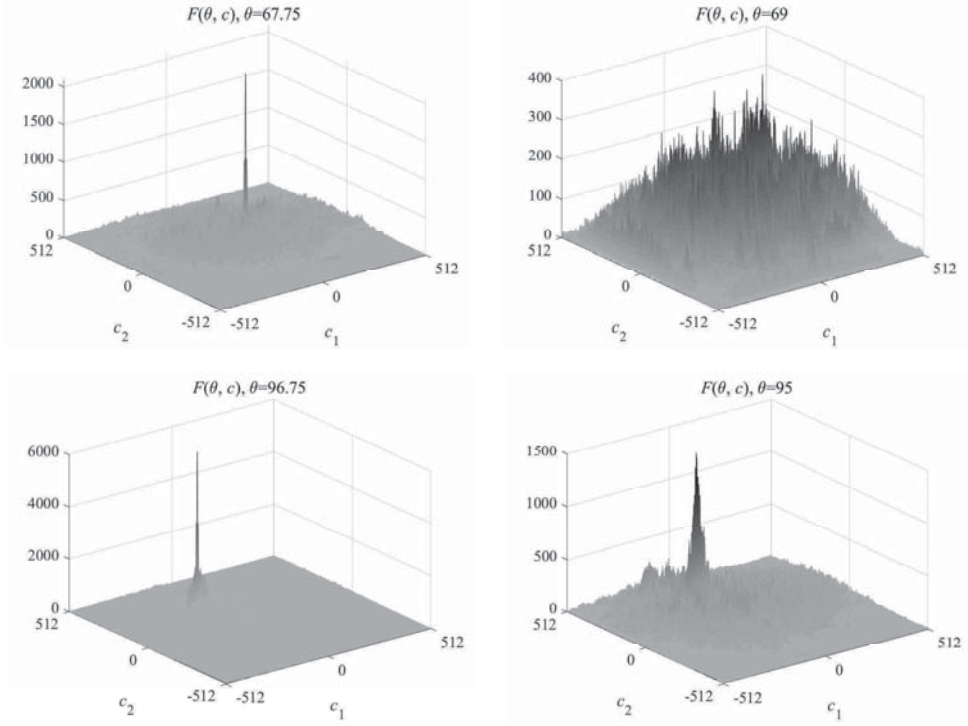


図 14: $F(\theta, c)$ のグラフ. 左上: $\theta_4 = 67.75$ (一番低いピーク), 右上: $\theta = 69$ (一番低いピークのそば), 左下: $\theta_1 = 96.75$ (一番高いピーク), 右下: $\theta = 95$ (一番高いピークのそば).

あることから,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{b \rightarrow \xi} \mathcal{T}_c W_{\psi_j} f(b, a) &= e^{-ic \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) a \overline{\widehat{\psi_j}(a\xi)} \\ &\doteq e^{-ic \cdot g_{\widehat{\psi_j}}/a} \widehat{f}(\xi) a \overline{\widehat{\psi_j}(a\xi)}\end{aligned}$$

で近似できる. ただし, c が十分小さく, $g_{\widehat{\psi_j}} = \int_{\mathbb{R}^2} \xi \widehat{\psi_j}(\xi) d\xi$ ($\widehat{\psi_j}$ の重心) とする. したがって,

$$\mathcal{T}_c W_{\psi_j} f(b, a) \doteq e^{-ic \cdot g_{\widehat{\psi_j}}/a} W_{\psi_j} f(b, a)$$

と一定の偏角 $-ic \cdot g_{\widehat{\psi_j}}/a$ だけずれている. 偏角のずれが 0 の場合が § 4 の行列 $Y_j(b, a)$ の階数 1 の場合に相当する. そこで, 相対混合係数を求めるために次のアルゴリズム 5 を提案する.

アルゴリズム 5. 相対混合係数を求める. 観測画像 y_2 を θ_n 回転して c_n 平行移動した画像を y_2^n とする.

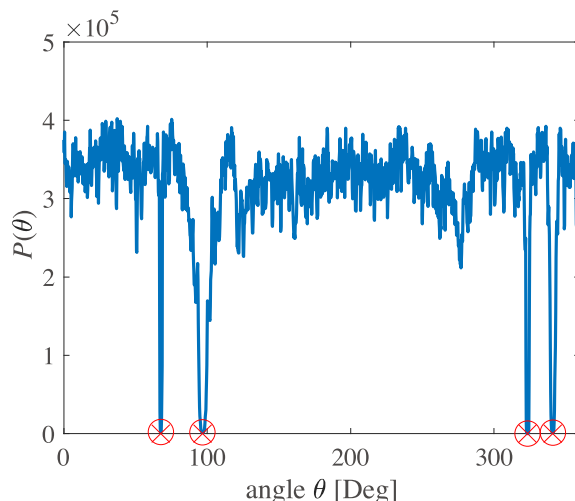


図 15: $P(\theta)$ のグラフ. θ は, 0.25 [degree] ごと. 赤○: 相対回転角度の推定値, θ 軸上の赤×: モデルパラメータ

1. 各 ψ_j と スケールパラメータ a を固定するごとに,
 - (a) 連続マルチウェーブレット変換 $W_{\psi_j}y_1(b, a)$ と $W_{\psi_j}y_2^n(b, a)$ の偏角の差のヒストグラムを作成する.
 - (b) 偏角の差ヒストグラムがピークになる位置 b について比 $|W_{\psi_j}y_2^n(b, a)|/|W_{\psi_j}y_1(b, a)|$ を記録する.
2. 記録した比のヒストグラムを描き. そのピークを取る座標を相対混合係数の推定値とする.

アルゴリズム 5 で, $H(\theta)$ の一番高いピーク θ_1 の場合に相対混合係数を推定するヒストグラムが図 17 左である. 一番低いピーク θ_4 の場合に相対混合係数を推定するヒストグラムが図 17 右である. どちらもきれいなピークが見えている. ただし, モデルパラメータから求めた比より, 0.02 ほど小さい.

7 結論と今後の課題

回転・平行移動の無い混合モデルの画像分離問題は, マルチステージ・ブラインド信号源分離法で解ける. 平行移動した元画像の重ね合わせ画

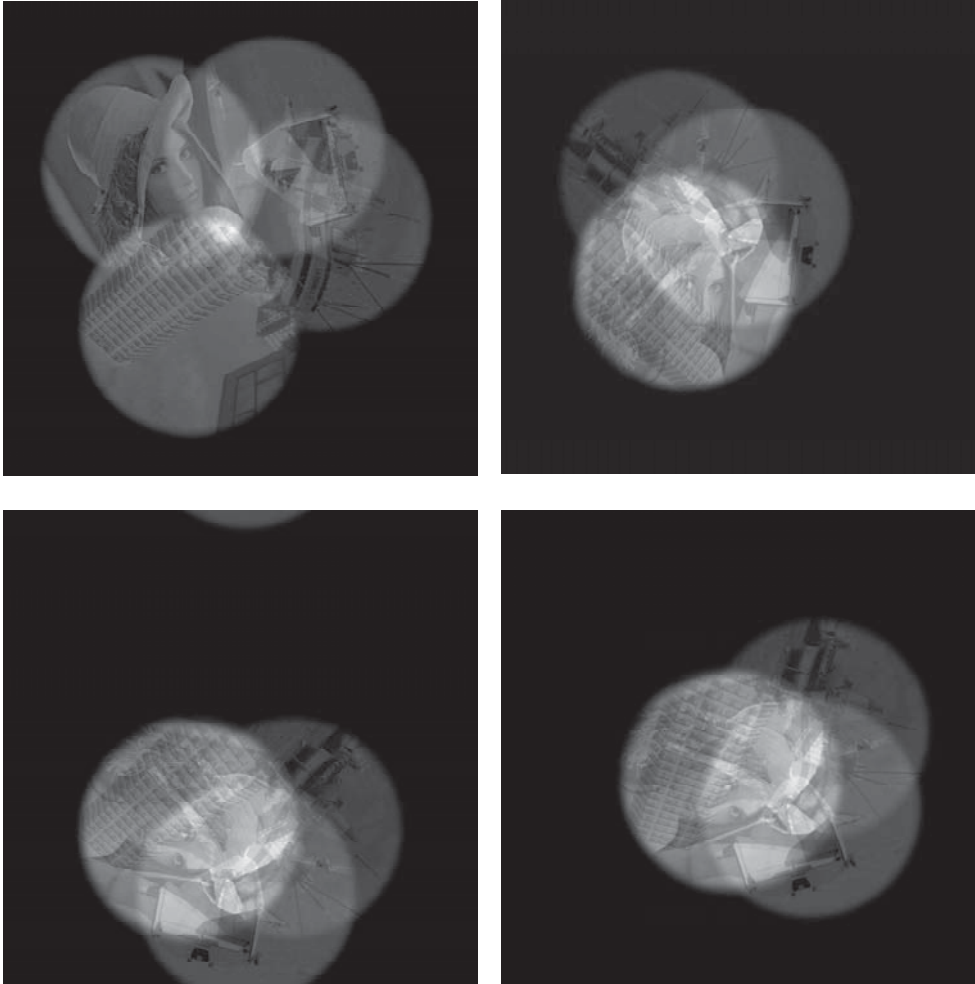


図 16: 左上：観測画像 y_1 ，右上：観測画像 y_2 ，左下： y_2 を $H(\theta)$ の一番高いピークに対応する角度回転 $\theta_1 = 96.75$ と平行移動（ビルの絵が重なっている），右下： y_2 を $H(\theta)$ の一番低いピークに対応する角度回転 $\theta_4 = 67.75$ と平行移動（boats の絵が重なっている）。

像の分離問題は，平行移動パラメータが整数の場合は解ける．回転・平行移動ありの混合モデルの場合，相対パラメータの推定ができた．

今後の課題として，回転・平行移動ありの混合モデルの場合に画像分離を行いたい．画像の拡大・縮小を含んだ混合モデルを考えたい．

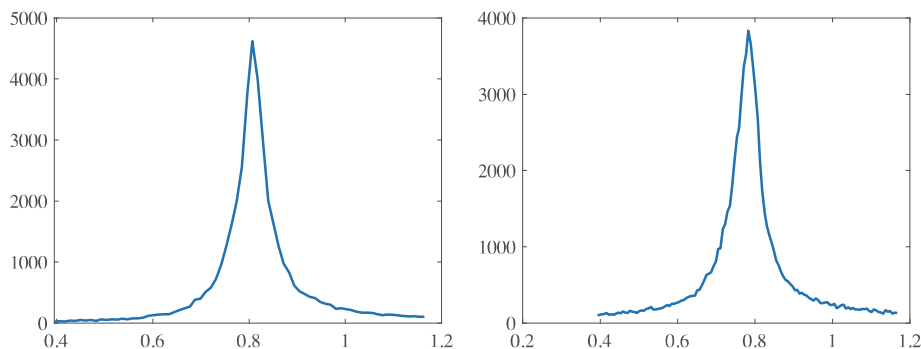


図 17: 左：一番高いピーク θ_1 に対応する相対混合係数を求めるヒストグラム．右：一番低いピーク θ_4 に対応する相対混合係数を求めるヒストグラム．

謝辞

本講義録は，大阪教育大学・数理情報の芦野隆一，大阪電気通信大学・数理科学教育研究センターの萬代武史との共同研究の結果を元に執筆した．本研究は，JSPS 科研費 JP16K05216, JP17K05298, JP17K05363 の助成を受けたものです．

参考文献

- [1] Cherry, E.C.: Some experiments on the recognition of speech, with one and with two ears. J. Acoust. Soc. Am. 25, 975-979 (1953). doi:10.1121/1.1907229
- [2] Haykin, S., Chen, Z.: The cocktail party problem. Neural Computation 17, 1875-1902 (2005). doi:10.1162/0899766054322964
- [3] Cichocki, A., Amari, S.: Adaptive Blind Signal and Image Processing: Learning Algorithms and Applications. John Wiley & Sons, Chichester, UK (2002). doi:10.1002/0470845899
- [4] Hyvärinen, A., Karhunen, J., Oja, E.: Independent Component Analysis. John Wiley & Sons, New York, NY, 2001.

- [5] Balan, R., Rosca, J.: Statistical properties of STFT ratios for two channel systems and applications to blind source separation. In: 2nd International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, pp. 19–22 (2000).
- [6] Jourjine, A., Rickard, S., Yilmaz, O.: Blind separation of disjoint orthogonal signals: Demixing n sources from 2 mixtures, In: IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 2985–2988, IEEE Press (2000). doi:10.1109/ICASSP.2000.861162
- [7] Fujita, K., Takei, Y., Morimoto A., Ashino R.: Mathematical view of a blind source separation on a time frequency space. Appl. Math. Comput. 187, 153–162 (2007). doi:10.1016/j.amc.2006.08.172
- [8] Ashino, R., Berenstein, C.A., Fujita, K., Morimoto, A., Morimoto, M., Napoletani, D., Takei, Y.: Mathematical background for a method on quotient signal decomposition. Appl. Anal. 86, 577–609 (2007). doi:10.1080/00036810701286288
- [9] 守本 晃：時間周波数解析によるブラインド信号源分離. 数理解析研究所講究録, 1622, 47–96, (2009).
- [10] Ashino, R., Mandai, T., Morimoto, A., Sasaki, F.: Blind source separation of spatio-temporal mixed signals using time-frequency analysis. Appl. Anal. 88, 425–456 (2009). doi:10.1080/00036810902767524
- [11] Ashino, R., Mandai, T., Morimoto, A.: Blind source separation of spatio-temporal mixed signals using phase information of analytic wavelet transform. Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 8, 575–594 (2010). doi:10.1142/S0219691310003651
- [12] Abolghasemi, V., Ferdowsi, S., Sanei, S.: Blind separation of image sources via adaptive dictionary learning. IEEE Trans. Image Proc. 21, 2921–2930 (2012). doi:10.1109/TIP.2012.2187530
- [13] Arai, K.: Method for image source separation by means of independent component analysis: ICA, Maximum entropy method, and

- wavelet based method. *Int. J. Adv. Comput. Sci. Appl.* 3, 76–81 (2012). doi:10.14569/IJACSA.2012.031113
- [14] 守本晃・神山浩之・井上大樹・大道淳史・西村一志・芦野隆一・萬代武史：ウェーブレット解析を用いた画像分離. *日本応用数理学会論文誌*, 19, 257–278 (2009).
- [15] 守本晃：連続マルチウェーブレット変換に基づく画像分離. *数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワークショップウェーブレット理論と工学への応用プロシーディングス*, 87–106 (2011). <https://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~morimoto/WSPRO/wavelet2011proceedings.pdf>
- [16] Ashino, R., Kataoka, S., Mandai, T., Morimoto, A.: Blind image source separations by wavelet analysis. *Appl. Anal.* 91, 617–644 (2012). doi:10.1080/00036811.2011.616497
- [17] Ashino, R., Mandai, T., Morimoto, A.: Multistage blind source separations by wavelet analysis. *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.* 12, 1460004 (25 pages) (2014). doi:10.1142/S0219691314600042
- [18] Ashino, R., Mandai, T., Morimoto, A.: Continuous multiwavelet transform for blind signal separation. In: Wong, M.W., Zhu, H. (Eds.) *Pseudo-Differential Operators: Groups, Geometry and Application*, pp. 219–239, Springer International Publishing AG (2017). doi:10.1007/978-3-319-47512-7_12
- [19] Ashino, R., Mandai, T., Morimoto, A.: An estimation method of shift parameters in image separation problem. In: Mityushev, V.V., Ruzhansky, M.V. (eds.) *Current Trends in Analysis and Its Applications: Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakow 2013*, pp. 467–473, Birkhäuser Mathematics (2015). doi:10.1007/978-3-319-12577-0_52
- [20] Ashino, R., Mandai, T., Morimoto, A.: Detection of rotation angles on image separation problem. In: Lindahl, K., Lindstrom, T.,

- Rodino, L.G., Toft, J., Wahlberg, P. (Eds.) Analysis, Probability, Applications, and Computation, pp. 551–558, Springer Nature Switzerland AG (2019). doi:10.1007/978-3-030-04459-6_53
- [21] Ashino, R., Mandai, T, Morimoto, A.: An estimation of rotation and translation in image separation problem. In: 2018 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, pp. 113–118, IEEE (2018). doi:10.1109/ICWAPR.2018.8521267
- [22] Ashino, R., Mandai, T, Morimoto, A.: An estimation of mixing coefficients in image separation problem using multiwavelet transforms. In: 2019 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, pp. 128–133, IEEE (2019).