

境界条件をもった確率微分方程式

京大理 渡辺信三

§1. 序

1次元の拡散過程については、Feller 及び Ito-McKean の研究によつて、完全なことがわかつてゐる ([6])、一方多次元の拡散過程に関しても多くの研究がなされてゐるが1次元のときのような完全な結果を導くことは困難である、今日では多次元拡散過程の研究は色々な立場から(それぞれや、異なる、た問題意識のものに)多面的になされてゐる、

多次元拡散過程の研究において基本的なものは、まず一般の多次元拡散過程はどれだけあり、それを特徴づける量は何か”という問題 及び”これらの量をあたへたとき多次元拡散過程が実際に存在することを示しその性質を研究すること”である、前者については、Kolmogorov, Feller らの研究と Wentzell [16] の研究により、大ざっぱにいつて、適当な正則条件の

2

$$\bar{D} = D \cup \partial D$$

そこで、境界をもつ n 次元多様体上の拡散過程は次に示す (A, L, p) で決定されることがわかる、ここで A は $\bar{D}$ 上の 2 階楕円型 (degenerate するかもしれない) 微分作用素; すなわち manifold $\bar{D}$ の local coordinate を座標近傍 U

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in D \cap U \iff x^1 > 0$$

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \partial D \cap U \iff x^1 = 0$$

なるように示すとき,

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x)u, \quad x \in \bar{D}$$

とあらわされるもの, (但し $a^{ij}(x)$: non-negative definite, $c(x) \leq 0$)

L は $\bar{D}$ で定義された (滑らかな) 関数を ∂D で定義された関数にうつす作用素で

$$\begin{aligned} Lu(x) = & \sum_{i,j=2}^n \alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=2}^n \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + \gamma(x) \cdot u + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial x^1} \\ & + \int_{\bar{D} \setminus \{x\}} [u(y) - u(x) - I_U(y) \cdot \sum_{i=2}^n (y^i - x^i) \frac{\partial u}{\partial x^i}(x)] n_x(dy), \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

とあらわされるもの ($\alpha^{ij}(x)$: non-negative definite, $\gamma(x) \leq 0$, $\mu(x) \geq 0$)

又, p は境界上で定義された non-negative な関数; $p(x) \geq 0, x \in \partial D$,

(A, L, p) であるという意味は拡散過程 (に対応する半群)

の生成作用素が differential operator A with domain

$$D(A) = \{ u \in C^2(\bar{D}); \quad Lu = p \cdot Au \text{ on } \partial D \}$$

の extension になる, ということがある. 条件 $Lu = p \cdot Au$

を Wentzell の境界条件という、そこで後者の問題は (A, L, ρ) をあたえたとその生成作用素 $A, D(A)$ の拡張になる、
 ているような拡散過程が一意的に存在するか、ということになる、この問題は Sato-Ueno [10] により、その解決の基本的な筋道があたえられ、いくつかの場合に具体的に拡散過程が構成せられた、さらに Bony-Courège-Prignet [11] は、種々の解析の結果を援用することにより (Schauder estimate, compact perturbation の理論)、かなり一般的な (A, L, ρ) のクラスに対し Sato-Ueno の理論が実際に適用可能で、したがって拡散過程が構成できることを示した、(Sato-Ueno の理論については [9] によくまとめられている)

一方このような拡散過程の構成において「確率論的方法」が知られており、その代表的なものに伊藤清の確率微分方程式の理論、Dynkin や Ito-McKean などによる確率過程の変換理論がある、これは、まず半群を構成しそれから Markov 過程を構成する、といういわゆる解析的方法と異なり、Wiener 測度や Poisson 測度などのよく知られた (函数空間上の) 測度から出発してそれに種々の変換を加えて求める拡散過程の軌跡の測度 (分布) を得ようというものである、伊藤の理論においては (本質的には同じことであるが) 軌跡の測度を求めるというより軌跡 (= path) そのものを作るというニュアンスが強い、最近の Strook Varadhan [12] [13] は path-space の測度を求めるという立場のより強い問

4

題の定式化を行なうた。その定式化にしたがうと今の (A, L, P) に対応する拡散過程を求める問題は次のようになる;

$\mathbb{D}_{\bar{D}}[0, \infty) = \{ \text{ } [0, \infty) \text{ 上で定義され } \bar{D} \cup \{0\} \text{ の値をとる連続かつ左極限をもつ函数の } w \text{ の全体} \}$ とする,

$\{ \mathbb{D}_{\bar{D}}[0, \infty) \text{ 上の確率測度の系 } \{ P_x \}_{x \in \bar{D}} \}$ を

$$P_x \{ w : w(0) = x \} = 1 \quad \text{かつ} \quad \text{任意の } f \in C^1(\bar{D}) \text{ に対し}$$

$(f(x) = 0 \text{ として } \bar{D} \cup \{0\} \text{ へ拡張し})$

$$f(w(t)) - f(w(0)) = \text{a martingale} + \int_0^t I_D(w(s)) A f(w(s)) ds + \int_0^t L f(w(s)) d\varphi_s$$

と分解されるようなものを求めその一意性を示すこと、但し

φ_t は P_x -a.s. に t の連続、非減少函数で

$$\int_0^t I_D(w(s)) d\varphi_s = \varphi_t, \quad \int_0^t I_D(w(s)) ds = \int_0^t P(w(s)) d\varphi_s$$

となるもの。」

この Strook - Varadhan の formulation は一般的で、ある場合に便利
なことが多い。しかし伊藤による確率微分方程式による定式
化がもし可能ならば、この方が多くの点で優れていることは十
分認めうることである。事実伊藤の formulation にみられた path
のよりデリケートな分析が Strook - Varadhan の formulation では消
えてしまっている (もちろん一般論よりこのギャップをどうやることは
そう困難では無いが)、そこで我々は、より伊藤に近い立場
でこの構造を確率微分方程式を用いて論じたい。この立場の
研究には Ikeda [2] があり、2次元における Wentzell の境界条件

作をみなす拡散過程の構成が確率微分方程式で用いられている。たゞ残念なことにこの Ikeda の優れた研究は $n \geq 3$ 次元に拡張できないので、ここでは Ikeda の idea にいくつかの別の idea (これらの一つの重要なものは, Skorohod [11] による反射壁拡散過程の確率微分方程式の考え方) をつけ加えて一般次元の拡散過程の構成を論じたい。

尚、我々が以下であつたのは上の (A, L, P) で $\alpha(x) \equiv 0$,

$\gamma(x) \equiv 0$, $n_x(dy) \equiv 0$, $\mu(x) > 0$ の場合, するわけ完全是 jump がなく (killing と Δ の jump と考えられる), いたるところで反射のある場合である。境界から境界への jump も同様にあつたことが記号が面倒になるので論じない, 又 Strook-Varadhan [13] ではこの仮定以外にさらに $\alpha_j(x) \equiv 0$ として (上の彼等の定式化したから、) この問題を論じている、彼等の場合は係数の正則性の条件が非常によわめられてゐるのが重要なポイントの一つであるが、他方 Q_j が degenerate してよいという点では以下の我々の仮定のちがうとよわめられてゐることを注意しておきたい。

§2 確率微分方程式による定式化.

確率微分方程式の理論においてよく知られてゐる様に、manifold 上の diffusion の path を構成するには、local に

各座標近傍において $\mu_{\alpha k}$ を構成しそれをつないでいけばよい, (例えば McKean [8] 参照), 座標近傍が全く内部にあるときは通常の伊藤の理論で間に合うので結局境界の近傍での $\mu_{\alpha k}$ の構成が問題である. したがって我々は始めから n 次元空間の上半空間 $R_+^n = \{x = (x^1, x^2, \dots, x^n) : x^1 > 0\}$ を考えこれを D とする. したがって $\bar{D} = \{x = (x^1, \dots, x^n) : x^1 \geq 0\}$,

$$\partial \bar{D} = \{x = (0, x_2, \dots, x_n)\} \quad (0, x_2, \dots, x_n) \text{ と } (x_2, \dots, x_n) \text{ とを同一}$$

視することとしはしはあまる, 又 $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ に対し

$$\tilde{x} = (x^2, x^3, \dots, x^n) \text{ の記号を用いる ; } x = (x^1, \tilde{x})$$

次の $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ があたえられたとする,

$$(i) \quad \sigma = (\sigma_k^i)_{i,k=1}^n : \bar{D} \longrightarrow R^n \otimes R^n (= n \times n \text{-real matrix の全体})$$

有界かつ Borel measurable

$$b = (b^i)_{i=1}^n : \bar{D} \longrightarrow R^n$$

有界かつ Borel measurable

$$(ii) \quad \tau = (\tau_k^i)_{i,k=2}^n : \partial D \longrightarrow R^{n-1} \otimes R^{n-1}$$

有界かつ Borel measurable

$$\beta = (\beta^i)_{i=2}^n : \partial D \longrightarrow R^{n-1}$$

有界かつ Borel measurable

$$(iii) \quad \rho : \partial D \longrightarrow [0, \infty)$$

有界かつ Borel-measurable

(正規化して $\mu(\tilde{x}) \equiv 1$ としよ, x のおりに定義を与える)

まず $P \equiv 0$ (non-sticky case) の確率微分方程式を
次のように与える:

$$(1) \quad \begin{cases} dx_t^1 = \sigma^1(x_t) dB_t + b^1(x_t) dt + \varphi_t \\ dx_t^i = \sigma^i(x_t) dB_t + b^i(x_t) dt + \tau^i(\tilde{x}_t) dM_t + \beta^i(\tilde{x}_t) d\varphi_t, \\ \quad i = 2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

ここで $x_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n)$, $\tilde{x}_t = (x_t^2, \dots, x_t^n) (\sim (0, x_t^2, x_t^3, \dots, x_t^n)$

と同-視する), $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n)$, $M_t = (M_t^2, M_t^3, \dots, M_t^n)$.

$$\text{又} \quad \sigma^i(x_t) dB_t = \sum_{k=1}^n \sigma_k^i(x_t) dB_t^k, \quad \tau^i(\tilde{x}_t) dM_t = \sum_{k=2}^n \tau_k^i(\tilde{x}_t) dM_t^k$$

$i = 1, 2, \dots, n$ とする.

(1) の直観的意味は次のとおりである: φ_t は x_t の $\partial D = \{x^1 = 0\}$ に与える local time で (すなわち $x_t \in \partial D$ のときのみ増加する continuous process) により x_t の ∂D での反射をひき起こす、 B_t は n -次元 Brown 運動、 M_t は $x_t \in \partial D$ のときのみ変化する境界上の $(n-1)$ -次元 Brown 運動であるが、その時間は local time φ_t による時計で測る、 $\tau^i(\tilde{x}_t) dM_t + \beta^i(\tilde{x}_t) d\varphi_t$ が境界上の random motion を与える。

さて (1) の明確な定義をあたえよう。以下に $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ とかくのは次のような四つ組のことである;

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ はある確率空間,

(ii) $\mathcal{F}_t$ は $\mathcal{F}$ の sub σ -fields の系で ($t \in [0, \infty)$), 右連続かつ increasing, i.e., $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ ($t < s$) かつ $\mathcal{F}_{t+0} \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$ が $\mathcal{F}_t$ と ($\forall t \geq 0$) 一致する。

かなりたつ, $\tilde{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^n)$ かつ $\int dB, \int dM$ は martingale に関する stochastic integral (Itô の stochastic integral の一般の martingale への拡張については [7] を見よ) である.

注意 1. 上の (iii) より, $(B_t, \mathcal{F}_t)$ は n 次元 Brown 運動 ($\mathcal{F}_t$ を含めたのは, $B_t - B_s$ と $\mathcal{F}_s$ が independent であることを強調するため, $t > s$) である. 又 M_{φ_t} も $(n-1)$ 次元 Brown 運動である. (例えば [7] を見よ.)

次に一般に P が 0 でない場合 (sticky case) の確率微分方程式を考えよう. これを次のように与える;

$$(2) \quad \begin{cases} dx_t^1 = \sigma^1(x_t) I_D(x_t) dB_t + b^1(x_t) I_D(x_t) dt + \varphi_t \\ dx_t^i = \sigma^i(x_t) I_D(x_t) dB_t + b^i(x_t) I_D(x_t) dt + \tau^i(\tilde{x}_t) dM_t \\ \quad + \beta^i(\tilde{x}_t) d\varphi_t, \\ \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ I_{\partial D}(\tilde{x}_t) dt = P(\tilde{x}_t) d\varphi_t \end{cases}$$

Definition 2 確率微分方程式 (2) の solution (又は $[\sigma, b, \tau, \beta, P]$ に対応する solution) とは, ある $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上で与えられた stochastic processes の family $\mathcal{X} = (x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n), B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n), M_t = (M_t^2, \dots, M_t^n), \varphi_t)$ であつて, 次の性質をもつもののことである.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{array} \right\} \text{Def. 1 と同じ}$$

(iv) P -a.s. に,

$$(2)' \left\{ \begin{array}{l} x_t^1 = x_0^1 + \int_0^t \sigma^1(x_s) I_D(x_s) dB_s + \int_0^t b^1(x_s) I_D(x_s) ds + \varphi_t \\ x_t^i = x_0^i + \int_0^t \sigma^i(x_s) I_D(x_s) dB_s + \int_0^t b^i(x_s) I_D(x_s) ds + \int_0^t \tau^i(\tilde{x}_s) dM_s \\ \quad + \int_0^t \beta^i(\tilde{x}_s) d\varphi_s, \\ \quad i = 2, 3, \dots, n \\ \int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s) ds = \int_0^t \rho(\tilde{x}_s) d\varphi_s \end{array} \right.$$

注意 2. Def. 2 で $P \equiv 0$ としたとき (2) の始めの 2 式において $I_D(x_t)$ をはきいてより (1) と同じ方程式をよめる。しかし付帯条件 $\int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s) ds = 0$ がつくので (1) と同値にはならない。すなわち (1) は (2) で $P \equiv 0$ とした特別な場合と考えることは出来ない。そのため (1) と (2) を区別して定義したのである。結果的には (1) の場合には必ず $\int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s) ds = 0$ となり (2) の特別な場合になる。

注意 3 (1) のとき, $\forall f \in C^2(\bar{D})$ に対し確率積分の公式 (Itô の公式の一般化, [7] を参照) を用いると,

$$f(x_t) - f(x_0) = \text{a martingale} + \int_0^t A f(x_s) ds + \int_0^t L f(\tilde{x}_s) d\varphi_s$$

こゝで

$$Af(x) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$(a^{ij}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^i \sigma_k^j)$$

$$Lf(\tilde{x}) = \sum_{i,j=2}^n \alpha^{ij}(\tilde{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=2}^n \beta^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

したがって x_t の path space 上の分布は, 上の Stroock-Varadhan の問題の解になっている.

(2) のときは,

$$\begin{aligned} f(x_t) - f(x_0) &= \text{a martingale} + \int_0^t Af(x_s) I_D(x_s) ds + \int_0^t Lf(\tilde{x}_s) d\varphi_s \\ &= \text{a martingale} + \int_0^t Af(x_s) ds + \int_0^t Lf(\tilde{x}_s) d\varphi_s - \int_0^t I_D(\tilde{x}_s) Af(x_s) ds \\ &= \text{a martingale} + \int_0^t Af(x_s) ds + \int_0^t (Lf(\tilde{x}_s) - (P \cdot Af)(\tilde{x}_s)) d\varphi_s \end{aligned}$$

となる.

次に上で定義された解の"一意性"の概念を定義しよう. 通常の"path 上の一意性"を定義することは難おしく又あまり必要もないと思われるのでここでは普通の"分布の意味の一意性"を定義する.

Definition 3 (Uniqueness) (1) または (2) に対して uniqueness かなりたつというのは, 任意の 2 つの solutions $X = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$, $X' = (x'_t, B'_t, M'_t, \varphi'_t)$ (異なる確率空間上で定義されていても

ii) で、 対 $x \in \bar{D}$ に対し $x_0 = x$ a.s., $x'_0 = x$ a.s.
 となるものに対し、 x_t と x'_t の $W, \mathcal{B}(W)$ 上の分布が等し
 いこと、 ここで $W = C_{\bar{D}}[0, \infty)$; $\bar{D}$ の値をとる $[0, \infty)$ 上の
 連続函数の全体に compact uniform topology を与えた Fréchet
 space. $\mathcal{B}(W)$ は $\mathcal{X}$ の topological Borel field.

Proposition 1. (1) (又は (2)) に対して任意の $\bar{D}$ 上の分布 μ
 に対し $P(x_0 \in dx) = \mu(dx)$ とする solution が存在すると仮定
 する. 又 Def. 3 の意味の solution の uniqueness がなりたつと仮
 定する. このとき、 $\mu = \delta_x$ としたときの x_t の分布を P_x とかく
 と、

① $x \mapsto P_x(B)$, ($\forall B \in \mathcal{B}(W)$) は universally measurable

② $\{P_x\}$ は strong Markov

である. 特に μ に対応する x_t の分布 Q は unique に

$$\text{きまり} \quad Q(B) = \int_{\bar{D}} \mu(dx) P_x(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(W)$$

で与えられる.

証明は、大筋において通常の確率微分方程式の場合 (例え
 ば [12]) と同様である;

今 $\mathcal{X}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の solution とする. 一般性を
 失うことなく $(\Omega, \mathcal{F})$ はいわゆる standard space ([5]) であるとし
 る. σ を $\mathcal{F}_t$ -stopping time, $\mathcal{F}_\sigma$ をいつものように定義し

$P_{\omega'}(\cdot) \equiv P(\cdot | \mathcal{F}_\sigma)$ を $\mathcal{F}_\sigma$ を与えたときの regular conditional distribution とする. 次に $\tilde{X}_t = X_{t+\sigma}$, $\tilde{B}_t = B_{t+\sigma} - B_\sigma$, $\tilde{M}_t = M_{t+\sigma} - M_\sigma$, $\tilde{\varphi}_t = \varphi_{t+\sigma} - \varphi_\sigma$, $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+\sigma}$ とおく. このとき a. a. $\omega'(P)$ に対し $P_{\omega'}(\tilde{X}_0(\omega) = X_\sigma(\omega')) = 1$ であり. 又 $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{X}_t, \tilde{B}_t, \tilde{M}_t, \tilde{\varphi}_t)$ は solution on $(\Omega, \mathcal{F}, P_{\omega'}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ である. このことは regular conditional distribution の定義と Doob の optional sampling theorem (martingale の time change の理論) より容易に確かめることができる. そうすると

$$P_{\omega'}(\tilde{\mathcal{X}} \in B) = P_{X_\sigma(\omega)}(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(W), \quad \text{a. a. } \omega'(P).$$

これは $\{P_x\}$ の強マルコフ性を意味する.

この Proposition により, 任意の初期分布に対する (1) または (2) の解が構成できしかつその uniqueness を示すことができれば, $\bar{D}$ 上の (A, L, ρ) に対応する拡散過程が得られたことになる.

§3 存在と一意性

$[\sigma, b, \tau, \beta]$ に次の仮定をおく

Assumption. σ, b, τ, β は有界かつ Lipschitz 連続.
かつ $|\sigma'(x)| = \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k'(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \exists c > 0$. ρ は有界 Borel 可測.

このとき次の定理を示すことができる.

Theorem. $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ はこの assumption をみたすとする.

このとき確率微分方程式 (1) 及び (2) は任意の $\bar{D}$ 上の Borel probability measure (これを単に $\bar{D}$ 上の分布と呼ぶ) μ に対し $P(x_0 \in dx) = \mu(dx)$

となる solution をもつ. 又 Def. 3 の意味の uniqueness がなりたつ.

以下でこれを次の順序で証明する

- (1°) 方程式 (1) で $\sigma_1^1(x) \equiv 1$, $\sigma_k^1(x) \equiv 0$, $k=2, 3, \dots, n$, $b^1(x) \equiv 0$ のとき
- (2°) 方程式 (1) の一般の場合.
- (3°) 方程式 (2) の場合

- (1°) 方程式 (1) において $\sigma_1^1(x) \equiv 1$, $\sigma_k^1(x) \equiv 0$, $k=2, 3, \dots, n$, $b^1(x) \equiv 0$ の場合.

まず 存在 について,

μ を $\bar{D}$ 上の任意の分布としある probability space

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に $\{x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n), B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n), \hat{B}_t = (\hat{B}_t^2, \hat{B}_t^3, \dots, \hat{B}_t^n)\}$ を次のように与える.

- 1) x_0 は $\bar{D}$ の値をとる random variable 2. x の分布は μ ,
- 2) B_t は n -dimensional Brownian motion,
- 3) $\hat{B}_t$ は $(n-1)$ -dimensional Brownian motion,
- 4) これらはすべて互いに独立,

次に φ_t, x_t^1 を次のように定義する;

$$(1.1) \quad \varphi_t = \begin{cases} 0 & , t \leq \sigma_0 \equiv \inf \{t; B_t^1 + x_0^1 = 0\} \\ -\min_{\sigma_0 \leq s \leq t} [B_s^1 + x_0^1] & , t > \sigma_0 \end{cases}$$

$$(1.2) \quad x_t^1 = x_0^1 + B_t^1 + \varphi_t$$

この φ_t を用いて $M_t \in$

$$(1.3) \quad M_t = \hat{B} \varphi_t$$

で定義し, 又 $\mathcal{F}_t' = \sigma \{x_0, B_s, M_{s'}, 0 \leq s, s' \leq t\}$ とおき $\mathcal{F}_t$ を

$$(1.4) \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_n \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}'$$

で定義する. 容易にわかるように $\{B_t, M_t\}$ は $(\mathcal{F}_t, P)$ -martingales の system で Def 1 の (iii) を満たす. 又 φ_t は

$x_t^1 = 0$ となるときのみ増加する process である. 故に $\hat{x}_t = (x_t^2, \dots, x_t^m)$

が定義できるのはよいが, x のために一般に $\mathcal{F}_t$ に adapt した

continuous process $\tilde{y}_t = (y_t^2, y_t^3, \dots, y_t^m)$ に対し同様の process

$\Phi \tilde{y}_t = (\Phi y_t^2, \dots, \Phi y_t^m)$ を次のように定義する;

$$(1.5) \quad (\Phi y)_t^i = x_0^i + \int_0^t \sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s) dB_s + \int_0^t b^i(x_s^1, \tilde{y}_s) ds \\ + \int_0^t \tau^i(\tilde{y}_s) dM_s + \int_0^t \beta^i(\tilde{y}_s) d\varphi_s, \quad i=2, 3, \dots, m.$$

今

$$(1.6) \quad A_t = t + \varphi_t,$$

γ の逆函数 τ A_t^{-1} とあるから、

$$(1.7) \quad A_t^{-1} = \inf \{u : A_u > t\}.$$

Lemma $\forall T > 0, \exists K = K(T) > 0$ such that

$$E \{ |\Phi \tilde{y} - \Phi \tilde{y}'|^2 (A_t^{-1}) \} \leq K \int_0^t E \{ |\tilde{y} - \tilde{y}'|^2 (A_s^{-1}) \} ds$$

Proof. $\Phi \tilde{y} - \Phi \tilde{y}' \equiv Z = (Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^n)$ とおく.

$$\begin{aligned} Z_t^i &= \int_0^t [\sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - \sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s')] dB_s \\ &\quad + \int_0^t [b^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - b^i(x_s^1, \tilde{y}_s')] ds \\ &\quad + \int_0^t [\tau^i(\tilde{y}_s) - \tau^i(\tilde{y}_s')] dM_s \\ &\quad + \int_0^t [\beta^i(\tilde{y}_s) - \beta^i(\tilde{y}_s')] d\varphi_s \end{aligned}$$

$$\equiv I_1^i(t) + I_2^i(t) + I_3^i(t) + I_4^i(t)$$

とおく. $I_1^i(t) + I_3^i(t)$ は martingale とあるから任意の有限な

$\mathcal{F}_t$ -stopping time σ に対し,

$$\begin{aligned} &E \{ |Z_\sigma^i - I_2^i(\sigma) - I_4^i(\sigma)|^2 \} \\ &= E \{ |I_1^i(\sigma) - I_3^i(\sigma)|^2 \} \\ &= E \left\{ \int_0^\sigma |\sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - \sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s')|^2 ds \right\} \\ &\quad + E \left\{ \int_0^\sigma |\tau^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - \tau^i(x_s^1, \tilde{y}_s')|^2 d\varphi_s \right\} \end{aligned}$$

σ, τ の Lipschitz 連続性より 定数 K_1 が存在して この式は

$$\leq K_1 E \left\{ \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 ds + \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 d\varphi_s \right\} \\ = K_1 E \left\{ \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s \right\}$$

と評価できる.

又 b, β の Lipschitz 連続性と Schwarz の不等式より容易に
ある定数 K_2, K_3 に対して

$$E \{ |I_2^{\tilde{y}}(\sigma)|^2 \} \leq K_2 E \left\{ \sigma \cdot \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 ds \right\} \\ E \{ |I_4^{\tilde{y}}(\sigma)|^2 \} \leq K_3 E \left\{ \varphi_\sigma \cdot \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 d\varphi_s \right\}$$

と評価できる. 故に

$$E \{ |I_2^{\tilde{y}}|^2 \} \leq K_4 E \left\{ (1 + A_\sigma) \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s \right\}.$$

ここに K_4 は $y, \tilde{y}$ や σ に無関係な定数である. 故に定数
 K_5 が存在して,

$$E \{ |\mathbb{E}\tilde{y} - \mathbb{E}\tilde{y}'|^2(\sigma) \} \leq K_5 E \left\{ (1 + A_\sigma) \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s \right\}.$$

$\chi = 2, T > 0$ を fix し, $\sigma = A_t^{-1}, t \in [0, T]$ とおく. 容
易にわかるように σ は $\mathcal{F}_t$ -stopping time で

$$\sigma \leq t \leq T, \quad \varphi_\sigma \leq t \leq T$$

であるので, 結局 $K = K(T)$ が存在し

$$E \{ |\mathbb{E}\tilde{y} - \mathbb{E}\tilde{y}'|^2(A_t^{-1}) \} \leq K E \left\{ \int_0^{A_t^{-1}} |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s \right\} \\ = K E \left\{ \int_0^t |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 (A_s^{-1}) ds \right\} \\ = K \int_0^t E \{ |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 (A_s^{-1}) \} ds \\ \quad \quad \quad (\text{Lemma 証明})$$

18

$$x = \tilde{x}_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

を

$$\begin{cases} \tilde{x}_0(t) \equiv \tilde{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m), \\ \tilde{x}_k(t) = (\Phi \tilde{x}_{k-1})(t) \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

で定義する. Lemma により

$$E \{ |\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}|^2 (A_t^{-1}) \} \leq K \int_0^t E \{ |\tilde{x}_{k-1} - \tilde{x}_{k-2}|^2 (A_s^{-1}) \} ds$$

であり, この評価を用いると通常の確率微分方程式と全く同様の議論 (例えば 伊藤 [3]) により,

$$\tilde{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t)$$

が a.s. に存在しこの収束が t について各有界区間上で一様になることが結論される.

$$x(t) = (x^1(t), \tilde{x}(t))$$

と書くとき $x = (x(t), B(t), M(t), \varphi_t)$ が $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の solution になることは見易い. しかも構作のしかたから

$$F(x, w_1, w_2) = (x, w_1, w_2) \in \bar{D} \times \mathbb{C}_{R^n}[0, \infty) \times \mathbb{C}_{R^{n-1}}[0, \infty)$$

$$\leadsto F \in \mathbb{C}_{\bar{D}}[0, \infty)$$

なる函数がある.

$$x_t = F(x_0, B., M.) \quad \text{a.s.}$$

なることもあきらかである.

次に一意性を示す.

そのために $x = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を与えられた solution と

あるとき (x_0, B, M) の分布が x_0 の分布 μ から一意的に定まることをまず証明する.

最初に方程式 (1) の第 1 式は

$$dx_t^1 = dB_t^1 + d\varphi_t$$

であり Def. 1 の (ii) と合せて x_t^1, φ_t は (x_0^1, B_t^1) から一意的に定まり、これは (1.1) (1.2) で与えられることを注意する、これは Skorohod [11] の重要な結果の一つである (又は McKean [8] 参照). 次に, (x_0, B) と独立な $(n-1)$ 次元 Brownian motion $\hat{B}$ が存在して

$$M_t = \hat{B} \varphi_t$$

とかけることをいう、これがいえるのは (x_0, B, M) の分布が x_0 の分布から一意に定まることは明らか.

このため φ_t は一次元反射壁 Brown 運動の 0 での local time であることより, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t = \infty$ a.s. なることに注意して一般論より ([7]), $\exists \hat{B}$ $(n-1)$ 次元 Brown 運動, $M_t = \hat{B} \varphi_t$

となるにまず注意する、次に $\mathcal{F} = \sigma\{x_0, B_t; t \in [0, \infty)\}$ とし $P(\cdot | \mathcal{F})$ で $\mathcal{F}$ による regular conditional distribution をあらわす.

このとき $\{\hat{B}_t, P(\cdot | \mathcal{F})\}$ が $(n-1)$ 次元 Brown 運動であることがわかれば $\hat{B}_t$ と $\mathcal{F}$ の独立性が示されたことになる、とこで

$$E((M_t^i - M_s^i) f(x_0) F_1(\omega) F_2(\omega)) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad t > s$$

が任意の $F_1(\omega) : \mathcal{L}(B) \equiv \sigma\{B_t : t \in [0, \infty)\}$ - measurable bounded,

$F_2(\omega) : \mathcal{L}(M_S) \equiv \sigma\{M_u : u \in [0, S]\}$ - measurable, bounded,

$f(x) : \mathcal{B}(\bar{D})$ - measurable, bounded

に対しなりたつ。何故ならばまず $F_1(\omega)$ が

$$F_1(\omega) = c + \int_0^\infty \overline{\Phi}_S(\omega) dB_S,$$

ここで $\overline{\Phi}_S(\omega) = (\overline{\Phi}_S^1, \dots, \overline{\Phi}_S^m)$ は $\mathcal{L}\{B_S\} \equiv \sigma\{B_u : u \in [0, S]\}$ に adapt

(な measurable process, とおけることに注意し (これは Ito [4] の

一般論, 又は Kunita-Watanabe [7] の結果からわかることである),

$$\langle M, B \rangle = 0 \quad (*)$$

$$E((M_t^i - M_S^i) \int_S^\infty \overline{\Phi}_u(\omega) dB_u \mid \mathcal{F}_0) f(x_0) F_2(\omega) = 0$$

が成り立つことと, M が $\mathcal{F}_t$ - martingale ということから

$$E((M_t^i - M_S^i)(c + \int_0^S \overline{\Phi}_u(\omega) dB_u) \mid \mathcal{F}_0) f(x_0) F_2(\omega) = 0$$

が成り立つことより明らかである。同様に

$$E(\{(M_t^i - M_S^i)(M_t^j - M_S^j) - \delta_{ij}(\varphi_t - \varphi_S)\} \mid \mathcal{F}_0) f(x_0) F_1(\omega) F_2(\omega) = 0$$

が成り立つ: $[(M_t^i - M_S^i)(M_t^j - M_S^j) - \delta_{ij}(\varphi_t - \varphi_S)] \equiv \int_S^t M_u^i dM_u^j + \int_S^t M_u^j dM_u^i$
に注意せよ],

このことは $\{M_t, \mathcal{L}(M_t), P(\cdot | \mathcal{L})\}$ が martingale の system

で $\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{ij} \varphi_t$ なることを示しており 故に

$\hat{B}_t = M_{\varphi_t^{-1}}$ は $P(\cdot | \mathcal{L})$ に関して $(n-1)$ 次元 Brown 運動である。

さて解の一意性という。先を任意の (1) の solution とする。

$$\xi = \{x_t, B_t, M_t, \varphi\},$$

存在のときで定義された函数 $F(x, w_1, w_2)$ より

$$\bar{x}_t = F(x_0, B_t, M_t)$$

により、 $\bar{x}$ 定義される $\bar{x}_t$ に対し、 $\bar{\mathcal{X}} = (\bar{x}_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ とおくと $\bar{\mathcal{X}}$ も solution である。始めに注意したように

$$x_t = (x_t^1, \tilde{x}_t) \quad \bar{x}_t = (\bar{x}_t^1, \tilde{\bar{x}}_t)$$

とすると $x_t^1 = \bar{x}_t^1$ であり、上の lemma より直ちに

$$E(|\tilde{x} - \tilde{\bar{x}}|^2 | A_t^{-1}) \leq K \int_0^t E(|\tilde{x} - \tilde{\bar{x}}|^2 | A_s^{-1}) ds,$$

これより $\tilde{x}_t \equiv \tilde{\bar{x}}_t$, すなわち $x_t \equiv \bar{x}_t$. したがって

x の分布は $\bar{x} = F(x_0, B_t, M_t)$ の分布に等しくこれは x_0 の分布 μ より一意的に定まる. (証了)

(2°) (1) の一般の場合

このため (1) の solution の変換についてまず論じる.

① Brown 運動の変換

今 $\mathcal{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対応する solution とする. 又 $p(x) \in \bar{D} \rightarrow O(n) \equiv n \times n$ orthogonal matrix の全体, p Borel measurable とする.

$$\tilde{B}_t = \int_0^t p(x_s) dB_s \quad (\text{i.e. } \tilde{B}_t^i = \int_0^t \sum_{k=1}^n p_{ik}^i(x_s) dB_s^k)$$

とよくよく知られたように $\tilde{B}_t$ は n 次元 Brown 運動で

$\tilde{\mathcal{X}} = (x_t, \tilde{B}_t, M_t, \varphi_t)$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の

$[\tilde{\sigma} \equiv \sigma \circ p^{-1}, b, \tau, \beta]$ に対応する solution である.

このことを

$$\mathcal{X} \xrightarrow[p]{\textcircled{a}} \tilde{\mathcal{X}}$$

とあらわすことにする、定義より直ちに

$$\mathcal{X} \xrightarrow[p]{\textcircled{a}} \tilde{\mathcal{X}} \Rightarrow \tilde{\mathcal{X}} \xrightarrow[p-1]{\textcircled{a}} \mathcal{X}.$$

⑥ time change

$\mathcal{X} = (X_t, B_t, M_t, \varphi_t) \in (\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\sigma, b, \tau, \beta]$

に対応する solution とする. $c(x)$ を 定数 $c_2 > c_1 > 0$

に対し $c_1 \leq c(x) \leq c_2$ なる Borel-measurable function とし,

$$A_t = \int_0^t c(x_s) ds, \quad \text{その逆関数を } A_t^{-1} \text{ とあらわす.}$$

$$\tilde{X}_t = X_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{B}_t = \int_0^t \sqrt{c}(\tilde{x}_s) dB_{A_s^{-1}}, \quad \tilde{M}_t = M_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{\varphi}_t = \varphi_{A_t^{-1}},$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{A_t^{-1}}$$

と置く $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{X}_t, \tilde{B}_t, \tilde{M}_t, \tilde{\varphi}_t)$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ 上の

$[\sqrt{c}^{-1}\sigma, c^{-1}b, \tau, \beta]$ に対応する solution である. この

ことは Doob の optional sampling theorem から容易にたしあ

うることである.

このことを

$$\mathcal{X} \xrightarrow[c]{\textcircled{b}} \tilde{\mathcal{X}}$$

とあらわすと, 定義よりすくわえるように

$$\mathcal{X} \xrightarrow[c]{\textcircled{b}} \tilde{\mathcal{X}} \Rightarrow \tilde{\mathcal{X}} \xrightarrow[c-1]{\textcircled{b}} \mathcal{X}.$$

© drift の変換

$\mathcal{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に
対応する solution とする. $d(x) = (d^1(x), \dots, d^n(x))$ を $\bar{D} \rightarrow R^n$
有界 Borel 可測 とする. $\tilde{P}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の 確率測度で

$\forall t > 0$ に対し,

$$\tilde{P}(B) = \int_B \exp \left[\int_0^t d(x_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |d|^2(x_s) ds \right] P(d\omega), \quad \forall B \in \mathcal{F}_t$$

となるものとする.

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t d(x_s) ds$$

とする. このとき $\tilde{\mathcal{X}} = (x_t, \tilde{B}_t, M_t, \varphi_t)$ は $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}; \mathcal{F}_t)$

上の $[\sigma, \tilde{b} = b + \sigma \cdot d, \tau, \beta]$ に対応する solution である.

これは Girsanov の定理, 又は Motoo, Pyntkin の定理として
知られている, (例之は 田中, 長谷川 [14] を見よ)

このことを

$$\mathcal{X} \xrightarrow[d]{\odot} \tilde{\mathcal{X}}$$

とあらわすと, 定義よりすぐわかるように

$$\mathcal{X} \xrightarrow[d]{\odot} \tilde{\mathcal{X}} \implies \tilde{\mathcal{X}} \xrightarrow[-d]{\odot} \mathcal{X},$$

さて Theorem の条件をみたす $[\sigma, b, \tau, \beta]$ があたえられ
たとして, このとき Lipschitz 連続な $p(x) : x \in \bar{D} \rightarrow O(n)$
で

$$\sigma \cdot p^{-1} = \begin{pmatrix} a(x), 0, \dots, 0 \\ * * * \end{pmatrix}$$

とあるものが存在する。これは $p^1(x) \equiv \frac{\sigma^1(x)}{|\sigma^1(x)|} : x \in \bar{D} \rightarrow S^{n-1}$

Lipschitz 連続であるので、また同様な $p^i(x) : x \in \bar{D} \rightarrow S^{n-1}$ を

$[p^1, p^2, \dots, p^n]$ が O.N.S. になるように選ぶ

$$p(x) = \begin{pmatrix} p^1(x) \\ p^2(x) \\ \vdots \\ p^n(x) \end{pmatrix}$$

とすればよい。このことは 2次元のときは trivial であるが一般

にはそう trivial ではない。これは次のように考えれば fibre

bundle における cross-section の存在に関する 1例題である。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{p}^1} & O(n) \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{D} & \xrightarrow{p^1(x)} & S^{n-1} \end{array}$$

π は $a \in O(n)$ に対し a の第 1 行を対応させる projection, E は $p^1(x) : \bar{D} \rightarrow S^{n-1}$ による induced bundle.
(したがって cross section $f^* : \bar{D} \rightarrow E$

が求まれば $p \equiv \tilde{p}^1 \circ f^* : \bar{D} \rightarrow O(n)$ が求めるもの』

このとき $a(x) = |\sigma^1(x)|$ とより 仮定より $\exists C_2 > C_1 > 0$: 定数

$$C_2 \geq a(x) \geq C_1.$$

$$C(x) = a^2(x)$$

と置く。

又

$$d(x) = \left(-\frac{b^1(x)}{a^2(x)}, 0, \dots, 0 \right)$$

と置く。

今 $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対応する solution X があつたとする.

X に 次のように変換を順次行う

$$X \xrightarrow[p]{\textcircled{a}} X' \xrightarrow[c]{\textcircled{b}} X'' \xrightarrow[d]{\textcircled{c}} X^3$$

すると X^3 は $[\tilde{\sigma}, \tilde{b}, \tau, \beta]$ に対応する solution であらう

かに $\tilde{\sigma}_1^1(x) \equiv 1, \tilde{\sigma}_k^1(x) \equiv 0, k=2, 3, \dots, n, \tilde{b}^1(x) \equiv 0$ である (1°)

の仮定をみたしてゐる, (1°) で示したように $[\tilde{\sigma}, \tilde{b}, \tau, \beta]$ に対応する solution には uniqueness が成り立つ

$$X^3 \xrightarrow[-d]{\textcircled{c}} X'' \xrightarrow[c^{-1}]{\textcircled{b}} X' \xrightarrow[p^{-1}]{\textcircled{a}} X$$

とすると X の uniqueness も明らかである. 存在は X^3 の存在より上の変換で X の存在がわかる (証了)

(3°) (2) の場合: i.e. general sticky case.

定理の条件をみたす $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ が与えられたとする.

$[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対する (1) の solution $X = (X_t, B_t, M_t, P_t)$

を用ゐし, 又 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ は適当に大きくとつて X と独立な n 次元 Brown 運動 $\bar{B}$ が X の上に存在するようにしておく

今

$$A_t = t + \int_0^t \rho(X_s) d\varphi_s, \quad X \text{ の 逆函数を } A_t^{-1},$$

$$\tilde{X}_t = X_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{M}_t = M_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{P}_t = P_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{B}_t = B_{A_t^{-1}} + \int_0^t I_D(X_s) d\bar{B}_s,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{A_t^{-1}}$$

と書く. このとき

$\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{X}_t, \tilde{B}_t, \tilde{M}_t, \tilde{\varphi}_t)$ は $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ に対応する (2)

の solution である. このことは

$$\int_0^t I_D(x_s) dA_s = t, \quad \int_0^t I_{\partial D}(x_s) dA_s = \int_0^t \rho(x_s) d\varphi_s$$

$$\text{より } A_t^{-1} = \int_0^t I_D(\tilde{x}_s) ds, \quad \int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s) ds = \int_0^t \rho(\tilde{x}_s) d\tilde{\varphi}_s$$

となり, 故に Doob の optional sampling theorem を用いることが出来ることである.

逆に $\bar{\mathcal{X}} = (\bar{X}_t, \bar{B}_t, \bar{M}_t, \bar{\varphi}_t)$ を $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ に対

応する (2) の solution とする

$$\bar{A}_t = \int_0^t I_D(\bar{x}_s) ds$$

と書く. このとき, $\bar{A}_t$ は strictly increasing in t , P-a.s. である.

実際 $t \in \mathbb{Q}$ 有理数 $r_1 < r_2$ に対し

$$\begin{aligned} \bar{A}_{r_2} - \bar{A}_{r_1} &= 0 \Rightarrow x_s \in \partial D \quad r_1 \leq s \leq r_2 \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} I_{\partial D}(\bar{x}_s) ds \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \rho(\bar{x}_s) d\bar{\varphi}_s \\ &= r_2 - r_1 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{\varphi}_{r_2} - \bar{\varphi}_{r_1} > 0$$

$$- \int_{r_1}^{r_2} \sigma'(\bar{x}_s) I_D(\bar{x}_s) d\bar{B}_s = 0, \quad \int_{r_1}^{r_2} b'(\bar{x}_s) I_D(\bar{x}_s) ds = 0 \quad \text{より}$$

$$\bar{x}_{r_2}^1 = \bar{x}_{r_1}^1 + \bar{\varphi}_{r_2} - \bar{\varphi}_{r_1} > \bar{x}_{r_1}^1 = 0$$

これは $x_{r_2}^1 = 0$ と矛盾する.

したがって $\bar{A}_t^{-1}$ は continuous であり $\mathcal{X} = (X_t, B_t, M_t, \varphi_t)$

$$\text{を } X_t = \bar{x} \bar{A}_t^{-1}, \quad B_t = \int_0^{\bar{A}_t^{-1}} I_D(\bar{x}_s) d\bar{B}_s, \quad M_t = \bar{M} \bar{A}_t^{-1}, \quad \varphi_t = \bar{\varphi} \bar{A}_t^{-1}$$

$\bar{\mathcal{F}}_t = \bar{\mathcal{F}}_{\bar{A}_t^{-1}}$ とおくとき $\mathcal{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ は $[\sigma b, \tau, \beta]$ に対応する (1) の解である. しかも

$$t = \int_0^t I_D(\bar{x}_s) ds + \int_0^t I_{\partial D}(\bar{x}_s) ds = \bar{A}_t + \int_0^t \rho(\bar{x}_s) d\bar{\varphi}_s$$

より

$$\bar{A}_t^{-1} = t + \int_0^t \rho(x_s) d\varphi_s \equiv A_t$$

このことは $\bar{x}_t$ は x_t より $\bar{x}_t = x_{A_t^{-1}}$ として得られることを示している. すなわち任意の (2) の solution は (1) の solution よりこのようにして得られたものに限定される. したがって (2) の solution の uniqueness が示された. □

文献

- [1] J. M. Bony, Ph. Courège et P. Priouret, Séminaires Brelot - Choquet - Deny 1965/66 のいくつかの報告.
- [2] N. Ikeda, On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems, Mem Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, 33 (1961), 367-427
- [3] 伊藤清, 確率論 (現代数学14) 岩波書店 1953
- [4] K. Itô, Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 157-167
- [5] K. Itô, Canonical measurable random functions, Proc. International Conf. on Funct. Anal. Math. Soc. of Japan 1970

- [6] K. Itô¹ and H. P. McKean Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965
- [7] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30 (1967) 209-245
- [8] H. P. McKean Jr., Stochastic integrals, Academic press 1969
- [9] K. Sato, Semigroups and Markov processes, Lecture note Univ. Minnesota 1968
- [10] K. Sato and T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 4 529-605 (1965)
- [11] A. V. Skorohod, Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region, Theory of Prob. and its Appl. 6 (1961) 264-274
- [12] D. W. Strook and S. S. R. Varadhan, Diffusion processes with continuous coefficients, I. II, Comm. Pure Appl. Math 12 (1969) 345-400 and 479-530
- [13] D. W. Strook and S. S. R. Varadhan, Diffusion processes with boundary conditions, in preprint (to appear)
- [14] 田中洋 - 長谷川実, 確率微分方程式, Seminar on Prob. Vol. 19 (1964) 確率論セミナー
- [15] S. Watanabe, On stochastic differential equations for multidimensional diffusion processes with boundary conditions

to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[16] A. D. Wentzell On lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes. Theory of Prob. and Its App1. 4 (1959) 172-185

- 付記 (i) solution の定義における $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は常に $It\hat{o}[5]$ の意味で standard space としておいた方がよかったと思う。
- (ii) 本文の内容の大部分は [15] で発表される予定です。