

On the projectively minimal hypersurfaces

熊本大 理 佐々木 武 (T. Sasaki)

1. 射影極小曲面とは

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S が極小とはよく知られているように, S についての汎関数

$$\int_S dA$$

が S で critical, ということだった。面積要素 dA の定義から当然のことであるが, この積分は euclid 運動によって変らない。では, $\mathbb{R}^3$ のかわりに射影空間 $\mathbb{P}^3$, euclid 運動群のかわりに射影変換群を考えると, 事柄はどうなるであろうか。ここで注意すべきことが, 群の次元が大変大きくなることである。ところが, この群についても, 不変な2次微分形式 = 射影面積要素 dP がつくれることが昔から知られていた。([Bla]) だから汎関数

$$\int_S dp$$

を考へることが可能となり, euclid の場合と同様に critical な曲面として射影極小曲面を定義することができ。これは一本 どのようなものかというのが, 実は射影微分幾何とよばれる分野のテーマの1つである。([Tho], [Bol])

ここでは, 射影極小曲面と定める微分方程式をこれまでとは少し違ふ形で求め, いくつかの例と与へること, 大抵的な結果として楕円面の特徴付けと与へることにする。

2. 射影面積要素の定義

一般に $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の超曲面 M^n を考へよう。 M はその上の点の運動の結果として得られると考へると都合がよい。局所的には $\mathbb{R}^{n+2} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ に lift して考へる。 $e_0: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ とおき込みとしよう。各点 $e_0(p)$ での接ベクトルを $e_1(p), \dots, e_n(p)$ とする。 $e_{n+1}(p)$ を $e_0, e_1, \dots, e_n$ とは独立なベクトルとする。これらの組 $e = {}^t(e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ を点 p での射影枠 (proj. frame) とする。 e_0 のとり方が scalar

函数を除いてしか定まらないように e の取り方は不定であるが、その不定性は群

$$\left\{ g = \begin{pmatrix} \overset{1}{x} & \overset{n}{0} & \overset{1}{0} \\ e & a & 0 \\ \mu & c & \nu \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} \{1\} \\ \{n\} \\ \{1\} \end{matrix} \quad \text{aut } g = 1 \}$$

にはいることはみやり。任意の別の frame は ge として得られる。以下 g によって量を定義することを目的である。

$e = (e_\alpha)$ は次の運動方程式とみえる。

$$de_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta.$$

(慣用によつて上下対称な indices についてはお知らせとるものとする。index の範囲は $0 \leq \alpha, \beta, \dots \leq n+1$, $1 \leq i, j, \dots \leq n$ と区別する) $\omega = (\omega_\alpha^\beta)$ は $sl(n+2)$ に値をとる 1 次微分式で "Maurer-Cartan form" とよばれる。それは完全積分条件

$$d\omega = \omega \wedge \omega$$

とみえる。frame (e_α) と別の frame $(\tilde{e}_\alpha)$ にはつぎのと

$$(\tilde{e}_\alpha) = g(e_\alpha), \quad d\tilde{e} = \tilde{\omega} \tilde{e}$$

$$\tilde{\omega} = dg \cdot g^{-1} + g \omega g^{-1}$$

と変化する。 $= z'$,

$$\omega_0^{n+1} = 0 \quad \text{及} \quad v^n$$

$$\{\omega_0^1, \dots, \omega_0^n\} \quad \text{は} \quad 1\text{-次元}$$

に注意しよう。最初の式より

$$0 = d\omega_0^{n+1} = \omega_0^i \wedge \omega_i^{n+1}$$

である。仮定的に $\omega^i = \omega_0^i$ とかくと、これらの1次独立性により

$$\omega_i^{n+1} = h_{ij} \omega^j, \quad h_{ij} = h_{ji}$$

とかけ、さういふ "テンソル" h_{ij} の共変微分と

$$h_{ijk} \omega^k = dh_{ij} - h_{ik} \omega_j^k - h_{kj} \omega_i^k + (n+2)(\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1}) h_{ij}$$

によって定める。 (h_{ijk} は対称) そして

$$F = \|h_{ijk}\| = (h_{ijk} h_{pqr} h^{ip} h^{jq} h^{kr})^{1/2}$$

とおく。 r は i に対し $(h^{ij}) = (h_{ij})^{-1}$ 。 すると

(1). 2次形式 $h_{ij} \omega^i \omega^j$ 及び 3次形式 $h_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k$ は
scalar 倍を除いて e のとり方によらない。

ことがわかり、 " $h_{ij} \omega^i \omega^j$ が退化しない" という性質は射影的性質であり、次下で仮定しよう。(これは曲面の通常の意味での第2基本形式が退化しないことと同義) このとき

(2). $F^2 h_{ij} \omega^i \omega^j$ は曲面上の不変2次形式である。

ことが示される。従って

$$dP = F^n (\det h_{ij})^{1/2} \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n$$

は e のとり方によらない体積要素となる。これから射影極小性が定義されるのは直の通り。ただし、一般には $F \neq 0$ とは限らず、 $F = 0$ となる $t = 3$ で、 dP は退化してしまふ。恒等的に $F = 0$ となるのは曲面が二次曲面になるべきであることと注意しておこう。

B. 微分方程式

次に M_t と (局所的) 曲面 M の変形としよう。

t はパラメーター。 $M_0 = M$ 。方程式

$$\frac{d}{dt} \int_{M_t} dP \Big|_{t=0} = 0$$

を M の幾何的ปริมาณを使ってかきなおしたい。その為、(かつ便宜的に) $\omega_0^\alpha = 0$ となる frame ととることにし (いつも可能)

$$h_{ij} \omega_{n+1}^j =: l_{ij} \omega^j$$

とおく。 l_{ij} は対称であり "affine 平均曲率" とよばれている。長々計算の結果わかることは、

(3). $n=2$ のとき, M が射影極小とは微分方程式

$$(\#) \quad \Delta l = \|l_{ij} - l h_{ij}\|^2$$

が成り立つことである。 $r=r \cup l = \frac{1}{2} \text{trace}_g l_{ij}$,

Δ は $h_{ij} \omega^i \omega^j$ についてのラプラスアンである。

$n \geq 3$ では方程式の形はもっと複雑になる。その性質を述べるため, $(h_{ij}) > 0$, i.e. M が局所的に強い意味で凸, とし affine を標 $(x^1, \dots, x^{n+1})$ によつて $\{x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)\}$ とかけられているとする。このとき

$$h_{ij} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad (\lambda \text{ is scalar})$$

であり, l_{ij} は f の 4 次までの微分を使って表わされる。従つて方程式 $(\#)$ は f についての 6 階の楕円型非線形方程式となる。主要部は triply harmonic である。 $n \geq 3$ では 6 階楕円性は変わらないが, 主要部は少し複雑になる。

4. 射影極小超曲面の列

(#) 式の右辺に現れる作用素 $l_{ij} - l h_{ij}$ には幾

何の意味が知られている。おなわち 方程式

$$L_{ij} = \lambda h_{ij}$$

をみたす曲面は affine 球面とよばれる曲面に等しい。

euclid の場合には, L_{ij} を shape operator, h_{ij} を metric tensor と思つて上式は euclid 球面と定めていゝことからきこえる。一方, affine 球面についてはいくちよく知られている ([Ca1], [Pog], [Sas])。そのことから

(4). $m=2$ なら affine 球面は射影極小である。

及び

(5). $\mathbb{P}^3$ 内の 射影極小な強い意味で凸な
曲面は楕円面に限る。

が示される。 $n \geq 3$ では方程式の性質が少し変つて述べたように, affine 球面だからといって射影極小とは限らない。「affine 球面かつ affine 変換群について等質であり, 計量 $h_{ij} \omega^i \omega^j$ が einstein であれば射影極小である」ことが証明できる。この典型例が $\{x^1, \dots, x^{n+1} = 1\}$ で与えられる曲面である。

次の問題とあげておきたい。

問. $n \geq 3$ のとき (5) を示せ。

この問には affine 版がある。[Ca2] と参照して
置きたい。幾何にあらわれる非線形の面白き問題と
思う。

その他の (余り多くはない) 例, 及び省略し
た計算については [Sas2] とごらんいただきたい。

- [Bla] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Springer 1923
- [Bol] G. Bol, Projektive Differentialgeometrie 1-3, Vandenhoeck & Ruprecht
1950-1967.
- [Cal1] E. Calabi, Complete affine hyperspheres, Symp. Math. 10(1972), 19-38.
- [Cal2] E. Calabi, Hypersurfaces with maximal affinely invariant area, Amer.
J. Math. 104(1982), 91-126.
- [Pog] A.V. Pogorelov, On the improper convex affine hyperspheres, Geom. Ded.
1(1972), 33-46.
- [Sas1] T. Sasaki, Hyperbolic affine hyperspheres, Nagoya Math. J. 77(1980),
107-123.
- [Sas2] T. Sasaki, On a projectively minimal hypersurface in the unimodular
affine space, Geom. Ded. 23(1987), 237-251.
- [Tho] G. Thomsen, Sulle superficie minime proiettive, Ann. di Math. (IV) 5
(1928), 169-184.