

Painlevé I 型方程式について

愛媛大学 工 学 部 高 橋 恒 倫

§0 序

Painlevé I 型方程式

$$(1) \quad u'' = 6u^2 + z$$

この解は、複素平面上で有理型関数である。解は新しい超越関数と信じられるが、その詳しい性質はほとんど知られていない。ここでは原点での Laurent 級数を表わされる。この特殊解について、主として収束半径を中心に詳しく論ずる。数値計算にかんする部分は全く愛媛大学工学部 野田松太郎氏による。初期条件による。

Regular Case

$$(2) \quad u(0) = u'(0) = 0$$

Singular Case

$$(3) \quad z^2 u(z) \Big|_{z=0} = 1, \quad \left(\frac{d}{dz} \right)^6 (z^2 u(z)) \Big|_{z=0} = 0$$

この2つの場合に分けて考える。それぞれの場合

$$(4) \quad u_R(z) = \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{336} z^8 + \frac{1}{26208} z^{13} + \dots$$

$$(5) \quad u_S(-z) = z^{-2} + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{264} z^8 + \frac{1}{19008} z^{13} + \dots$$

と Laurent 展開される解を持つ。これらの収束半径をそれぞれ R , ρ とすると

数値計算の結果

$$(6) \quad R = 2.616$$

$$(7) \quad \rho = 2.562$$

なる値を得た。又数値計算を通じて次のことを予想している。

予想

$u_R(z)$, $u_S(-z)$ はその収束円周上にそれぞれ

$$R \exp \frac{2k\pi}{5} i, \quad \rho \exp \frac{2k\pi}{5} i \quad (k=0, 1, 2, 3, 4)$$

なる 5 組の 2 組の極をもつ (こゝまでは以下に示さぬ限り) がこれら以外に特異点をもたない。

さて我々は上記の値 (6), (7) を初めに見表する誤りから少なくともこれらの値が 大きくまちがったとはいえないという理論的保障をしなければならぬ。小数点以下何桁まで信用できるかといふことはこの意味はこれから先の話である。

以下に示すように次の評価を得た。

評価

$$(18) \quad 2.240 \leq R \leq 2.666$$

$$(19) \quad 2.221 \leq \rho \leq 2.609$$

上からの評価を与える数値は計算機により得られものであるが、
 一方、ヒューマン計算機が与える値は、
 値が得られずと予想している。下からの評価は、
 以下の(5.28), (5.29)の方が良い結果になる、
 というものも期待しているが、
 この部分の数値計算は目下実行中である。

R, ρ の相互の関係は次の通り。

$$(10) \quad \left(\frac{77}{102}\right)^{\frac{1}{10}} R \leq \rho \leq R \leq \left(\frac{102}{77}\right)^{\frac{1}{10}} \rho$$

$$\left(\frac{77}{102}\right)^{\frac{1}{10}} \doteq 0.972275, \quad \left(\frac{102}{77}\right)^{\frac{1}{10}} \doteq 1.02852$$

我々の数値(6), (7)は以上の理論的評価式と矛盾していない。
 したがって、
 2-応答型としてよいと思える。

§1 形式解.

以下(1)の代わりに

$$(1.1) \quad u'' = 6u^2 + z + \frac{11}{6} z^6 \quad (\lambda: 11 \rightarrow x-4)$$

を考へる。 $\lambda=1$ の場合が (1) である。 2つの特別な場合

Regular Case

$$(1.2) \quad u(0) = u'(0) = 0$$

Singular Case

$$(1.3) \quad z^2 u(z) \Big|_{z=0} = 1, \quad \left(\frac{d}{dz} \right)^6 (z^2 u(z)) \Big|_{z=0} = 0$$

を考へる。 どのどの場合次のような1次級数で表わされる
形式解を考へる。

$$(1.4) \quad u_R(z, \lambda) = \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{336} v(z, \lambda)$$

$$(1.5) \quad u_S(-z, \lambda) = z^{-2} + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{264} w(z, \lambda)$$

たゞし

$$(1.6) \quad \begin{aligned} v(z, \lambda) &= \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} z^{5j-2} (\lambda z^{10})^{k+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l(\lambda) z^{5l+8} \end{aligned}$$

$$A_l(\lambda) = \sum_{j+2k=l} a_{j,k} \lambda^{k+1} \quad (\lambda \text{ の } [\frac{l}{5}] + 1 \text{ 次 の 多項式})$$

$$(1.18) \quad v(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z) \lambda^{k+1}$$

$$(1.19) \quad w(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) \lambda^{k+1}$$

と 7 3 2

$$(1.20) \quad v_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} z^{5j+10k+8} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$(1.21) \quad w_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j,k} z^{5j+10k+8} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

27 3 か (1.8), (1.12) 27 9 3 2

$$(1.22) \quad v_0(z) = z^8 {}_1F_2\left(1; \frac{12}{5}, \frac{13}{5}; \frac{2}{25} z^5\right)$$

$$(1.23) \quad w_0(z) = z^8 {}_1F_2\left(1; \frac{7}{5}, \frac{16}{5}; \frac{2}{25} z^5\right)$$

27 3. ${}_1F_2$ は Pochhammer の超幾何関数

$${}_1F_2(1; p, q; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p(p)_j p(q)_j}{p(p+j)p(q+j)} z^j$$

27 3. (1.18) 2 (1.16) 2 (1.19) 2 (1.17) 2 $\pi \lambda$ 7 3 2

$$(1.24) \quad \begin{cases} L v_0 = 56 z^6 \\ L v_{k+1} = \frac{1}{56} \sum_{k_1+k_2=k} v_{k_1} v_{k_2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$(1.25) \quad \begin{cases} M w_0 = 44 z^6 \\ M w_{k+1} = \frac{1}{44} \sum_{k_1+k_2=k} w_{k_1} w_{k_2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

1 次級数 $u_R(z, \lambda)$, $u_S(z, \lambda)$ の収束半径をそれぞれ $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ とする。以下のは $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ に対する漸近評価を求めることである。

§2 漸化式と係数, 評価。

任意の λ に対して $R(\lambda) > 0$, $S(\lambda) > 0$ であることは (1.11) (1.15) よりすぐわかる。(1.11), (1.15) より次の評価が得られる。

定理 2.1

$|\lambda| \geq 1$ のとき

$$(2.1) \quad |A_l(\lambda)| \leq C_R^l |\lambda|^{\frac{l}{2}+1} \quad (l=0, 1, 2, \dots)$$

$$(2.2) \quad |B_l(\lambda)| \leq C_S^l |\lambda|^{\frac{l}{2}+1} \quad (l=0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。ただし

$$C_R = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{153} + \sqrt{\frac{1}{153^2} + \frac{1}{1260}} \right] \doteq 0.0177279$$

$$C_S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{147} + \sqrt{\frac{1}{147^2} + \frac{1}{1155}} \right] \doteq 0.0185016$$

$$(2.3) \quad R(\lambda) \geq C_R^{-\frac{1}{5}} |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \quad (|\lambda| \geq 1)$$

$$(2.4) \quad S(\lambda) \geq C_S^{-\frac{1}{5}} |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \quad (|\lambda| \geq 1)$$

特に $\lambda = 1$ $a \in \mathbb{Z}$

$$(2.5) \quad R = R(1) \geq C_R^{-\frac{1}{5}} \doteq 2.2401082$$

$$(2.6) \quad \hat{S} = \hat{S}(1) \geq C_S^{-\frac{1}{5}} \doteq 2.22105$$

又次の評価が成り立つ。

$$(2.7) \quad |u_R(z, \lambda)| \leq u(|z|, |\lambda|) \leq \frac{1}{6}|z|^3 + \frac{1}{336}|\lambda||z|^8 \left(1 - C_R |\lambda|^{\frac{1}{5}} |z|^{\frac{1}{5}}\right)^{-1} \\ \left(|z| < C_R^{-\frac{1}{5}} |\lambda|^{-\frac{1}{10}}\right)$$

$$(2.8) \quad |u_S(z, \lambda)| \leq u_S(-|z|, |\lambda|) \leq \\ \leq |z|^{-2} + \frac{1}{6}|z|^3 + \frac{1}{264}|\lambda||z|^8 \left(1 - C_S |\lambda|^{\frac{1}{5}} |z|^{\frac{1}{5}}\right)^{-1} \\ \left(|z| < C_S^{-\frac{1}{5}} |\lambda|^{-\frac{1}{10}}\right)$$

§3 Weierstrass の ρ 関数を述べ、上評価。

この節の結果として得られる $R, \hat{S}$ に関する上からの評価は次節の結果より悪いか。二節の結果もこれからの意味はあつたかと思ふ。Weierstrass の ρ 関数 $\rho(z; g_2, g_3)$ に対して

$$(3.1) \quad \frac{3}{2} z^{-1} \left[\rho(z^{\frac{1}{2}}; g_2, g_3) - z^{-1} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l$$

と Taylor 展開がして 係数の次の漸化式が成り立つ。

$$(3.2) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{3}{40} g_2, & a_1 = \frac{3}{56} g_3 \\ a_{l+2} = \frac{1}{(l+1)(l+\frac{9}{2})} \sum_{k+l_2=l} a_{k_1} a_{k_2} \quad (l=0,1,2,\dots) \end{cases}$$

(1.11) と見くらべると $\lambda > 0$ のとき

$$(3.3) \quad g_2 = \frac{51}{1428}, \quad g_3 = \frac{1}{15912}$$

と得られ

$$(3.4) \quad A_l(\lambda) \geq 3808 a_l \quad (l=0,1,2,\dots)$$

がわかる。又 (1.15) とくらべると $\lambda > 0$ のとき

$$(3.5) \quad g_2 = \frac{51}{1078}, \quad g_3 = \frac{1}{11088}$$

と得られ

$$(3.6) \quad B_l(\lambda) \geq \frac{8624}{3} a_l \quad (l=0,1,2,\dots)$$

を得る。したがって、2 次の評価が得られる。

定理 3.1

$\lambda > 0$ とする。 $0 \leq x < R(\lambda)$ のとき $g_2, g_3 \in (3.3)$

が成り立つ。

$$(3.7) \quad u_R(x, 1) \geq \frac{1}{6}x^3 + 17x^3 \left[p(x^{\frac{5}{6}}; g_2, g_3) - x^{-5} \right]$$

又 $g_2, g_3 \in (3.5)$ と定めると $0 \leq x < \delta(1)$ のとき

$$(3.8) \quad u_S(-x, 1) \geq x^{-2} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{49}{3}x^3 \left[p(x^{\frac{5}{6}}; g_2, g_3) - x^{-5} \right]$$

さききの評価を利用すると $\lambda = 1$ と $\lambda = 12$ $R = R(1)$, $S = S(1)$ に対する上からの評価を導くことが出来る。いずれの場合も

$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$ とするのとき $x^3 - \frac{g_2}{4}x - \frac{g_3}{4} = 0$ の3根 $e_1, e_2 (= \bar{e}_2), e_3 = \bar{e}_1$ ($\operatorname{Im} e_1 > 0$) と定め

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{Re}(e_2 - e_3)}{|e_2 - e_3|} \right)$$

とすると

$$2\tilde{\omega} = \frac{2K(\tilde{k})}{|e_2 - e_3|^{1/2}} \quad (K: \text{第一種完全楕円積分})$$

が $p(x; g_2, g_3)$ の正の実軸上にあり、 x -平面原点に近づく異点となる。 $(2\tilde{\omega})^{2/5}$ が R (又は S) に対する上からの評価を与えらる。このようにして求めた評価は

$$(3.9) \quad R \leq 2.823377292$$

$$(3.10) \quad S \leq 2.750776182$$

§ 4 微分方程式を用いて評価

$\lambda > 0$ とする。前節で示したように $0 < R(\lambda), S(\lambda) < \infty$ である。

$$(4.1) \quad \lim_{x \rightarrow R(\lambda)-0} v(x, \lambda) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow S(\lambda)-0} w(x, \lambda) = +\infty$$

また $A_2(\lambda) > 0, B_2(\lambda) > 0$ (4.1) に注意すると (4.16) (4.17) より

$$(4.2) \quad v''(x, \lambda) \geq \frac{1}{56} v^2(x, \lambda) \quad (0 \leq x < R(\lambda))$$

$$(4.3) \quad w''(x, \lambda) \geq \frac{1}{44} w^2(x, \lambda) \quad (0 \leq x < S(\lambda))$$

が従う。この微分方程式より次の結果を得る。

定理 4.1

$\lambda > 0$ とする。次の不等式が成り立つ。

$$(4.4) \quad v(x, \lambda) \leq 336 (R(\lambda) - x)^{-2} \quad (0 \leq x < R(\lambda))$$

$$(4.5) \quad w(x, \lambda) \leq 264 (S(\lambda) - x)^{-2} \quad (0 \leq x < S(\lambda))$$

2.2.5 の不等式から

$$(4.6) \quad v(x, \lambda) \geq a_{j,k} \lambda^{k+1} x^{5j+10k+8} \quad (0 \leq x < R(\lambda))$$

$$(4.7) \quad w(x, \lambda) \geq b_{j,k} \lambda^{k+1} x^{5j+10k+8} \quad (0 \leq x < S(\lambda))$$

を組み合せる

$$(4.8) \quad R(\lambda) \leq \left[\frac{336}{a_{jk} \lambda^{k+1}} f_{jk}(\xi) \right]^{\frac{1}{5j+10k+10}} \quad (0 < \xi < 1)$$

$$(4.9) \quad S(\lambda) \leq \left[\frac{264}{b_{jk} \lambda^{k+1}} f_{jk}(\xi) \right]^{\frac{1}{5j+10k+10}} \quad (0 < \xi < 1)$$

を得る。ところで

$$f_{jk}(\xi) = (1-\xi)^{-2} \xi^{-(5j+10k+8)}$$

である。

$$(4.10) \quad \min_{0 < \xi < 1} f_{jk}(\xi) = \left(\frac{5j+10k+10}{5j+10k+8} \right)^{5j+10k+10} \left(\frac{5j+10k+8}{2} \right)^2$$

であるから結局次の不等式を得る。

$$(4.11) \quad R(\lambda) \leq \frac{5j+10k+10}{5j+10k+8} \left[\frac{84(5j+10k+8)^2}{a_{jk} \lambda^{k+1}} \right]^{\frac{1}{5j+10k+10}}$$

$$(4.12) \quad S(\lambda) \leq \frac{5j+10k+10}{5j+10k+8} \left[\frac{66(5j+10k+8)^2}{b_{jk} \lambda^{k+1}} \right]^{\frac{1}{5j+10k+10}}$$

(j, k = 0, 1, 2, \dots)

(j, k = 0, 1, 2, \dots)

j=k=0 と 1 ≤ a₀₀ = 1, b₀₀ = 1 なるとき

定理 4.2

λ > 0 とするとき 次の不等式が成り立つ。

$$(4.13) \quad R(\lambda) \leq \frac{5}{4} (5376)^{\frac{1}{10}} \lambda^{-\frac{1}{10}}$$

$$(4.14) \quad S(\lambda) \leq \frac{5}{4} (4224)^{\frac{1}{10}} \lambda^{-\frac{1}{10}}$$

特に $\lambda=1$ とすると

$$(4.15) \quad R \leq \frac{5}{4} (5376)^{\frac{1}{10}} \doteq 2.9509125$$

$$(4.16) \quad S \leq \frac{5}{4} (4224)^{\frac{1}{10}} \doteq 2.8806$$

2 の評価は前節の結果よりよい。より (4.11) (4.12) にあて

て $k=0$ とし (1.8) (1.12) に注意すると

$$R(\lambda) \leq \frac{5\lambda^{10}}{5\lambda^8} \left[\frac{84(5\lambda+8)^2 \Gamma(\lambda+\frac{12}{5}) \Gamma(\lambda+\frac{13}{5})}{\Gamma(\frac{12}{5}) \Gamma(\frac{13}{5})} \left(\frac{25}{2}\right)^{\lambda} \right]^{\frac{1}{5\lambda^{10}}} \lambda^{-\frac{1}{5\lambda^{10}}}$$

$$S(\lambda) \leq \frac{5\lambda^{10}}{5\lambda^8} \left[\frac{66(5\lambda+8)^2 \Gamma(\lambda+\frac{9}{5}) \Gamma(\lambda+\frac{16}{5})}{\Gamma(\frac{9}{5}) \Gamma(\frac{16}{5})} \left(\frac{25}{2}\right)^{\lambda} \right]^{\frac{1}{5\lambda^{10}}} \lambda^{-\frac{1}{5\lambda^{10}}}$$

より得る。ガンマ関数に對する Stirling の公式を用いると

$$R(\lambda), S(\lambda) \leq \text{const } j^{\frac{2}{5}} \lambda^{-\frac{1}{5\lambda^{10}}} \quad (\lambda > 0, j=1, 2, 3, \dots)$$

となる。 $j \leq \frac{1}{5} \log \lambda < j+1$ とする。 j と $j+1$ の間の整数 j をとる。

定理 4.3

適当な $\lambda_0 > 0$ に対し λ の評価が成り立つ。

$$(4.17) \quad R(\lambda), S(\lambda) \leq \text{const} \left(\log \frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (0 < \lambda < \lambda_0)$$

少しの差を λ に与えれば R, S を評価する という最初の向
題に立ちかえろう。(4.4), (4.5) に

$$(4.18) \quad v(x, \lambda) \geq A_\ell(\lambda) x^{5\ell+8} \quad (0 \leq x < R(\lambda))$$

$$(4.19) \quad w(x, \lambda) \geq B_\ell(\lambda) x^{5\ell+8} \quad (0 \leq x < S(\lambda))$$

と組み合わせると

$$(4.20) \quad R(\lambda) \leq \left[\frac{336}{A_\ell(\lambda)} g_\ell\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right]^{\frac{1}{5\ell+10}} \quad (0 < \frac{\lambda}{2} < 1)$$

$$(4.21) \quad S(\lambda) \leq \left[\frac{264}{B_\ell(\lambda)} g_\ell\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right]^{\frac{1}{5\ell+10}} \quad (0 < \frac{\lambda}{2} < 1)$$

を得る。ところで

$$g_\ell\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^{-2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-(5\ell+8)}$$

と可なり

$$(4.22) \quad \min_{\lambda/2 < 1} g_\ell\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \left(\frac{5\ell+10}{5\ell+8}\right)^{5\ell+10} \left(\frac{5\ell+8}{2}\right)^2$$

より

$$(4.23) \quad R(\lambda) \leq \frac{5\ell+10}{5\ell+8} \left[\frac{84(5\ell+8)^2}{A_\ell(\lambda)} \right]^{\frac{1}{5\ell+10}} \quad (\ell=0, 1, 2, \dots)$$

$$(4.24) \quad \bar{S}(l) \leq \frac{5l+10}{5l+8} \left[\frac{66(5l+8)^2}{B_l(l)} \right]^{\frac{1}{5l+10}} \quad (l=0, 1, 2, \dots)$$

収束半徑を与える Cauchy-Hadamard の公式に於て

(4.23) (4.24) の右辺の $l \rightarrow +\infty$ としたときの下限は

それぞれ等式の左辺に等しい。したがって、次の結論を得る。

定理 4.4

任意の m に対して

$$(4.25) \quad R(l) = \inf_{l \geq m} \frac{5l+10}{5l+8} \left[\frac{84(5l+8)^2}{A_l(l)} \right]^{\frac{1}{5l+10}}$$

$$(4.26) \quad \bar{S}(l) = \inf_{l \geq m} \frac{5l+10}{5l+8} \left[\frac{66(5l+8)^2}{B_l(l)} \right]^{\frac{1}{5l+10}}$$

ここで (4.23) (4.24) は単に $R(l), \bar{S}(l)$ に対して上界を与えているだけである。原理的にはいくらでもよい近似値を与えられるということであった。しかし実際に数値を求めようと思うと計算可能なのは最初の有限個の l だけであるから、どれだけの良い値が得られるかは実際に計算を実行してみなければわからない。 $l=1$ の場合我々の所の計算機的能力の限界まで計算した結果は 以下に示すように (3.9) (3.10) (4.15) (4.16) と比較して格段に良い結果を得た。(4.23) (4.24) の右辺をそれぞれ $\bar{R}_l(l), \bar{S}_l(l)$ とし、特に $l=1$ のとき $\bar{R}_l(1) = \bar{R}_l, \bar{S}_l(1) = \bar{S}_l$ と書くことにする。

$0 \leq l \leq 46$ の範囲で $\bar{R}_l, \bar{S}_l$ の等調減少であり、

$$\bar{R}_{45} = 2.66568072747$$

$$\bar{S}_{46} = 2.60813485108$$

1 から、2 十分程度とりをも、2 下の評価が与えられる。

$$(4.27) \quad R \leq 2.666$$

$$(4.28) \quad S \leq 2.609$$

§ 5 非線型変形1次元方程式とみなし2の評価。

(1.16) (1.17) は非線型変形1次元方程式とみなせる。

$$(5.1) \quad \zeta = \frac{2\sqrt{2}}{5} z^{\frac{5}{2}}$$

$$V(\zeta) = 350\zeta V(z), \quad W(\zeta) = 275\zeta W(z)$$

とすると (1.16), (1.17) は

$$(5.2) \quad V'' + \frac{1}{\zeta} V' - \left(1 + \frac{1}{25\zeta^2}\right) V = \frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{\zeta} V^2$$

$$(5.3) \quad W'' + \frac{1}{5}W' - \left(1 + \frac{49}{25z^2}\right)W = \frac{1}{4}z + \frac{1}{5}W^2$$

とすると、非線形項を含む右辺を非齊次項とすると、左辺は $1/5$ 次、あるいは $7/5$ 次変形ベッセル方程式である。非線形方程式 (1.16) (1.17) は無限個の線形方程式 (1.24) (1.25) に分解して与えられる。微分作用素 L および M に対応する基本解 $\{I_R(z), K_R(z)\}$, $\{I_S(z), K_S(z)\}$ の次のように与えられる。

$$(5.4) \quad \begin{cases} I_R(z) = z^{\frac{1}{2}} I_{1/5} \left(\frac{2\sqrt{z}}{5} z^{\frac{5}{2}} \right) \\ K_R(z) = z^{\frac{1}{2}} K_{1/5} \left(\frac{2\sqrt{z}}{5} z^{\frac{5}{2}} \right) \end{cases}$$

$$(5.5) \quad \begin{cases} I_S(z) = z^{\frac{1}{2}} I_{7/5} \left(\frac{2\sqrt{z}}{5} z^{\frac{5}{2}} \right) \\ K_S(z) = z^{\frac{1}{2}} K_{7/5} \left(\frac{2\sqrt{z}}{5} z^{\frac{5}{2}} \right) \end{cases}$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ は ν 次変形ベッセル関数である。
左辺の $0 \leq \nu < \infty$ は次のように与えられる。

$$(5.6) \quad I_R'(z) K_R(z) - I_R(z) K_R'(z) = \frac{5}{2}$$

$$(5.7) \quad I_S'(z) K_S(z) - I_S(z) K_S'(z) = \frac{5}{2}$$

(1.24) (1.25) を定数変換法で解く。

$$(5.8) \quad v_0(z) = A_R I_R(z) - \frac{112}{5} \left[I_R(z) \int_z^\infty K_R(t) t^6 dt + K_R(z) \int_0^z I_R(t) t^6 dt \right]$$

$$(5.9) \quad w_0(z) = A_S I_S(z) - \frac{88}{5} \left[I_S(z) \int_z^\infty K_S(t) t^6 dt + K_S(z) \int_0^z I_S(t) t^6 dt \right]$$

と作る。右に定数 A_R, A_S は

$$(5.10) \quad A_R = 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 5^3 \cdot \Gamma(\frac{1}{5}) \Gamma(\frac{13}{5}) = \frac{336\pi}{5\sqrt{5+5}} \div 78.481596$$

$$(5.11) \quad A_S = 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 5^3 \cdot \Gamma(\frac{9}{5}) \Gamma(\frac{16}{5}) = \frac{264\pi}{5\sqrt{5-5}} \div 99.774627$$

と計算する。これは次の W. B. Ford の公式に等しい。

$$(5.12) \quad {}_1F_2(1; p, q; z) \sim \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\sqrt{\pi}} z^{\frac{3}{4} - \frac{p+q}{2}} e^{2z^{\frac{1}{2}}} \quad z \rightarrow +\infty$$

同様にして

$$(5.13) \quad v_{k+1}(z) = \frac{1}{140} \int_0^z \left[I_R(z) K_R(t) - I_R(t) K_R(z) \right] \sum_{k_1+k_2=k} v_{k_1}(t) v_{k_2}(t) dt$$

($k=0, 1, 2, \dots$)

$$(5.14) \quad w_{k+1}(z) = \frac{1}{110} \int_0^z \left[I_S(z) K_S(t) - I_S(t) K_S(z) \right] \sum_{k_1+k_2=k} w_{k_1}(t) w_{k_2}(t) dt$$

($k=0, 1, 2, \dots$)

を得る。

$$I_R(t), K_R(t), I_S(t), K_S(t) > 0 \quad (t > 0)$$

$$I_R(z)K_R(t) - I_R(t)K_R(z) > 0, \quad I_S(z)K_S(t) - I_S(t)K_S(z) > 0 \quad (0 < t < z)$$

以上より $x \geq 0$ のとき次の不等式を得る。

$$(5.15) \quad v_0(x) \leq A_R I_R(x)$$

$$(5.16) \quad v_{k+1}(x) \leq \frac{1}{140} I_R(x) \int_0^x K_R(t) \sum_{k_1+k_2=k} v_{k_1}(t) v_{k_2}(t) dt$$

($k=0, 1, 2, \dots$)

$$(5.17) \quad w_0(x) \leq A_S I_S(x)$$

$$(5.18) \quad w_{k+1}(x) \leq \frac{1}{110} I_S(x) \int_0^x K_S(t) \sum_{k_1+k_2=k} w_{k_1}(t) w_{k_2}(t) dt$$

($k=0, 1, 2, \dots$)

次の量

$$(5.19) \quad B_R = \frac{1}{140} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K_R(t) I_R^2(t)}{\frac{d}{dt} (t^{-\frac{1}{2}} I_R(t))}$$

$$= \frac{1}{140\sqrt{2}} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_{1/2}(s) I_{1/2}^2(s)}{I'_{1/2}(s)}$$

$$(5.20) \quad B_S = \frac{1}{110} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K_S(t) I_S^2(t)}{\frac{d}{dt} (t^{-\frac{1}{2}} I_S(t))}$$

$$= \frac{1}{110\sqrt{2}} \sup_{s>0} \frac{K_{7/5}(s) I_{7/5}^2(s)}{I_{7/5}'(s)}$$

が有限となることを注意すると上の不等式 (5.15) ~ (5.18) より次の不等式が従う。

定理 5.1

定数 A_R, B_R, A_S, B_S 以上のようにとおくと $\alpha \geq 0$ のとき次の不等式が成り立つ。

$$(5.21) \quad 0 \leq v_k(\alpha) \leq A_R I_R(\alpha) \left[A_R B_R \alpha^{-\frac{1}{2}} I_R(\alpha) \right]^k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$(5.22) \quad 0 \leq w_k(\alpha) \leq A_S I_S(\alpha) \left[A_S B_S \alpha^{-\frac{1}{2}} I_S(\alpha) \right]^k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

したがって、2次の評価を得る。

定理 5.2

$$|z|^{-\frac{1}{2}} I_R(|z|) = I_{1/5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} |z|^{\frac{5}{2}} \right) < \frac{1}{|z| A_R B_R}$$

とすると

$$(5.23) \quad |u_R(z, \lambda)| \leq u_R(|z|, |\lambda|) \leq$$

$$\leq \frac{1}{6} |z|^3 + \frac{1}{336} |\lambda| A_R I_R(|z|) \left[1 - |\lambda| A_R B_R |z|^{-\frac{1}{2}} I_R(|z|) \right]^{-1}$$

$$|z|^{-\frac{1}{2}} I_P(|z|) = I_{7/5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} |z|^{\frac{5}{2}} \right) < \frac{1}{|\lambda| A_P B_P}$$

と可なり

$$(5.24) \quad |u_P(z, \lambda)| \leq u_P(-|z|, |\lambda|) \leq$$

$$\leq |z|^{-2} + \frac{1}{6} |z|^3 + \frac{1}{264} |\lambda| A_P I_P(|z|) \left[1 - |\lambda| A_P B_P |z|^{-\frac{1}{2}} I_P(|z|) \right]^{-1}$$

又拘束半経 $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ は次の不等式を満たす。

$$(5.25) \quad I_{1/5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} R(\lambda)^{\frac{5}{2}} \right) \geq \frac{1}{|\lambda| A_R B_R}$$

$$(5.26) \quad I_{7/5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} S(\lambda)^{\frac{5}{2}} \right) \geq \frac{1}{|\lambda| A_S B_S}$$

すなわち $\lambda \rightarrow +0$ と可なり $R(\lambda), S(\lambda) \rightarrow +\infty$ と可なり。

$$I_{1/5}(z), I_{7/5}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \quad (z \rightarrow +\infty)$$

これらの漸近挙動が知られてゐる (ついでにこの公称も W.B. Ford の公称から従う) ので上の (5.25) (5.26) から次の評価が従う。

定理 5.3

適当な $\lambda_0 > 0$ に対して

$$(5.27) \quad R(\lambda), \hat{S}(\lambda) \geq \left(\frac{5}{2\sqrt{2}} \log \frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (0 < \lambda \leq \lambda_0)$$

が成り立つ。

今までの結果 (2.3) (2.4) (4.13) (4.14) (4.17) (5.2) を合わせ
せよ

定理

const. は適当な正定数と表わすものとする。次の不等式が成り立つ

$$\text{const } |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \leq R(\lambda), \hat{S}(\lambda) \leq \text{const } |\lambda|^{-\frac{1}{10}} \quad (|\lambda| \geq \lambda_0)$$

$$\text{const } \left(\log \frac{1}{|\lambda|} \right)^{\frac{2}{5}} \leq R(\lambda), \hat{S}(\lambda) \leq \text{const } \left(\log \frac{1}{|\lambda|} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (|\lambda| \leq \lambda_0)$$

これは

$$U(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{5/7 + 10k + 8} \lambda^{k+1}$$

$$W(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{5/7 + 10k + 8} \lambda^{k+1}$$

と二変数 (z, λ) のべき級数とみえたとその南連収束半径

$(R(\lambda), \lambda)$ $(\hat{S}(\lambda), \lambda)$ $(\lambda > 0)$ とおくと十分満足な

近似結論が得られる。このように精密な結論が得られるという

意味で、本稿の (1.1) は Painlevé I 型方程式と同様に

十分興味ある研究対象といえるであろう。

R, ρ を評価する という本節にもどろう。(5.25) (5.26) にあいて $\lambda=1$ とすると

$$(5.28) \quad I_{1/5} \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} R^{\frac{5}{2}} \right) \geq \frac{1}{A_R B_R}$$

$$(5.29) \quad I_{7/5} \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} \rho^{\frac{5}{2}} \right) \geq \frac{1}{A_\rho B_\rho}$$

なる評価を得る。これは R, ρ に対する下からの評価であるが、実際に数値を求めるときは B_R, B_ρ を数値的に求めなければならぬ。これは目下実行中の議論に至る。正しい。しかし上の評価は W.B. Ford の公式という定量的な式でも大要係数の公式に基づいて、そのうちの中の評価もどこまで正しいかについては置いておく。(2.5), (2.6) よりかなりよい結果が得られるものと期待している。

最後に、シンボリックでは Painlevé II 型方程式にも言及したが、ここは紙数もつぎなので省略する。

数値計算をしていただいた 野田松太郎氏に感謝し、この筆をおく。

(10) の証明はやさしいので省略した。