

標準形線形計画問題に対する LP-Newton 法

北原知就^{*}, 水野眞治[†], 施建明[‡]

2013 年 11 月

概要

藤重ら [1] は線形計画問題 (LP) に対する新しい解法である, LPB-Newton 法を提案した. 彼らは上下制限約のある LP を扱っており, 問題を関連するゾノトープを導入して再定式化している. 彼らが提案したアルゴリズムは, このゾノトープ上への射影を繰り返し, 有限回の反復で終了することが示されている.

本稿では, 北原・水野・施 [2] が提案した LP に対する LPS-Newton 法を紹介する. 標準形 LP は, 関連する凸錐を用いて置き直すことができる. LPS-Newton 法は, この凸錐上への射影を繰り返し, 有限回の反復で問題を解くことができる.

1 導入

線形計画問題 (LP) は, 全ての数理計画問題の基礎となる問題である. 単体法や内点法は LP を効率的に解くことができ, 後者は多項式時間アルゴリズムである. しかしながら, LP に対する強多項式アルゴリズムが存在するかどうかは, 長い間未解決のままである. この課題を解決するための試みとして, 藤重ら [1] は LP に対する新しいアルゴリズムを提案した. 彼らは, 各変数に上下制限約がある LP を対象としている. 藤重らは新しいアルゴリズムを LP-Newton 法と呼んでいるが, 本稿で紹介するものと区別するため, 以降彼らのアルゴリズムを LPB-Newton 法と呼ぶ. 彼らは関連するゾノトープを導入し, 再定式化している. LPB-Newton 法はこのゾノトープへの射影を有限回繰り返し, 問題を解く. ゾノトープへの射影のために, 藤重らは Wolfe [4] のアルゴリズムを採用している.

本稿では, 北原・水野・施 [2] によって提案された標準形 LP に対する LPS-Newton 法を紹介する. 藤重らの議論は, 標準形 LP に対しても自然に拡張される. 標準形

^{*}東京工業大学大学院社会理工学研究科 〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W9-62
kitahara.t.ab@m.titech.ac.jp

[†]東京工業大学大学院社会理工学研究科 〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W9-58
mizuno.s.ab@m.titech.ac.jp

[‡]東京理科大学経営学部経営学科 〒346-8512 埼玉県久喜市下清久 500 shi@rs.tus.ac.jp

LP は、関連する凸錐を用いて置き直すことができる。LPS-Newton 法は、この凸錐への射影を繰り返して、有限回の反復で問題を解く。射影のためには、例えば Wilhelmsen のアルゴリズム [3] を用いることができる。表 1 に、LPB-Newton 法と LPS-Newton 法の違いをまとめた。

表 1: LPB-, LPS-Newton 法の比較

	LPB-Newton 法	LPS-Newton 法
問題	上下限制約付き LP	標準形 LP
問題の変換	ゾノトープ	凸錐
射影アルゴリズムの例	Wolfe	Wilhelmsen

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節では、まずはじめにゾノトープの定義や LPB-Newton 法について述べる。その後、標準形 LP と関連する凸錐について説明する。第 3 節で、北原・水野・施が提案した標準形 LP に対する LPS-Newton 法を図を交えながら紹介する。

2 LP, ゾノトープ, 凸錐

2.1 ゾノトープと LPB-Newton 法

藤重ら [1] は次の上下限制約付き LP を考えた：

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ & \text{制約条件} && \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & && \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ と $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ は与えられたデータであり、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が変数ベクトルである。

いま,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} \tag{2}$$

として、ゾノトープ $\bar{Z}$ を次のように定める：

$$\bar{Z} = \{\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\} \tag{3}$$

$\bar{Z}$ を使うと、問題 (1) は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && \gamma, \\ & \text{制約条件} && \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \gamma \end{bmatrix} \in \bar{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで γ は実変数である. いま, 次の集合

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \gamma \end{bmatrix} \mid \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad (5)$$

は $\mathbb{R}^{m+1}$ の最後の軸に平行な直線である (図 1 参照). (4) の定式化では, $\bar{Z}$ と L の

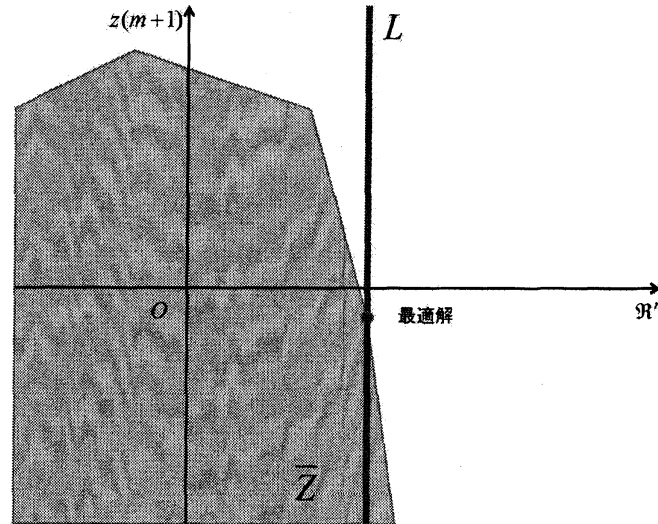


図 1: ゾノトープ $\bar{Z}$ と直線 L

交点のうち, $m+1$ 番目の要素が最大になるものを求めていることになる.

LPB-Newton法では, L 上の点列 $\{\bar{\mathbf{b}}_k\}$ を生成する. まずベクトル $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ を

$$\hat{x}_j = \begin{cases} u_j & c_j > 0 \text{ のとき} \\ l_j & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (6)$$

で計算し, $\gamma_0 = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$ とする. γ_0 は $\bar{Z}$ 上での線形関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ の最大値である. アルゴリズムは, 点 $\bar{\mathbf{b}}_0 = (\mathbf{b}^T, \gamma_0)$ から開始される. LPB-Newton 法の k 回目の反復では, L 上の点 $\bar{\mathbf{b}}_k$ が得られているとして次の操作を行う.

1. $\bar{\mathbf{b}}_k$ からゾノトープ $\bar{Z}$ への射影点 $\bar{\mathbf{z}}_{k+1}$ を計算する.
2. $\bar{\mathbf{z}}_{k+1}$ における $\bar{Z}$ の支持超平面と L との交点を $k+1$ 番目の反復点 $\bar{\mathbf{b}}_{k+1}$ とする.

アルゴリズムの停止条件等, LPB-Newton法の詳細は [1] を参照していただきたい. LPB-Newton 法の反復の様子を図 2 に示した. 初期点 $\bar{\mathbf{b}}_0$ の第 $m+1 (= 2)$ 軸の座標は, ゾノトープ $\bar{Z}$ における線形関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ の最大値である. $\bar{\mathbf{b}}_0$ から $\bar{Z}$ への射影点 $\bar{\mathbf{z}}_1$ を計算する. $\bar{\mathbf{z}}_1$ において $\bar{Z}$ の支持超平面を引き, 直線 L との交点を次の反復点 $\bar{\mathbf{b}}_1$ とする. この例では, $\bar{\mathbf{b}}_2$ が最適解となる.

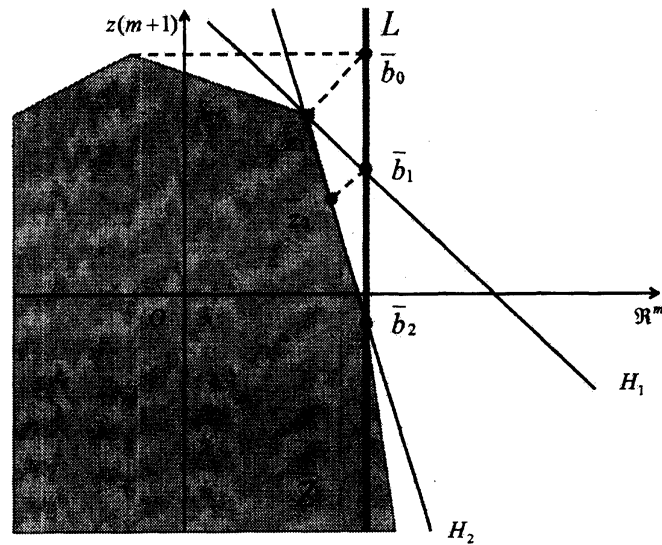


図 2: LPB-Newton 法の反復の様子

ゾノトープへの射影のために、藤重らは Wolfe のアルゴリズム [4] を採用している。このアルゴリズムは、有限個の点の集合 $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ が与えられたときに、 P の凸包上の点で、原点との距離が最小のものを求める (図 3)。アルゴリズムの詳細は、Wolfe [4] を参照していただきたい。

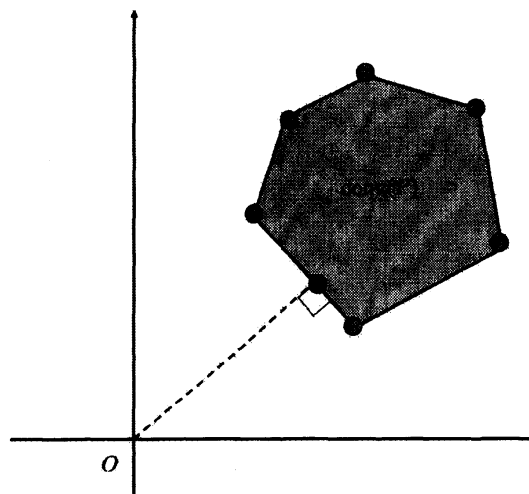


図 3: Wolfe のアルゴリズムの図解

2.2 LP と凸錐

本稿では、次の標準形 LP を考える：

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && c^T x, \\ & \text{制約条件} && Ax = b, \\ & && x \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は与えられたデータであり、 $0 \in \mathbb{R}^n$ はすべての要素が0の n 次元ベクトルを表し、 $x \in \mathbb{R}^n$ が変数ベクトルである。凸錐 $\bar{K}$ を次のように定める：

$$\bar{K} = \{\bar{z} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \bar{z} = \bar{A}x, x \geq 0\}. \quad (8)$$

ここで、 $\bar{A}$ は式 (2) で与えられる。すると問題 (7) は次のように置き直すことができる：

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && \gamma, \\ & \text{制約条件} && \begin{bmatrix} b \\ \gamma \end{bmatrix} \in \bar{K} \end{aligned} \quad (9)$$

LPS-Newton 法では、与えられた点から凸錐への距離が一番小さい点を求めるアルゴリズムが必要になる。より正確には、 $e_1, \dots, e_N \in \mathbb{R}^n$ を与えられたベクトル

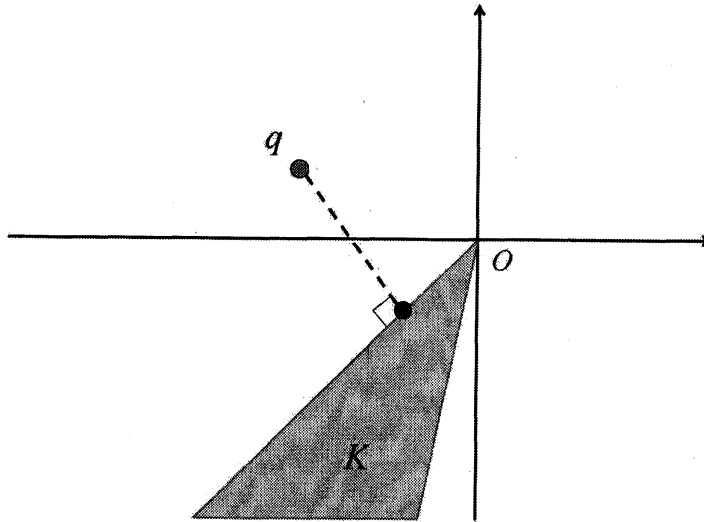


図 4: 与えられた点の凸錐への射影

として、次の凸錐を考える：

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (10)$$

点 $q \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、問題は次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \quad \|q - p\|, \\ & \text{制約条件} \quad p \in K \end{aligned} \tag{11}$$

この問題を解く方法はさまざまあるが、そのうちのひとつとして、Wilhelmsen のアルゴリズム [3] がある。Wilhelmsen のアルゴリズムは、Wolfe のアルゴリズムと深い関係がある。

3 LPS-Newton 法

本節では、LPS-Newton 法について、図を交えながら説明する。まず、LPS-Newton 法の入力と出力は、次のようになる。

- 入力： $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ および十分大きな数 γ_0 .
- 出力：問題 (7) に対する最適解 x^* を得るか、問題 (7) が実行不能である、または最適値が γ_0 よりも大きいと判定する。

$\bar{b}_0 = (b^T, \gamma_0)$ を初期点とし、LPS-Newton 法の k 回目の反復では、 L 上の点 $\bar{b}_k$ が得られているとして次の操作を行う。

1. $\bar{b}_k$ から凸錐 $\bar{K}$ への射影点 $\bar{z}_{k+1}$ を求める。
2. $\bar{z}_{k+1}$ における $\bar{K}$ の支持超平面と L との交点を $\bar{b}_{k+1}$ とする。

アルゴリズムの停止条件等の詳細は、[2] を参照していただきたい。

LPS-Newton 法の反復の様子を図 5 に示した。初期点 $\bar{b}_0$ から $\bar{K}$ への射影点が $\bar{z}_1$ となる。 $\bar{z}_1$ において $\bar{K}$ の支持超平面を引き、 L との交点を $\bar{b}_1$ とする。この例では、 L 上に第 $m+1 (= 2)$ 成分が単調に減少する点列が生成され、 $\bar{b}_2$ が最適解となる。

図 6 には問題が実行不能な場合の LPS-Newton 法の挙動を示した。この例では、凸錐 $\bar{K}$ と直線 L が共有点を持たないので、問題は実行不能である。この場合、 $\bar{b}_0$ から $\bar{b}_1$ に移るときは第 $m+1 (= 2)$ 成分は減少するが、 $\bar{b}_1$ から $\bar{b}_2$ に移るときは第 $m+1 (= 2)$ 成分は増加する。

入力として与える γ_0 は問題に最適解が存在する場合の最適値よりも大きな値であることを想定している。最適値が γ_0 よりも大きい場合は、LPS-Newton 法は 1 反復で終了する。その場合は、 γ_0 の値を増やして再度 LPS-Newton 法を実行することもできる。

アルゴリズムの有限終了性について簡単に述べる。LPS-Newton 法では凸錐 $\bar{K}$ への射影を繰り返すが、 $\bar{K}$ の同じ面に射影されると矛盾が生じることを示せる。そして、 $\bar{K}$ の面の数は有限であるから、LPS-Newton 法は有限回の反復で終了する。証明の詳細については、[2] を参照していただきたい。

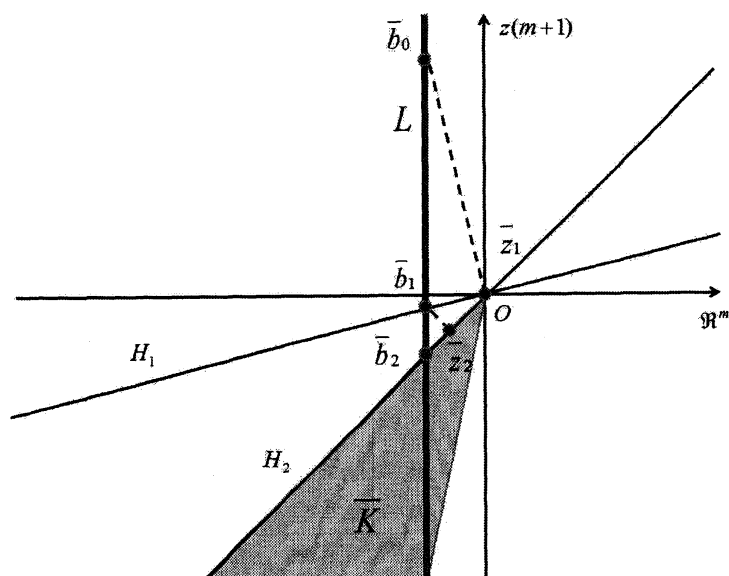


図 5: LPS-Newton 法の反復の様子

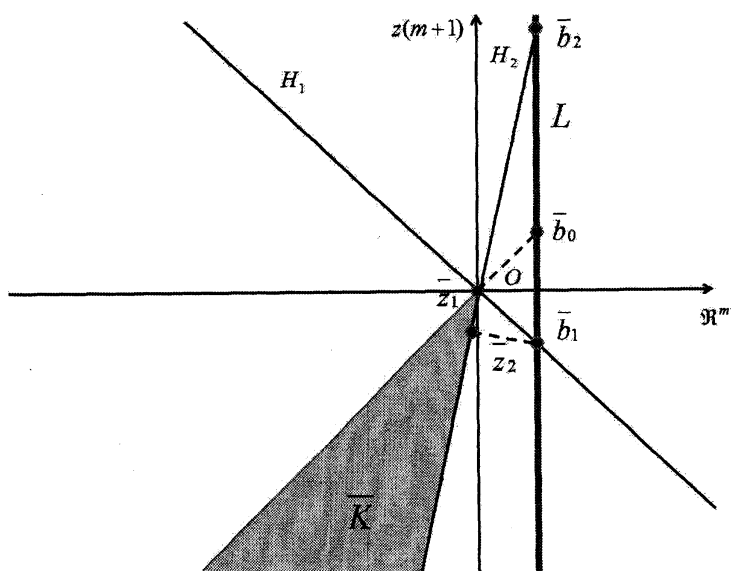


図 6: LPS-Newton 法の反復の様子

謝辞

本研究の一部は、JSPS 科学研究費の若手研究 (B)23710164, 基盤研究 (A)20241038 および基盤研究 (C)23510152 の補助を受けて行われた。

参考文献

- [1] S. Fujishige, T. Hayashi, K. Yamashita and U. Zimmermann, Zonotopes and LP-Newton method, *Optimization and Engineering* 10 (2009) 193-205.
- [2] T. Kitahara, S. Mizuno and J. Shi, The LP-Newton method for standard form linear programming problems, *Operations Research Letters* 41 (2013) 426-429.
- [3] D. R. Wilhelmsen, A nearest point algorithm for convex polyhedral cones and applications to positive linear approximation, *Mathematics of Computation* 30 (1976) 48-57.
- [4] P. Wolfe, Finding the nearest point in a polytope, *Mathematical Programming* 11 (1976) 128-149.