

局所体上の曲面の上の 0 サイクルに対する 弱い MOREDELL-WEIL 型問題について

佐藤 周友

(KANETOMO SATO)

今回の研究集会に於いて発表の場を下さいました橋本喜一朗先生に心より感謝申し上げます. 本稿の内容は東京大学大学院数理科学研究科の齋藤秀司氏との共同研究 [8] によるものです.

序

代数体上のスムーズな代数多様体 X の Picard 群 $\text{Pic}(X)$ は Picard 多様体と呼ばれるアーベル多様体の有理点の群 $\text{Pic}^0(X)$ を部分群として含んでいる. Néron-Severi 群 $\text{NS}(X) = \text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$ は有限生成アーベル群であり, 群 $\text{Pic}^0(X)$ も Mordell-Weil の定理によって有限生成アーベル群である. 従って Picard 群 $\text{Pic}(X)$ は有限生成アーベル群である. この事実を Chow 群 $\text{CH}^q(X)$ ($q \in \mathbb{N}$) に拡張できるかどうかを問うのは至って素朴なことである ($\text{CH}^1(X) \simeq \text{Pic}(X)$ である). この問題は 1970 年代に Bass [1] によって代数的 K 群の問題として提起されたが, 後に Beilinson [2] によってサイクル写像 (Abel-Jacobi 写像) の問題としても定式化されている.

本稿では, p 進体 k 上スムーズかつ射影的な代数曲面 X の 0 サイクルの Chow 群 $\text{CH}_0(X) = \text{CH}^2(X)$ について, 次のような類似の問題を考える.

問題 1. 自然数 n について $\text{CH}_0(X)/n$ が有限アーベル群であることを示せ.

この問題は次の場合に正しいことが知られている:

- 幾何種数 $p_g(X)$ が 0 で, かつ小平次元 κ_X が 1 以下である場合
(Bloch-Kas-Lieberman [3], Salberger [10], Colliot-Thélène-Raskind [4])
- $(n, p) = 1$ の場合 (Saito-Sujatha [9])
- X が 2 つ曲線の積である場合 (Raskind-Spiess [7])

本稿では $n = p^r$ ($r \geq 1$) の場合に問題 1 への 1 つのアプローチを与える. より正確には, X が半安定還元を持つものと仮定し, その条件下で問題 1 をある Nisnevich 層の脆弱性の問題 (§2 の予想 4, §3 の予想 9 参照) に帰着させる方法について解説

したい. 特に, §3 の予想 9 は「3 次元ヘンゼル局所環の分数体の Milnor K 群に元をたくさん作れ」という比較的具体的な問題である.

記号

スキームのコホモロジーは特に断らない限り全てエタールコホモロジーである.

体上または整数環上有限型かつ整なスキーム Y と自然数 q に対して, Chow 群 $\mathrm{CH}^q(Y)$ を次で定義する:

$$\mathrm{CH}^q(Y) := \mathrm{Coker} \left(\bigoplus_{x \in Y^{q-1}} \kappa(x)^\times \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in Y^q} \mathbb{Z} \right).$$

ここで, Y^m は Y 上余次元 m の点全体のなす集合, 点 $x \in Y$ に対し $\kappa(x)$ は局所環 $\mathcal{O}_{Y,x}$ の剰余体, ∂ は離散付置による写像である. $q=1$ の場合 $\mathrm{CH}^1(Y)$ は Weil 因子類群である. Y が正則ならば, Y 上の Weil 因子 D に可逆層 $\mathcal{O}_Y(D)$ を対応させることにより同型写像 $\mathrm{CH}^1(Y) \simeq \mathrm{Pic}(Y)$ が得られる.

1. $\mathrm{CH}^1(X)/n$ の有限性

k を p 進体とし, X を k 上スムーズな多様体とする. 自然数 n に対して群 $\mathrm{CH}^1(X)/n \simeq \mathrm{Pic}(X)/n$ の有限性がどのようにして示されるかを復習しよう. μ_n を 1 の n 乗根達のなす X 上のエタール層, $\mathbb{G}_m$ を可逆関数達のなす X 上のエタール層とすると, X 上のエタール層の Kummer 列

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\times n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

がある. エタールコホモロジーを取ると長完全列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) &\xrightarrow{\times n} H^1(X, \mathbb{G}_m) \\ &\xrightarrow{\delta} H^2(X, \mu_n) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

が得られる. Hilbert の定理 90 によって

$$H^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq H^1(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{O}_X^\times) (= \mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{CH}^1(X))$$

なので, サイクル写像

$$\mathrm{CH}^1(X)/n \simeq H^1(X, \mathbb{G}_m)/n \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mu_n)$$

は単射である. 故に右辺の $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^2(X, \mu_n)$ の有限性が分かればよいが, これは閉体上の多様体のエタールコホモロジーの有限性と局所体のガロアコホモロジーの有限性から導かれる.

以上が $\mathrm{CH}^1(X)/n$ の有限性の証明であるが, この議論をそのまま次数 2 以上の Chow 群 $\mathrm{CH}^q(X)$ ($q \geq 2$) に当て嵌めようとする, サイクル写像

$$\mathrm{CH}^q(X)/n \longrightarrow H^{2q}(X, \mu_n^{\otimes q})$$

の単射性の問題に行き着く. 一般にこの写像の核を直接計算するのは非常に困難である. そこで登場するのがモデルのサイクル写像である. 以下では $q = 2$ かつ n が p の冪である場合に焦点を絞って話を進める.

2. モデルの p 進サイクル写像

k を p 進体とし, X を k 上スムーズかつ射影的な代数曲面とする. 以下では X について次の条件を仮定する.

(*) X は $\mathfrak{O}_k$ 上固有 (proper) な正則半安定モデル $\mathfrak{X}$ を持つ.

この条件下では, 自然数 $r \geq 1$ に対して p 進 Tate 捻りと呼ばれる $\mathfrak{X}$ 上の $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ 加群のエタール層の複体 $\mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{x}}$ があり ([11] 参照), エタール層 $\mu_{p^r}^{\otimes 2}$ ($\ell \neq p$) の p 進類似を与える. まず purity と呼ばれる次のような (局所的) 性質がある:

$$H_x^m(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{x}}) \simeq \begin{cases} H^m(x, \mu_{p^r}^{\otimes 2}) & (c = 0 \text{ のとき}) \\ \kappa(x)^\times / p^r & (c = 1 \text{ かつ } m = 3 \text{ のとき}) \\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} & (c = 2 \text{ かつ } m = 4 \text{ のとき}) \\ 0 & (m < \min\{2c, c+2\} \text{ のとき}). \end{cases}$$

ただし c は x の X における余次元 (=局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の次元) を表す. これらの同型を用いてスペクトル系列

$$E_1^{u,v} = \bigoplus_{x \in X^u} H_x^{u+v}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{x}}) \implies H^{u+v}(\mathfrak{X}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{x}})$$

を計算すると, 次のような完全列が得られる:

$$(2.1) \quad \cdots \longrightarrow E_2^{3,0} \longrightarrow \mathrm{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r \xrightarrow{\rho_r} H^4(\mathfrak{X}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{x}}) \longrightarrow \cdots$$

ただし次の同型を用いた:

$$\begin{aligned} E_2^{2,2} &= \mathrm{Coker}(E_1^{1,2} \rightarrow E_1^{2,2}) \\ &\simeq \mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{x \in \mathfrak{X}^1} \kappa(x)^\times / p^r \rightarrow \bigoplus_{x \in \mathfrak{X}^2} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}\right) \simeq \mathrm{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r. \end{aligned}$$

完全列 (2.1) の写像 ρ_r がモデル $\mathfrak{X}$ のサイクル写像である. $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{O}_k$ 上固有 (proper) であることから $H^4(\mathfrak{X}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{x}})$ は有限である ([11] の主結果の一つ). 従っても ρ_r が単射ならば $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r$ が有限, 故に自然な写像 $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathrm{CH}^2(X)$ が全射であることを考慮すると, $\mathrm{CH}^2(X)/p^r = \mathrm{CH}_0(X)/p^r$ も有限である.

以下では ρ_r の単射性を考えたい。残念ながら、完全列 (2.1) の写像 $E_2^{3,0} \rightarrow \mathrm{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r$ は計算が困難な写像である (前節の最後で述べた「核を直接計算するのは非常に困難である」というのはこれと同様の意味である)。もっと言うならば、完全列 (2.1) は $\mathfrak{X}$ が固有 (proper) であるという仮定を用いずに構成できる「生ぬるい」完全列である。ところが次の定理の完全列は $\mathfrak{X}$ の固有性 (properness) によって得られる「深い」完全列である。混乱を避けるため、以下ではコホモロジーの位相は省略せず明記する。

定理 2 (基本完全列). 次のような完全列がある:

$$H^1(Y_{\mathrm{Nis}}, i^* \eta_* R^2 \epsilon_* \mu_{p^r}^{\otimes 2}) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r \xrightarrow{\rho_r} H^4(\mathfrak{X}_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}}) \longrightarrow 0.$$

ただし記号は次の通りである:

Y : 構造射 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ の閉ファイバー

i : 閉埋入射 $Y \hookrightarrow \mathfrak{X}$

η : $\mathfrak{X}$ の生成点 (=関数体 K のスペクトラム) からの標準射 $\mathrm{Spec}(K) \hookrightarrow \mathfrak{X}$

ϵ : $\mathrm{Spec}(K)$ 上の Nisnevich サイトからエタールサイトへの連続写像。

注意 3. (1) スキーム Z の Nisnevich サイト Z_{Nis} とは、 Z 上エタールなスキーム達のなす圏 ($\acute{\mathrm{e}t}/Z$) と Nisnevich 被覆からなる Grothendieck サイトである。スキーム Z の Nisnevich 被覆とはエタール被覆 $\{f_i: U_i \rightarrow Z\}_{i \in I}$ であって次の条件を満たすものをいう:

$$(\forall x \in Z) (\exists i \in I, \exists y \in U_i) (f_i(y) = x \text{ and } \kappa(y) = \kappa(x)).$$

(2) Z が既約ならば Z の Nisnevich 被覆 $\{f_i: U_i \rightarrow Z\}_{i \in I}$ には必ず Z の開かつ稠密な部分集合が含まれる。これは Nisnevich 被覆の条件から従う。

(3) 定理 2 の Nisnevich 層 $R^2 \epsilon_* \mu_{p^r}^{\otimes 2}$ は、対応

$$(L/K: \text{有限次分離拡大体}) \longmapsto H_{\mathrm{Gal}}^2(L, \mu_{p^r}^{\otimes 2}) \quad (\text{ガロアコホモロジー})$$

を自然な方法で圏 ($\acute{\mathrm{e}t}/\mathrm{Spec}(K)$) 上の前層と見なすことで得られる層 (層化しなくてもそのまま Nisnevich 層になっている) と同じである。

定理 2 の証明の概略. 定理 2 の完全列は Leray 型スペクトル系列

$$E_2^{a,b} = H^a(Y_{\mathrm{Nis}}, R^b \epsilon_* i^* \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}}) \implies H^{a+b}(Y_{\mathrm{\acute{e}t}}, i^* \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}})$$

を計算することにより得られる。ただし ϵ はサイトの連続写像 $Y_{\mathrm{\acute{e}t}} \rightarrow Y_{\mathrm{Nis}}$ を表す。最初のキーポイントは次の 2 点である:

- $\mathfrak{X}$ の固有性 (properness) により同型

$$H^*(Y_{\mathrm{\acute{e}t}}, i^* \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}}) \simeq H^*(\mathfrak{X}_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}})$$

が成り立つ (エタールコホモロジーの重要な基本性質の一つ).

● 関手の自然変換

$$i^* R\alpha_* \longrightarrow R\epsilon_* i^*$$

が自然同値である. ただし α はサイトの連続写像 $\mathfrak{X}_{\text{ét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{Nis}}$ を表す.

これらの事実によって上のスペクトル系列は次のように書き換えられる:

$$E_2^{a,b} = H^a(Y_{\text{Nis}}, i^* R^b \alpha_* \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}}) \implies H^{a+b}(\mathfrak{X}_{\text{ét}}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}}).$$

Y が 2 次元であることから $E_2^{a,b}$ は $a \geq 2$ において 0. 特に完全列

$$E_2^{0,3} \longrightarrow E_2^{2,2} \xrightarrow{e} H^4(\mathfrak{X}_{\text{ét}}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}})$$

がある. 写像 e の余核は $E_3^{0,4}$ と $E_2^{1,3}$ によって記述される. 従って次の 2 点を示せばよい:

(1) $E_2^{0,3} = E_2^{1,3} = E_2^{0,4} = E_3^{0,4} = 0$. 故に e は全単射である.

(2) 次の完全列がある:

$$H^1(Y_{\text{Nis}}, i^* \eta_* R^2 \epsilon_* \mu_{p^r}^{\otimes 2}) \longrightarrow \text{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r \longrightarrow E_2^{2,2} \longrightarrow 0.$$

これらの証明の詳細は省略するが, (1) は $\mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}}$ のコホモロジー層達の計算と有限体上の曲面の関数体のある種の局所・大域原理 ([5], [6]) によって示される. (2) は $\mathfrak{X}$ 上の Nisnevich 層 $R^2 \alpha_* \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}}$ の Gersten 予想を (部分的に) 示すことにより導かれる. $\square$

定理 2 によって $\text{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r$ の有限性の問題は次の予想に帰着される:

予想 4. Y 上の Nisnevich 層

$$i^* \eta_* R^2 \epsilon_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2) := \varinjlim_{r \in \mathbb{N}} i^* \eta_* R^2 \epsilon_* \mu_{p^r}^{\otimes 2}$$

は脆弱 (flabby), すなわち, Y 上エタールな任意のスキーム U に対して

$$H^q(U_{\text{Nis}}, i^* \eta_* R^2 \epsilon_* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)) = 0 \text{ for } \forall q \geq 1$$

である. 特にサイクル写像

$$\rho_{\infty} : \text{CH}^2(\mathfrak{X}) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H^4(\mathfrak{X}_{\text{ét}}, \mathfrak{T}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(2)_{\mathfrak{X}}) := \varinjlim_{r \in \mathbb{N}} H^4(\mathfrak{X}_{\text{ét}}, \mathfrak{T}_r(2)_{\mathfrak{X}})$$

は単射である.

注意 5. (1) スタンダードな方法によって ρ_{∞} の単射性から $\text{CH}^2(\mathfrak{X})/p^r$ の有限性を導くことが可能である.

(2) 定理 2 と予想 4 の ℓ 進版 ($\ell \neq p$) は正しいことが判っている (注意 10 参照).

3. 予想 4 へのアプローチ

ここでは予想 4 の正当性について一つの考察を与え、予想 4 をより考えやすい形で定式化した予想 9 を述べたい。しばらくの間、 X は局所ネーターで有限次元かつ等次元なスキームとする。 $\mathcal{F}$ を X 上の Nisnevich 層とし、非負整数 $q \geq 0$ に対して部分前層 $N^q \mathcal{F}$ を対応

$$N^q \mathcal{F} : (U \rightarrow X : \text{エタール}) \mapsto \varinjlim_{Z \subset U : \text{codim} \geq q} \Gamma_Z(U, \mathcal{F})$$

で定義する。ここで右辺の Z は U の余次元 q 以上の閉部分スキーム全体を走る。

補題 6. (1) $N^q \mathcal{F}$ は自動的に X 上の Nisnevich 層、すなわち、 $\mathcal{F}$ の部分層である。

(2) 次の標準写像は単射である：

$$\beta^q : \text{gr}_N^q \mathcal{F} (:= N^q \mathcal{F} / N^{q+1} \mathcal{F}) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^q} i_{x*} i_x^* N^q \mathcal{F}.$$

ここで点 $x \in X$ に対して i_x は標準写像 $x \hookrightarrow X$ を表す。

(3) $q = \dim(X)$ ならば β^q は全単射である。

これらの主張は必ずしも自明ではないが、層に関するスタンダードな議論によって確かめることが出来る。証明はここでは省略する。

定義 7. X 上の Nisnevich 層 $\mathcal{F}$ がコニボー脆弱 (coniveau flabby) であるとは、全ての $0 \leq q \leq \dim(X)$ に対して β^q が全単射であるときをいう。補題 6 (2), (3) によって、この条件は全ての $0 \leq q \leq \dim(X) - 1$ に対して β^q が全射であることと同値である。

定義 7 から容易に次の 2 点が確かめられる：

- コニボー脆弱な Nisnevich 層は脆弱である。
- 正規スキーム上の Nisnevich 定数層はコニボー脆弱、特に脆弱である。

次の例はコニボー脆弱な Nisnevich 層の重要な例である。

例 8. k を p 進体、 $\mathcal{O}_k$ を k の整数環とする。 $\mathfrak{X}$ を $\mathcal{O}_k$ 上有限型かつ平坦な相対次元 1 の整スキームとする ($\mathfrak{X}$ は $\mathcal{O}_k$ 上の曲線の族で、自身は 2 次元である)。記号を次のように定める：

Y : 構造射 $\mathfrak{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ の閉ファイバー

i : 閉埋入射 $Y \hookrightarrow \mathfrak{X}$

η : $\mathfrak{X}$ の生成点 (= 関数体 K のスペクトラム) からの標準射 $\text{Spec}(K) \hookrightarrow \mathfrak{X}$

ε : $\text{Spec}(K)$ 上の Nisnevich サイトからエタールサイトへの連続写像。

このとき Y 上の Nisnevich 層 $i^*\eta_*R^1\varepsilon_*\mu_p$ はコニボー脆弱である. 実際, Y が 1 次元なので, 補題 6 (2), (3) により, 示すべきことは β^0 の全射性のみである. $\mathfrak{K}$ が正規ならばこの全射性はヘンゼル離散付置体の弱い近似定理から従う. $\mathfrak{K}$ が正規でない場合も正規な場合に帰着させることが容易にできる.

次の予想は例 8 の 3 次元類似である.

予想 9. 定理 2 と予想 4 の記号の下で, Y 上の Nisnevich 層 $i^*\eta_*R^2\varepsilon_*\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$ はコニボー脆弱である.

今度は Y が 2 次元なので, 示すべきことは β^0, β^1 の全射性である. β^0 の全射性はヘンゼル離散付置体の弱い近似定理から従う. 深刻なのはむしろ β^1 の全射性である. この問題は, 言い換えると「3 次元ヘンゼル局所環の分数体の Milnor K 群の中で β^0 の核に含まれるような元を十分たくさん作って β^1 の全射性を示せ」ということである.

注意 10. 予想 9 の ℓ 進版 ($\ell \neq p$) は正しい. 特に予想 4 の ℓ 進版も正しい.

注意 11. 予想 4 と予想 9 において $\mathfrak{K}$ の次元と層の次数の関係は重要である. 例えば, 予想 4 の状況で Nisnevich 層 $i^*\eta_*R^1\varepsilon_*\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$ を考えてもコニボー脆弱にはならない (実は脆弱層でもない).

REFERENCES

- [1] Bass, H.: Some problems in “classical” algebraic K -Theory. In: Bass, H. (ed.) “*Classical Algebraic K-theory and Connection with Arithmetic* (Lecture Notes in Math. 342), pp. 3–73, Berlin, Springer, 1973
- [2] Beilinson, A. A.: Height pairings between algebraic cycles. In: Manin, Yu. I. (ed.) *K-theory, Arithmetic and Geometry*, (Lecture Notes in Math. 1289), pp. 1–27, Berlin, Springer, 1987
- [3] Bloch, S., Kas, A., Lieberman, D.: Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$. *Compositio Math.* **33**, 135–145 (1976)
- [4] Colliot-Thélène, J.-L., Raskind, W.: Groupe de Chow de codimension deux des variétés sur un corps de nombres: Un théorème de finitude pour la torsion, *Invent. Math.* **105**, 221–245 (1991)
- [5] Colliot-Thélène, J.-L., Sansuc, J.-J., Soulé, C.: Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux. *Duke Math. J.* **50**, 763–801 (1983)
- [6] Kato, K.: A Hasse principle for two-dimensional global fields. (with an appendix by Colliot-Thélène, J.-L.), *J. Reine Angew. Math.* **366**, 142–183 (1986)
- [7] Raskind, W., Spiess, M.: Milnor K -groups and 0-cycles on products of curves. *Compositio Math.* **121**, 1–33 (2000)
- [8] Saito, S., Sato, K.: Weak Bloch-Beilinson conjecture for 0-cycles over p -adic fields. in preparation

- [9] Saito, S., Sujatha, R.: A finiteness theorem for cohomology of surfaces over p -adic fields and an application to Witt groups. In: Jacob, B., Rosenberg, A. (eds.) *Algebraic K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with quadratic forms and division algebras, Santa Barbara, 1992*, (Proc. of Sympos. Pure Math. 58, Part 2), pp. 403–416, Providence, Amer. Math. Soc., 1995
- [10] Salberger, P.: Torsion cycles of codimension two and ℓ -adic realizations of motivic cohomology. In: David, S. (ed.) *Séminaire de Théorie des Nombres 1991/92*, (Progr. Math. 116), pp. 247–277, Boston, Birkhäuser, 1993
- [11] Sato, K.: p -adic étale Tate twists and arithmetic duality (with an appendix by Hagihara, K.), preprint 2004
- [12] Yamazaki, T.: Formal Chow groups, p -divisible groups and syntomic cohomology. *Duke Math. J.* **102**, 359–390 (2000)

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY
FURO-CHO, CHIKUSA-KU, NAGOYA 464-8602, JAPAN
E-mail address: kanetomo@math.nagoya-u.ac.jp