

掃流砂礫が流れの流速分布におよぼす影響について

大 同 淳 之

ON THE EFFECT OF BED LOAD MOVEMENT TO VELOCITY DISTRIBUTION OF FLOW

By Atsuyuki DAIDO

Synopsis

The velocity distribution near the bed for bed-load laden flow deviates from a straight line in the semi-logarithmic plot on usual co-ordinate. The author reasoned that the deviation is due to a shear stress generated by the rotation of sand gravels. If a mass transport moves due to the gravel rotation, a momentum difference between the upper and lower layer of the rotation axis results. The difference is the equivalent of shear force between the two layer. The total shear stress for the bed-load laden flow consists of a turbulent and the gravel rotation's shear stress. By use of above consideration, the velocity distribution can be obtained. It is shown that the velocity distribution for bed-load laden flow is straight line of gradient $1/\kappa$ in the semi-logarithmic plot on new co-ordinate. The experimental results permitted that above theory is appropriateness.

1. ま え が き

移動床における抵抗を発生の原因によって大別すると、固定面の摩擦抵抗、突起物の抗力抵抗および河床面を転動、跳躍している掃流砂礫によって生ずる抵抗に分けられる。抵抗の線型性がなりたつとすると、流水の抵抗を求めるためには、全ての量を算定する必要がある。摩擦抵抗と抗力抵抗については、従来から多くの研究があり、ある程度明確にされているが、砂礫の転動にともなう抵抗については殆んどふれられていないように思う。

石原、岩垣、末石¹⁾は、滑面上に砂礫を転動させたとき、床面付近で流速が対数法則からはずれて一様になろうとすることを実験結果から指摘した。この事実から、このような砂礫からうける抗力抵抗の他に、流速分布に変化を与える何らかの影響をうけることが想像される。著者はこの流速分布に影響をおよぼすものとして、砂礫の転動にともなうせん断応力をとりあげた。

著者は、砂礫が回転し、砂礫のまわりに流体質量の移動が生じると、粒子の存在する水平面を境として、流れの方向に運動量の差を生じ、これがせん断応力としてはたらくと考えた。

砂礫の転動がある場合には、乱れによる応力のほかにこの砂礫の回転にともなうせん断応力が付加されるとして、流速分布をみちびいた。この結果は、砂礫をともなう流れの流速分布が、慣用の流速および高さの無次元表示 u/u_* および u_*z/ν に、砂礫の回転の影響を表わす項を加味すると、片対数紙上で、砂礫の存在しない領域と同じ1本の直線の関係で表わされ、その勾配が $1/\kappa$ で示されることを示した。

理論の誘導の途中用いた係数の決定と、理論の妥当性を検討するために実験を用い、以上の理論の結果が正しいことを確かめた。

2. 砂礫の回転によって生ずるせん断応力

(i) 粒子の回転によって生ずる回転方向の流れ

砂礫を球とみなし、軸のまわりを回転する球の回転方向を ϕ とし、流れが定常で、 r 方向および θ 方向の流速を 0 とすると、粘性係数 μ の代りに渦動粘性係数 ε を用いた ϕ 方向の Navier-stokes の式はつぎのように表わせる。

$$\varepsilon \left\{ \nabla^2 v_\phi - (v_\phi / r^2 \cdot \sin^2 \theta) \right\} = 0$$

ここに $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ }(1)

さらに $\partial v_\phi / \partial \theta = 0$, $\partial v_\phi^2 / \partial \theta^2 = 0$ とすると、(1) 式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{C v_\phi}{r^2} &= 0 \\ \text{ここに } C &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \right\} \text{.....(2)}$$

$r = \infty$ で $v_\phi = 0$, $r = R$ (球平面) で $v_\phi = \omega R \sin \theta$ の条件で (2) 式をとくと、

$$\left. \begin{aligned} v_\phi / (\omega R \sin \theta) &= (R/r)^{m+1} \\ \text{ここに } \omega : \text{角速度 } m &= -(1/2) + \sqrt{C + (1/4)} \end{aligned} \right\} \text{.....(3)}$$

となる。以上の結果は大胆な仮定のもとにみちびかれたので、実際の流れに対してはこれに係数 N をかけて表わすことにする。

$$v_\phi / (\omega R \sin \theta) = N \cdot (R/r)^{m+1} \text{.....(4)}$$

と表わすことにする。

この結果、砂礫が角速度 ω で回転するとき、回転軸の含まれた平面を境として z 方向に生ずる質量の差 $\rho Q'$ は、面の上方から下方に移動するものと、下方から上面に移動するものの差であって、つぎのように表わすことができる。

$$\rho Q' = 2\rho \int_0^{\pi/2} \int_R^\infty v_\phi dr \cdot d\theta - (-2\rho \int_0^{\pi/2} \int_R^\infty v_\phi dr \cdot d\theta) = \rho \alpha N \omega R^2$$

ここに $\alpha = 4 \times 0.522$ (5)

速度勾配 du/dz のある流れの中におかれた粒子の回転の角速度はつぎのように表わすことができる。

$$\omega = (1/2) \Gamma (du/dz) \text{.....(6)}$$

ここに Γ は、粒子と流体の密度差に関係し、粒子の比重が 1 のときは Γ は 1 で、粒子の比重が 1 より大きいとき $\Gamma < 1$ となる係数である。

したがって速度勾配 du/dz の流れの中におかれた粒子 1 箇あたりの質量の輸送量は

$$\rho Q' = \rho \cdot \Gamma N (\alpha/2) R^2 (du/dz) \text{.....(7)}$$

である。

(ii) 砂礫の回転によって生ずるせん断応力

単位幅単位時間当りの流砂量を q_s 、砂礫 1 箇あたりの体積を AR^3 、砂礫の平均流動速度を v_s 、砂礫の平均跳躍高さを z_s とすると、河床から高さ z_s までの鉛直単位面積に存在する砂礫の個数 K は、つぎのようになる。

$$K = q_s / (AR^3 \cdot v_s z_s) \text{.....(8)}$$

したがって、河床から z_s までの部分では、単位高さあたり $\rho K Q'$ の流体の質量が z 方向に輸送されて

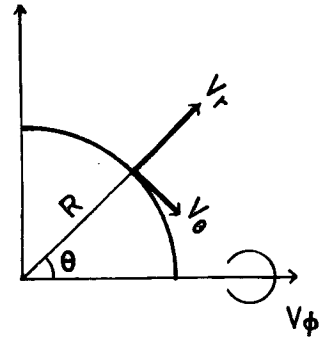


Fig. 1 Notation

いると考えることができる。この質量の移動によって河床から z の点の流速を u とすると、 z の高さにおいて流れの方向に生ずる運動量の差から、この質量の輸送によるせん断応力は、つぎようになる。

$$\tau = \rho K Q' u = \rho \beta u (du/dz), \quad \beta = (1/2) \Gamma K N \alpha R^2 \dots\dots\dots (9)$$

河床から z_s までの部分では、乱れによるせん断応力のほかに、この砂礫の回転にともなうせん断応力が加わるものとする。乱れによる応力は混合長 l を用いて、混合長理論によって表わすと、砂礫の回転をともなう流れでは

$$\tau = \rho l^2 (du/dz)^2 + \rho \beta u \cdot (du/dz) \dots\dots\dots (10)$$

と表わされることになる。

3. 砂礫の回転によるせん断応力を考慮したときの流速分布

河床面のごく近傍では、乱れによる応力が省略でき、かつ $\tau = \tau_0$ (壁面摩擦応力) とすると、(10) 式は、

$$\tau_0/\rho = \beta u (du/dz) \dots\dots\dots (11)$$

となり、 $z=0$ で、 $u=0$ の解は、

$$u/u_* = \sqrt{2z/\beta} \dots\dots\dots (12)$$

となる。(10) 式右辺第2項中の u を、(12) 式で近似すると、(10) 式は、

$$\tau_0/\rho = l^2 (du/dz)^2 + \sqrt{2\beta} u_* \sqrt{z} \cdot (du/dz) \dots\dots\dots (13)$$

となり、これはつぎのように書きあらためられる。

$$\frac{du}{dz} = \frac{4l^2 u_*^2 + 2\beta u_*^2 z}{2l^2} - \frac{\sqrt{2\beta} u_* \sqrt{z}}{2l^2} \dots\dots\dots (14)$$

$l = \kappa(z - \delta_L)$, ここに κ は Karman 定数, δ_L は粘性底面の厚さとする、(14) 式の右辺第2項に、 $z = l/\kappa$ を用いて、(14) 式はつぎのように書くことができる。

$$\frac{du}{dl} = \frac{u_*}{\kappa} \frac{\nu}{u_* l} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\left(\frac{u_* l}{\nu}\right) \left(1 + \frac{\beta}{2\kappa l}\right)}}{l} - \frac{\sqrt{2\beta} \frac{u_*}{\nu} \sqrt{\frac{l}{\kappa}}}{2l} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

(15) 式を、 $z = \delta_L$ で $\beta = 0$ のとき、 $u/u_* = u_* \delta_L / \nu$ の条件でとくとつぎようになる。

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \left[\log \left\{ \frac{u_* l}{\nu} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{F}{\frac{u_* l}{\nu}}} \right) + \frac{F}{2} \right\} + \frac{2F}{\frac{u_* l}{\nu} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{F}{\frac{u_* l}{\nu}}} \right)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{F}{\frac{u_* l}{\nu}}} \right] + \frac{u_*^2 \delta_L}{\nu} \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 $F = \beta u_* / 2\kappa \nu$ である。 $u_* l / \nu$ が大きいところでは、 $l = \kappa z$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_*} = & \frac{1}{\kappa} \log_e \left\{ \frac{u_* z}{\nu} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{F}{\frac{u_* z}{\nu}}} \right) + \frac{F}{2\kappa} \right\} + \frac{2F}{\kappa^2 \frac{u_* z}{\nu} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{F}{\frac{u_* z}{\nu}}} \right)} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{F}{\kappa^3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{u_* z}{\nu}}} + \frac{u_* \delta_L}{\nu} + \frac{1}{\kappa} \log \kappa \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。(17) 式は $F=0$ のとき、

$$u/u_* = (1/\kappa) \log(u_* z/\nu) + C_2 \dots\dots\dots (18)$$

となって、従来の式と一致する。

さきにのべたように、掃流型式で砂礫が移動しているときに、底面付近で流速が対数法則からはずれることが指摘されている。このずれは、(17) 式によると、任意の高さの流速が z の対数以外の z にも関係するためと云うことができる。(17) 式が正しければ、(17) 式の右辺第2項、第3項を左辺に移項し、この左辺と右辺第1項の { } で括られた量の対数の間には $1/\kappa$ の勾配の直線関係が成立することになる。

4. 掃流砂礫をともしう流れの流速分布に関する実験

(i) 球のまわりの流速分布に関する実験

(17) 式の計算において、砂礫の回転にともなう流量が重要な役割を演ずるので、(4) 式の正否を実験によって確かめた。

実験は縦 0.8 m, 横 1.0 m および、深さ 0.4 m の水槽の中央で直径 10 cm および 5 cm の木製の球を、静止流体中で、鉛直軸のまわりに回転させ、直径 1 mm のピトー管を用いて、球のまわりに生じた流速分布を測定した。Fig. 2 は $\theta=90^\circ$ (水平面) の線上の流速分布を示す。図中の直線の勾配は、(3) 式から与えられる勾配を示す。この勾配は、 θ が小さくなると、(3) 式で与えられる m より小さくなる。このちがいは流速の小さいところで生ずるのでその影響は小さいと考えて、(4) 式の指数は理論の値をそのまま用いることにする。また係数 N は Fig. 2 から 0.3 とする。

(ii) 砂礫の回転速度に関する実験

実験に用いた水路は、幅 0.3 m, 長さ 10 m, 勾配 1/100 の鋼製のもので、1 部側面はガラス張りになっている。このガラス張りの部分を利用して、流れにともなって転動する砂礫の回転状態を、ストロボ装置を用いて撮影した。用いたストロボの発振周波数は 40 c/s である。1 枚のフィルムに 6 ないし 10 箇の影像を得られるようにした。実験に用いた砂礫は、篩目 7.93 mm を通過し、6.73 mm に止まる平均粒径 7.43 mm のもので、比重 1.44、形状はほぼ球状に近い人工軽量骨材である。

Fig. 3 に測定結果と $(1/2)(du/dz)$ の比較を示す。この実験では礫を一箇づつ流しているので、 du/dz の値は、(18) 式より $du/dz=(u_x/\kappa z)$ である。ここで行った実験の範囲では、礫の跳躍は非常に盛んで、測定された殆んどケースが跳躍中のものである。Fig. 3 にみられるように、跳躍中の砂礫は (7) 式で

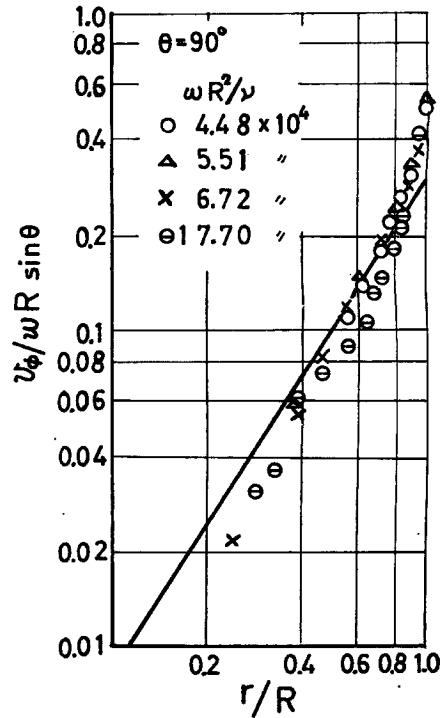


Fig. 2 Velocity distributions around sphere

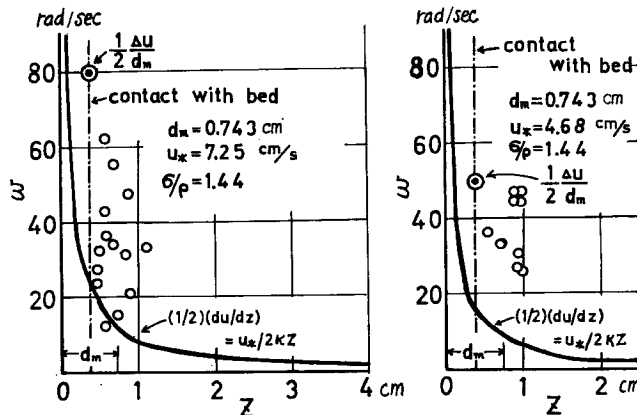


Fig. 3 Angle velocities of gravel rotation in stream

予測される角速度より、一般にはよくなっている。実際には砂礫の存在する位置の $(1/2)(du/dz)$ より少しおそくなると考えられるから、砂礫の角速度はその存在する高さの流れの速度勾配にすぐ対応せず、水路床を転動したときにうけた角速度をかなり保持しながら跳躍していることがわかる。これは同じ高さでも、跳躍直後と着床前では、前者がかなり早いという事実からもうなづける。また礫の大きさがかなり大きいことから、礫の中心点の高さの速度勾配ではなく、礫の上下端の速度差から、礫の大きさの範囲で直線変化すると考えて求めた角速度も同じく Fig. 3 中に記したが、測定値はこれより下廻っているの、測定値そのものは妥当だといえよう。以上の実験から、ここに用いた砂礫については、水路床に接しているときは $F < 1$ 、跳躍しているときは $F > 1$ とみなせる。そこで、跳躍高さ z_s の範囲では平均して F は 1 とする。

(iii) 掃流砂礫をともなう流れの流速分布に関する実験

さきの砂礫の角速度の測定と同じ水路、砂礫を用いて、水路に堆積しない程度にできをだけ多くの砂礫を流して、そのときの流れの流速分布を測定した。流速の測定は直径 1 mm のピトー管によった。流砂量を水路下流端で計量によって測定すると同時に、水路断面に存在する礫の数を求めるために、水路の上面と側面から写真を撮影した。

砂礫を流さないときの流速分布は Froude 数が 1 以下では、Fig. 4 のように

$$u/u_* = 5.5 + 5.75 \log_{10}(u_* z / \nu)$$

の関係を、また Froude 数が大きくなると、定数 5.5 が小さくなる割合は、岩垣²⁾によって求められている関係とはほぼ一致するので、水路の状態および測定方法は満足すべき状態にあると考えてよい。Fig. 4 に砂礫が流速している場合の流速分布を慣用の座標で示す。

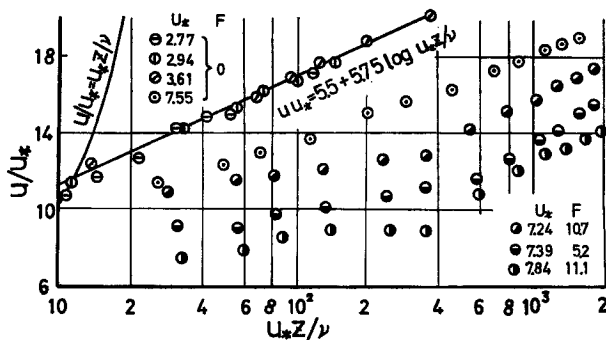


Fig. 4 Velocity distributions for bed-load laden flow

Fig. 4 および一連の実験において、流速分布の屈曲点は、この実験の範囲では、水路床から 0.66 cm または 1.06 cm (中間の測定はない) の位置で生じている。1.06 cm は粒径の 1.5 倍に相当する。

Fig. 5 は任意時間に断面内の鉛直方向の砂礫の分布を示す。流速分布の屈曲点までに存在する粒子の数

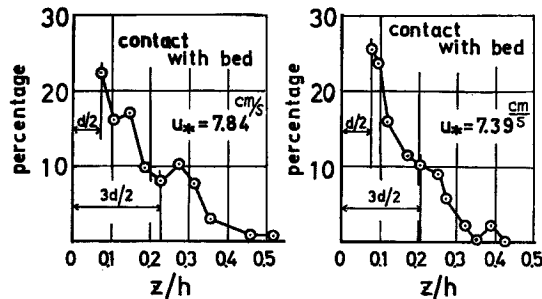


Fig. 5 Distribution of gravels in vertical plane

は、単位面積当りに存在する粒子のうち、床面に接触しているものを含めて、65%~75%である。そこで(8)式の K をきめるに必要な z_0 は、断面内の砂礫の65%が存在する高さとする。水路上面からとられた写真とこの z_0 より、鉛直単位断面に存在する粒子数 K がきまる。

以上のようにして(17)式の各項を計算し、片対数紙に描点した結果はFig. 6のとおりである。

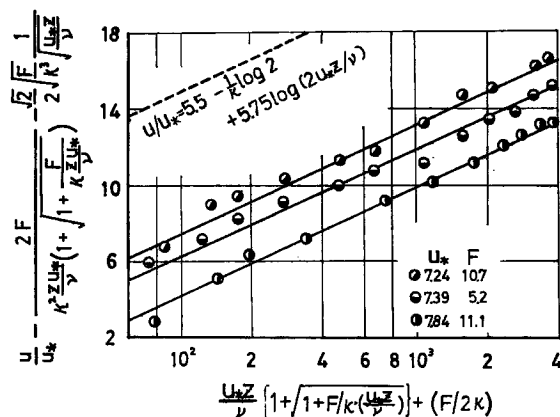


Fig. 6 Velocity distributions indicated by eq. (17)

新しい座標において、砂礫の影響の及ばない領域をも含めて、片対数紙上に $1/\kappa$ の勾配をもつ直線関係を示す。 κ の値は0.4である。

河床における砂礫の運動とその上を流れる流れの流速は相互に関係する。砂礫によって影響された流速はいままで不明のため、従来砂礫の運動の解析において、流れの流速は砂礫の存在しないものを用いてきた。この解析によって、砂礫の流動に応じた適確な流速が得られることになり、砂礫の運動の解析に十分役立つであろう。

とくに、流速分布の勾配が、片対数紙上で $1/\kappa$ の一定値で表わせることは、解析および実験値の整理において大変有用であると考えられる。

5. む す び

この論文は、掃流をとまなう流れの流速分布をとりあつかったものである。掃流をとまなう流れの流速は、慣用の座標を用いて表わすとき、底面付近で対数分布の直線からはずれて一様に表わされる。著者はこの原因を砂礫の回転にともなうせん断応力の増加に求めた。すなわち砂礫の回転にともなう砂礫のまわりに流れが生じ、砂礫の回転軸の上下面で質量の差が生じ、これが流れの方向の運動量の差となるから、この上下面の境にせん断力として働らくと考えた。

そこで、簡単化した Navier-Stokes の式をもとにして球のまわりの流れを求め、これから球の回転にとまなうせん断応力を表わした。

砂礫が流動している流れでは、乱れによるせん断応力のほかに、ここに求めたせん断応力が加わると考えて、流速分布を求めた。この結果は、従来の対数式に、新しく導入された砂礫の回転の効果を示す項が付け加わる形に表わされた。そうして砂礫の流動している流れを慣用の座標で表わしたとき見掛け上一様に表わされたのは、流速がその高さの対数だけの関数でなく、ほかにも高さの関係する項があるためであることを示した。これを整理して新しい座標を用いると、この場合も片対数紙上で $1/\kappa$ の直線で表わされることを示した。

以上の結果を実験的に検証するため、まず回転する球のまわりの流れおよび流れの中の砂礫の回転の角速度について実験を行ない、解析結果と比較するとともに、誘導の過程で用いた係数を決定した。

つぎに砂礫の流動をともしなうときの流速分布を測定し、さきに求めた理論にしたがって実験値を整理し、測定結果が理論で予測したように、新しい座標で、片対数紙上で $1/\kappa$ の勾配の直線状に表わされることを確かめた。この場合の κ は universal constant の 0.4 がなりたつ。以上の結果、砂礫が流動しているときの流れの流速を明確にすることができた。

この研究において、御指導を頂いた矢野教授および土屋助教授に御礼申上げるとともに、本研究の一部に昭和42年文部省科学研究費の補助を受けたことに対して関係方面に厚く御礼申上げる。

参 考 文 献

- 1) Ishihara, T., Iwagaki, Y., and Sueishi, T.; On the effect of bed-load movement in thin sheet Flow, Proc. 3rd Japan National Congress for Applied Mechanics 1953, pp. 265—269 (1954)
- 2) 岩垣雄一：雨水流による地面浸食機構に関する基礎的研究 昭30.9, pp. 1—16