

# Absolute norm の単調性とその応用<sup>1</sup>

三谷健一 (新潟工科大学工学部)

斎藤吉助 (新潟大学理学部)

小室直人 (北海道教育大学旭川校)

## 1 序文

$\mathbb{C}^2$  上のノルム  $\|\cdot\|$  が absolute であるとは, 任意の  $x, y \in \mathbb{C}$  に対して

$$\||x|, |y|\| = \|(x, y)\|$$

のときを言い, normalized であるとは  $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$  のときを言う.  $\ell_p$ -ノルム  $\|\cdot\|_p (1 \leq p \leq \infty)$  は最も基本的な例である:

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x|, |y|\}, & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

$AN_2$  を  $\mathbb{C}^2$  上の absolute normalized norm 全体とする. また,  $\Psi_2$  を以下を満たす  $[0, 1]$  上の連続凸関数全体とする:

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

[1] にあるように,  $AN_2$  と  $\Psi_2$  は

$$\psi(t) = \|(1-t, t)\| \tag{1}$$

の下で 1 対 1 対応であることが知られている. 実際, 任意の  $\psi \in \Psi_2$  に対して

$$\|(x, y)\|_\psi = \begin{cases} (|x| + |y|)\psi\left(\frac{|y|}{|x| + |y|}\right), & \text{if } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

<sup>1</sup>2000 *Mathematics Subject Classification*. 46B20.

*Keywords*. absolute normalized norm, Lorentz sequence space, uniformly non-square.

と定義すると  $\|\cdot\| \in AN_2$  であり, (1) を満たす. 例えば,  $\|\cdot\|_p$  ノルム ( $1 \leq p \leq \infty$ ) に対応する関数は

$$\psi_p(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + t^p)^{1/p}, & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{1-t, t\}, & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

である.

本論文では,  $\mathbb{C}^2$  上の absolute normalized ノルムの単調性を考察する. 2002 年, 高橋-加藤-斎藤 [12] は  $\mathbb{C}^2$  上の absolute normalized ノルム及び 2 個のバナッハ空間の  $\psi$ -直和空間の狭義凸性を調べる際に, absolute normalized ノルムの狭義の単調性を考察した. その単調性の結果を改良し, それに対応する関数  $\psi$  の形状との関係を表すことを目的とする. 応用として, バナッハ空間上に新しい幾何学的定数  $\gamma_{X,\psi}$  を導入し, 一様 non-square 性を持つバナッハ空間を  $\gamma_{X,\psi}$  を用いて評価する.

## 2 Absolute normalized ノルムの単調性

本章では,  $\mathbb{C}^2$  上の absolute normalized ノルムの単調性を考える. 次の命題に見られるように, absolute normalized ノルムはノルムの単調性を持つ.

**命題 1 ([1])**  $\psi \in \Psi_2$  とする. (i)  $|z| \leq |u|$ ,  $|w| \leq |v|$  ならば

$$\|(z, w)\|_\psi \leq \|(u, v)\|_\psi.$$

(ii)  $|z| < |u|$ ,  $|w| < |v|$  ならば

$$\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi.$$

しかし, 高橋-加藤-斎藤 [12] にあるように,  $\psi \in \Psi_2$  に対して一般に次は成立しない:  $|z| \leq |u|$ ,  $|w| \leq |v|$  とする.  $|z| < |u|$  または  $|w| < |v|$  ならば,

$$\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi. \quad (2)$$

例えば, (2) は  $\psi = \psi_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) のとき成立するが,  $\psi = \psi_\infty$  のときは成立しない.

高橋-加藤-斎藤 [12] は (2) を満たすための  $\psi$  の必要十分条件を与えた.

**定理 2 ([12])**  $\psi \in \Psi_2$  とする. このとき次は同値:

- (i)  $0 < t < 1$  なる任意の  $t$  に対して  $\psi(t) > t$ .
- (ii)  $\psi(t)/t$  は  $(0, 1]$  上狭義単調減少.
- (iii)  $|z| < |u|$ ,  $|w| \leq |v|$  ならば  $\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi$ .

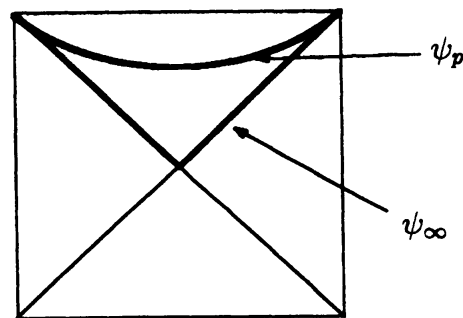
**定理 3 ([12])**  $\psi \in \Psi_2$  とする. このとき次は同値:

- (i)  $0 < t < 1$  なる任意の  $t$  に対して  $\psi(t) > 1 - t$ .
- (ii)  $\psi(t)/(1 - t)$  は  $[0, 1)$  上狭義単調増加.
- (iii)  $|z| \leq |u|$ ,  $|w| < |v|$  ならば  $\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi$ .

**定理 4 ([12])**  $\psi \in \Psi_2$  とする. このとき次は同値:

- (i)  $0 < t < 1$  なる任意の  $t$  に対して  $\psi(t) > \psi_\infty(t)$ .
- (ii)  $|z| \leq |u|$ ,  $|w| < |v|$  または  $|z| < |u|$ ,  $|w| \leq |v|$  ならば  $\|(z, w)\|_\psi < \|(u, v)\|_\psi$ .

**例 5**  $\ell_p$ -ノルム  $\|\cdot\|_p (1 \leq p < \infty)$  の単調性を考える. 明らかに, 任意の  $t \in (0, 1)$  に対して  $\psi_p(t) > \psi_\infty(t)$  である.



従って, 定理 4 を適用することにより次が得られる:  $|z| \leq |u|$ ,  $|w| < |v|$  または  $|z| < |u|$ ,  $|w| \leq |v|$  ならば

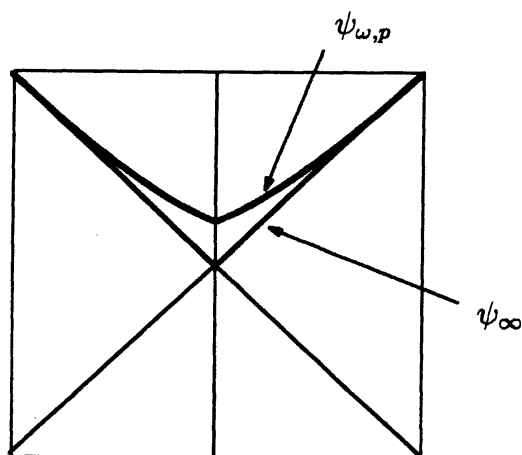
$$\|(z, w)\|_p < \|(u, v)\|_p.$$

例 6  $1 \leq q < \infty, 0 < \omega < 1$  とする. 2次元 Lorentz 数列空間  $d^{(2)}(\omega, q)$  は, 次のノルムを持つ  $\mathbb{R}^2$  である:

$$\|(x, y)\|_{\omega, q} = (x^{*q} + \omega y^{*q})^{1/q},$$

ここで  $x^* = \max\{|x|, |y|\}$ ,  $y^* = \min\{|x|, |y|\}$  である. このとき  $\|\cdot\|_{\omega, q} \in AN_2$  であり, このノルムに対応する  $\Psi_2$  の中の関数  $\psi_{\omega, q} (\in \Psi_2)$  は

$$\psi_{\omega, q}(t) = \begin{cases} ((1-t)^q + \omega t^q)^{1/q}, & \text{if } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (t^q + \omega(1-t)^q)^{1/q}, & \text{if } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$



上の図から, 任意の  $t \in (0, 1)$  に対して  $\psi_{\omega, p}(t) > \psi_{\infty}(t)$  である. よって定理 4 より  $|z| \leq |u|$ ,  $|w| < |v|$  または  $|z| < |u|$ ,  $|w| \leq |v|$  ならば

$$\|(z, w)\|_{\omega, p} < \|(u, v)\|_{\omega, p}.$$

我々は定理 2 及び 3 の結果をさらに改良し, ノルムの狭義の単調性とそれに対応する関数  $\psi$  の形状との関係を表す.

定理 7  $\psi \in \Psi_2$  とし,  $1/2 \leq t_0 \leq 1$  とする. このとき次は同値:

- (i) 任意の  $0 < t < t_0$  なる  $t$  に対して  $\psi(t) > t$ . また任意の  $t_0 \leq t \leq 1$  なる  $t$  に対して  $\psi(t) = t$ .
- (ii)  $\psi(t)/t$  は  $(0, t_0)$  上狭義単調減少. また任意の  $t_0 \leq t \leq 1$  なる  $t$  に対して  $\psi(t)/t = 1$ .
- (iii)  $|z| < |u|$  とする.  $\frac{|w|}{|u|+|w|} < t_0$  ならば

$$\|(z, w)\|_{\psi} < \|(u, w)\|_{\psi}.$$

また  $\frac{|w|}{|u|+|w|} \geq t_0$  ならば

$$\|(z, w)\|_{\psi} = \|(u, w)\|_{\psi}.$$

**定理 8**  $\psi \in \Psi_2$  とし,  $0 \leq t_0 \leq 1/2$  とする. このとき次は同値:

- (i) 任意の  $t_0 < t < 1$  なる  $t$  に対して  $\psi(t) > 1 - t$ . また任意の  $0 \leq t \leq t_0$  なる  $t$  に対して  $\psi(t) = 1 - t$ .
- (ii)  $\psi(t)/(1 - t)$  は  $(t_0, 1)$  上狭義単調増加. また任意の  $0 \leq t \leq t_0$  なる  $t$  に対して  $\psi(t)/(1 - t) = 1$ .
- (iii)  $|w| < |u|$  とする.  $\frac{|v|}{|z|+|v|} > t_0$  ならば

$$\|(z, w)\|_\psi < \|(z, v)\|_\psi.$$

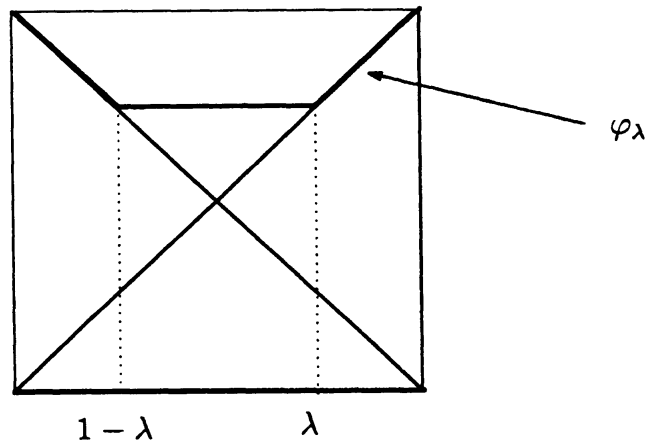
$\frac{|v|}{|z|+|v|} \leq t_0$  ならば

$$\|(z, w)\|_\psi = \|(z, v)\|_\psi.$$

**例 9**

$$\varphi_\lambda(t) = \max\{\lambda, 1 - t, t\} \in \Psi_2$$

を考える, ここで  $1/2 < \lambda \leq 1$ .



この関数に対応するノルムは

$$\|(x, y)\|_{\varphi_\lambda} = \max\{\lambda\|(x, y)\|_1, \|(x, y)\|_\infty\}.$$

このとき  $0 < t < \lambda$  ならば  $\varphi_\lambda(t) > t$ .  $\lambda \leq t \leq 1$  ならば  $\varphi_\lambda(t) = t$ . 従って上の定理を適用することにより次が成り立つ:  $|z| < |u|$  とする.  $\frac{|w|}{|u|+|w|} < \lambda$  ならば

$$\|(z, w)\|_{\varphi_\lambda} < \|(u, w)\|_\psi.$$

また  $\frac{|w|}{|u|+|w|} \geq \lambda$  ならば

$$\|(z, w)\|_\psi = \|(u, w)\|_\psi.$$

### 3 バナッハ空間における幾何学的定数

$X$  をバナッハ空間とする. また,  $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$  とおく. このとき

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1 : x, y \in S_X\right\}$$

を  $X$  の modulus of smoothness と言う. Yang-Wang[13] はバナッハ空間  $X$  上の幾何学的定数  $\gamma_X$  を導入した:

$$\gamma_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2}{2} : x, y \in S_X\right\}.$$

本章では, これらの定数を一般化したバナッハ空間上の幾何学的定数  $\gamma_{X,\psi}$  を導入する.

バナッハ空間  $X, Y$  と  $\psi \in \Psi_2$  に対し, 次のノルムを持つ  $X, Y$  の直和空間をバナッハ空間  $X, Y$  の  $\psi$ -直和といい,  $X \oplus_\psi Y$  と表す:

$$\|(x, y)\|_\psi = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\psi \quad (x \in X, y \in Y).$$

このとき, バナッハ空間  $X$  と  $\psi \in \Psi_2$  に対し,  $[0, 1]$  上の関数  $\gamma_{X,\psi}$  を以下のように定義する ([8]):

$$\gamma_{X,\psi}(t) = \sup\left\{\|(x+ty, x-ty)\|_\psi : x, y \in S_X\right\}.$$

明らかに,

$$\gamma_{X,\psi_1}(t) = 2(\rho_X(t) + 1).$$

ここで  $\psi_1$  は  $\ell_1$ -ノルムに対応する関数である. また

$$\gamma_{X,\psi_2}(t) = \sqrt{2\gamma_X(t)}.$$

ここで  $\psi_2$  は  $\ell_2$ -ノルムに対応する関数である.

**命題 10** 任意のバナッハ空間  $X$  と  $\psi \in \Psi_2$  に対して

$$2\psi\left(\frac{1-t}{2}\right) \leq \gamma_{X,\psi}(t) \leq 2(1+t)\psi\left(\frac{1}{2}\right).$$

**定義 11** バナッハ空間  $X$  が一様 non-square であるとは, ある  $\delta > 0$  が存在し,  $\|(x-y)/2\| \geq 1-\delta$  なる  $x, y \in S_X$  ならば  $\|(x+y)/2\| < 1-\delta$  であるときを言う.

一様 non-square を持つバナッハ空間を考える. [2, 13] において一般のバナッハ空間の一様 non-square 性の  $\rho_X, \gamma_X$  による特徴づけが与えられた.

**定理 12** ([2, 13])  $X$  をバナッハ空間とする. このとき次は同値:

- (i)  $X$  が一様 non-square.
- (ii)  $0 < t \leq 1$  なる任意の (ある)  $t$  に対して  $\rho_X(t) < t$ .
- (iii)  $0 < t \leq 1$  なる任意の (ある)  $t$  に対して  $\gamma_X(t) < (1+t)^2$ .

この定理の拡張として以下の定理が与えられた.

**定理 13** ([8])  $X$  をバナッハ空間,  $\psi \in \Psi_2$  とする. また任意の  $0 < t < 1$  に対して  $\psi(t) > \psi_\infty(t)$ . このとき次は同値:

- (i)  $X$  が一様 non-square.
- (ii) 任意の  $0 < t \leq 1$  に対して  $\gamma_{X,\psi}(t) < 2(1+t)\psi(\frac{1}{2})$ .
- (iii) ある  $0 < t_0 \leq 1$  に対して  $\gamma_{X,\psi}(t_0) < 2(1+t_0)\psi(\frac{1}{2})$ .

しかし定理 7 と定理 8 を用いることにより, 以下のように改良することができる.

**定理 14**  $X$  をバナッハ空間,  $\psi \in \Psi_2$  とする. また  $\psi \neq \psi_\infty$  とする. このとき次は同値:

- (i)  $X$  が一様 non-square.
- (ii) 任意の  $0 < t \leq 1$  に対して  $\gamma_{X,\psi}(t) < 2(1+t)\psi(\frac{1}{2})$ .
- (iii) ある  $0 < t_0 \leq 1$  に対して  $\gamma_{X,\psi}(t_0) < 2(1+t_0)\psi(\frac{1}{2})$ .

$\varphi_\lambda = \max\{\lambda, 1-t, t\} \in \Psi_2$  を考える, ここで  $1/2 < \lambda \leq 1$ . このとき  $\varphi_\lambda(\frac{1}{2}) = \lambda$  であり,  $\varphi_\lambda \neq \psi_\infty$  である. 従って上の定理より次が得られる.

**系 15**  $X$  をバナッハ空間とする. また  $1/2 < \lambda \leq 1$  とする. このとき次は同値:

- (i)  $X$  は一様 non-square.
- (ii) 任意の  $0 < t \leq 1$  に対して  $\gamma_{X,\varphi_\lambda}(t) < 2\lambda(1+t)$ .
- (iii) ある  $0 < t_0 \leq 1$  に対して  $\gamma_{X,\varphi_\lambda}(t_0) < 2\lambda(1+t_0)$ .

## 参考文献

- [1] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.
- [2] J. Gao, Normal structure and modulus of smoothness in Banach spaces, Non-linear Funct. Anal. Appl. 8 (2003) 233–241.

- [3] J. Gao and K. S. Lau, On two classes of Banach spaces with uniform normal structure, *Studia Math.* 99 (1991) 41–56.
- [4] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces, *Studia Math.* 144 (2001) 275–295.
- [5] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, On  $\psi$ -direct sums of Banach spaces and convexity, *J. Austral. Math. Soc.* 75 (2003) 413–422.
- [6] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, Uniform non-squareness of  $\psi$ -direct sums of Banach spaces  $X \oplus_{\psi} Y$ , *Math. Inequal. Appl.* 7 (2004) 429–437.
- [7] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using  $\psi$ -direct sums, *J. Math. Anal. Appl.* 327 (2007) 898–907.
- [8] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A new geometrical constant and  $\psi$ -direct sums of Banach spaces, *Proceedings of the 2nd international symposium on Banach and function spaces II*, Yokohama Publishers, (2008) 385–391.
- [9] K.-S. Saito and M. Kato, Uniform convexity of  $\psi$ -direct sums of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 277 (2003) 1–11.
- [10] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Absolute norms on  $\mathbb{C}^n$ , *J. Math. Anal. Appl.* 252 (2000) 879–905.
- [11] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, *Nihonkai Math. J.* 9 (1998) 155–169.
- [12] Y. Takahashi, M. Kato and K.-S. Saito, Strict convexity of absolute norms on  $\mathbb{C}^2$  and direct sums of Banach spaces, *J. Inequal. Appl.* 7 (2002) 179–186.
- [13] C. Yang and F. Wang, On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant, *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006) 555–565.