

異方性により樹枝状成長するヴィスカス・フィンガー

中大. 理工 山田 英明、松下 貢

一本だけみぞをつけたヘル・ショウセルでヴィスカス・フィンガーの実験をおこなったところ、みぞにそって成長した枝は他の枝と違い先端が枝分かれせず、横枝を発生した。この枝の成長の仕組みは樹枝状結晶のそれと同じなので、この枝の成長速度や特徴的な長さを測定することによって、結晶成長の理論が正しいかどうか確かめることができる。

1. ヴィスカス・フィンガー

2枚の平行平板の間に流体をはさんだものをヘル・ショウセルという。いまヘル・ショウセル内に2種類の流体があったときの界面の不安定性について考えよう。水平な厚さ b の隙間で流体1が流体2を押しているとする。粘性係数をそれぞれ μ_1 、 μ_2 とする。流れの速度を v 、圧力を P とする。それぞれの流体内でナビエ・ストークス方程式を解くと

$$\bar{v}_i = -\frac{b^2}{12\mu_i} \nabla P \quad (i=1,2). \quad (1)$$

となる²⁾。ここで $\bar{}$ は厚さ方向の平均である。流体が縮まないとする、連続の式から

$$\nabla \cdot \bar{v}_i = 0 \quad (i=1,2). \quad (2)$$

(1) に (2) を代入すると

$$\nabla^2 P_i = 0 \quad (i=1,2). \quad (3)$$

つまり圧力場はラプラス場をみたす。

界面の形は $\mu_1 > \mu_2$ ならば安定で $\mu_1 < \mu_2$ ならば不安定である。このことは実験的にも理論的にも確かめられている^{1),3)}。ここで $\mu_1 \ll \mu_2$ の単純な場合だけを考える。 $\mu_1 = 0$ とすれば (1) 式より $P_1 = \text{CONST}$ となり、流体2の圧力場だけを考えればよい。界面張力を考えなければ図1のようにゆらぎで一度でっばったところはさらにでっばりやすくなる。圧力勾配が不安定化の原因であるのに対して界面張力は安定化の原因に成っている。

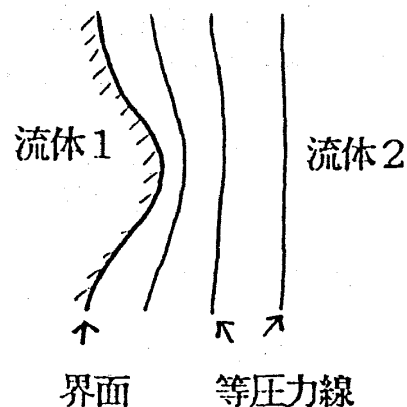


図1 等圧力線

二流体界面では、界面張力 γ によって

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (4)$$

となる圧力のギャップがある。ここで ρ_1 、 ρ_2 はそれぞれ上から見たときと横から見たときの界面の形の曲率半径である。 ρ_2 はどこでも一定とすれば、界面の成長は ρ_1 だけにより二次元的な成長とみなせる。

2. 結晶成長⁴⁾

ここでは融液成長と溶液成長だけを考える。どちらの場合も成長に関係する場は拡散場で

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u. \quad (5)$$

ここで D は液体中の拡散係数で u は無次元化された温度または濃度である。次に結晶が速さ v で定常成長しているとし、成長方向を z 軸とする。 z 方向を速さ v で動く座標に乗った拡散方程式は

$$\nabla^2 u + \frac{2}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

ここで l は拡散長で

$$l = \frac{2D}{v}. \quad (8)$$

l より小さいスケールでは

$$\nabla^2 u = 0. \quad (9)$$

とできる。

また連続の条件で、個体中の拡散を無視すると

$$v = -D (\nabla u)_{\text{liquid}} \cdot \mathbf{n}. \quad (11)$$

ギブス・トムソンの条件は

$$u(\text{surface}) = -d \cdot \kappa. \quad (12)$$

とかける。ここで d は毛管長、 κ は曲率である。

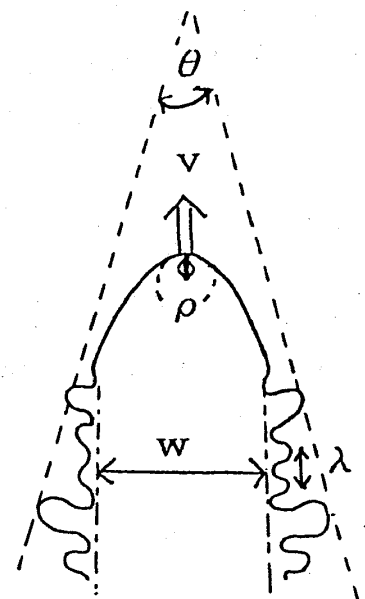


図2 樹枝状結晶

3. 結晶成長の特徴⁴⁾

結晶成長の理論によると樹枝状結晶には次の特徴がある。

1. 先端の形が放物線である。
2. $v \rho^2 = \text{const.}$
3. $\lambda \sim \rho$ 。
4. 先端の形が安定であるためには異方性が必要である。

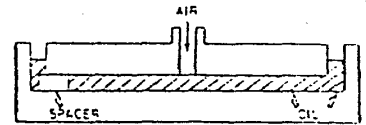


図3 ヘル・ショウセル

ここで v 、 ρ 、 λ はそれぞれ先端の速さ、曲率半径、横枝の間隔である。結晶成長の式(9)、(11)、(12)はヴィスカス・フィンガーの式(3)、(1)、(4)に対応しており、異方性をとりいれればヴィスカス・フィンガーの成長の仕組の数学的形式は結晶成長と同じになる。したがってヴィスカス・フィンガーの実験から上の四つの性質が成り立っているかどうか、また成り立つとすればそれはどうしてかが解るだろう。

4. 実験

実験に使用したセルは、上下板とも厚さ2 cmの亚克力板で、上板は縦99 cm横59 cm、下板は縦100 cm横60 cmである(図3)。上板の真中には直径2 mmの穴が開けてあり、ここから空気を入れる。すき間の厚さは1 mmのスペーサーで一定に保ちシリコン・オイル(① $\mu=9.70 \text{ p}$ 、 $\gamma=21.2 \text{ dyn/cm}$ ② $\mu=0.965 \text{ p}$ 、 $\gamma=20.9 \text{ dyn/cm}$)を入れておく。このセルの一番の特徴は下板の真中から一方向に、幅0.4 m深さ0.1 mmのV字型のみぞが彫ってあることである。これによって異方性が取り入れられる。上板の穴から一定の圧力の空気を入れるとヴィスカス・フィンガーが成長するが、みぞに沿ってのびた枝は他の枝と違って、先端の形が放物線で安定し横枝を発生している(図4)。

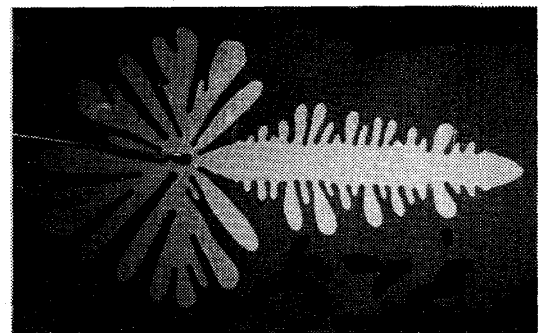


図4 樹枝状成長した
ヴィスカス・フィンガー

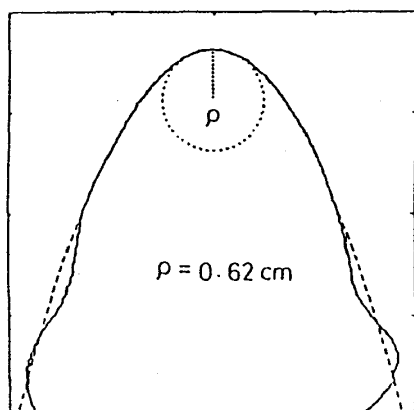
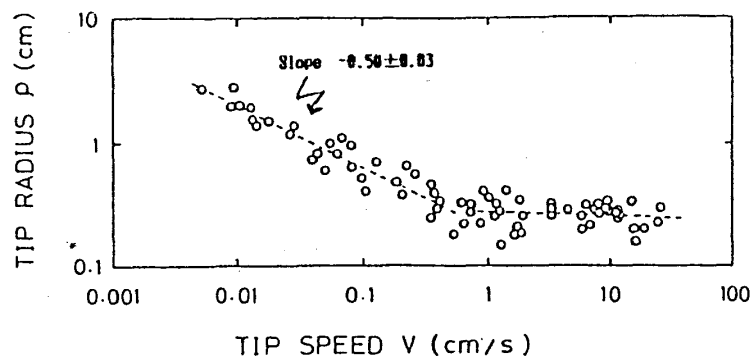


図5 fitting

図6 $v-\rho$ グラフ

4. 結果と議論

先端の写真に放物線をFITTINGさせて曲率半径を決定する(図5)。①のシリコン・オイルで v 、 ρ 、 λ などを計ったら図6、7のようになった。 v と ρ の関係はある速度 v_c までは樹枝状結晶の性質2と一致したが v_c 以上では ρ はほぼ一定になってしまった。この原因は圧力のギャップ ΔP に平衡状態での式(4)をそのまま使ったことにある。

ParkとHomsyの理論によると低粘性流体が壁をぬらす高粘性流体を押しているとき、圧力のギャップ ΔP は次の式で与えられる。

$$\Delta P = \frac{\gamma}{b/2} \left\{ 1 + 3.80 \left(\frac{\mu V}{\gamma} \right)^{3/2} \right\} + \frac{\pi}{4} \frac{\gamma}{\rho_1} \quad (13)$$

この式によれば圧力のギャップは界面の曲率半径だけでなく速さにもよることがわかる。かっこ内の第二項が無視できればいままでの議論でよい。第二項が効いてくるのは第一項以上に成るところだと考えられるので、両者を等しいと置くと

$$v_c = \frac{\gamma}{\mu} \left(\frac{1}{3.80} \right)^{2/3} \quad (14)$$

となり。①のオイルの場合 $v_c = 0.3 \text{ cm/s}$ でグラフのクロスオーバーの所の速度に近い。②のオイルでも同様の結果が出た。

また横枝の間隔 λ は速度 v に関係なく半径 ρ に比例していた。しかし主幹の太さ w は v に比例していなかった (図8)。これは曲率半径が決まると横枝が発生するときには非平衡状態であるのに対して、主幹の太さにはその後の平衡状態への復帰が無視できないためであろう。この実験の場合、結晶成長の場合と違って主幹に垂直な方向には異方性がない。また注入する空気の圧力を変化させて先端の速度を振動させると横枝は左右対称に発生した (図9)。これらのことから速度が一定のときに発生した横枝は先端付近の揺らぎが拡大されたものと思われる。

みぞを途中でとめると先端が不安定になって枝分かれした (図11)。したがって先端が安定であるためには異方性が必要であることが容易に確かめられた。結晶成長の場合と違ってこの実験では異方性はただ一本のみぞのみにある。それにもかかわらずそれに引っ張られた枝の先端が放物線であるのは興味深い。

横枝の先端を結んだ線のなす角度 θ は v とともに増加した (図12)。言い替えば、注入する空気の圧力が大きいところほど横枝の成長速度が主幹の成長速度に近い。先端を結んだ包絡線は横枝とほぼ直角なので主幹とのなす角は速度が大きくなるほど小さくなっている。

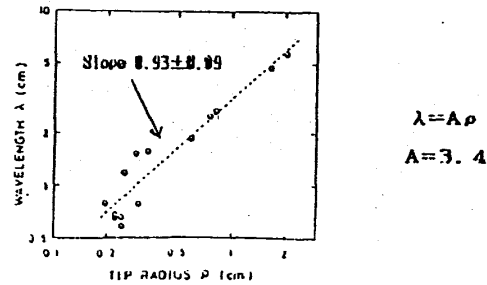


図7 $\rho - \lambda$ グラフ

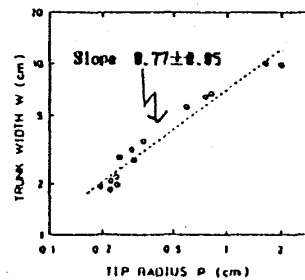


図8 $\rho - w$ グラフ

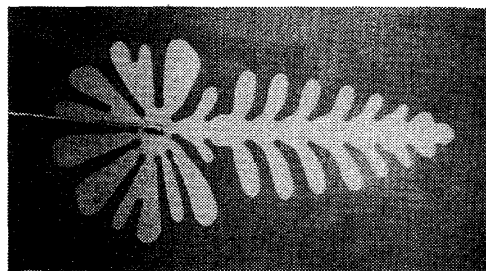


図9 振動成長

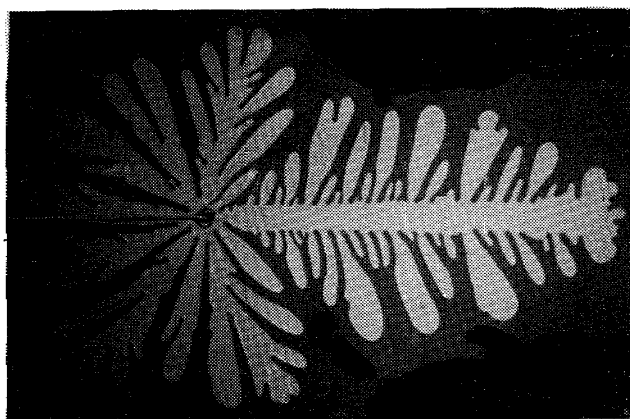


図10 溝を留めた
ときの成長

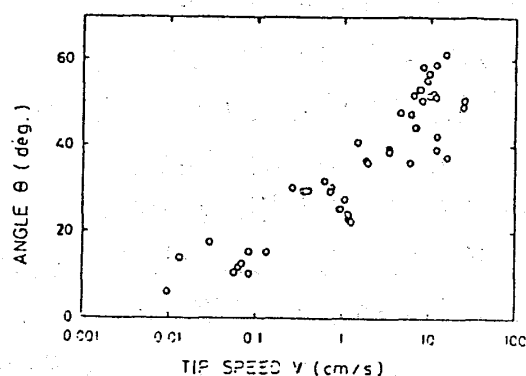


図11 $v-\theta$ グラフ

6. おわりに

界面のパターン形成の問題は強い非線形性がいっているので、理論的に解くのはむずかしい。それに対してヴィスカス・フィンガーの実験は非常に簡単にできるので、この問題の議論に大いに役に立ちそうである。異方性が重要な役割をしていることがわかったので、これからの課題としてみぞをとめた後の不安定化の定量化が残っている。

参考文献

- 1) Bensimon et al, Rev. Mod. Phys., 58, 977 (1986).
- 2) 例えば、ランダウ・リフシッツ、流体力学1 (理論物理学教程、東京図書、1970)。
- 3) J. Nittmann, G. Daccord and H. E. Stanley, in Fractals In Physics ed. S. Pietronero, E. Tosatti (Elsevier Science Publishers BV., 1986).
- 4) J. S. Langer, Rev. Mod. Phys. 52, 1 (1980).
- 5) C. -W. Park and G. M. Homsy J. Fluid. Mech. 139, 291 (1984).