

Volterra 型半線型拡散方程式について

名大 理学部 山田義雄

§1. Volterra のモデル

Volterra [5] は、彼の有名な著書の中で、数種類の生物間の生存競争をモデルとする数学的問題を扱った。特に, prey と predator の間の相互作用を記述する方程式として,

$u = u(x)$: prey の個体数, $v = v(x)$: predator の個体数

とおいたとき,

$$(1.1) \quad \frac{du}{dx} = a - bv, \quad \frac{dv}{dx} = -p + gu$$

の形のもので提起した(但し, a, b, p, g は正定数)。この形の方程式は、その後、様々の変形を加えられ、常微分方程式のみならず、偏微分方程式の問題としても、多くの人々によって研究されてきた。

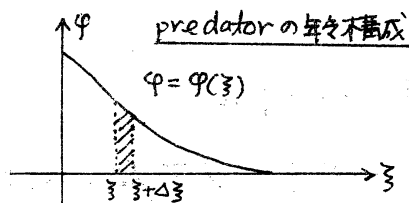
しかし、Volterra のモデル (1.1) に対して、当時、次のような批判があった。prey は、predator のえじきとなると同時に個体消滅してしまうわけであるから、 $-bv$ という項を加

えることは確かに現実的である。けれども, predator が prey をえさとしても, 即座に新個体の産れるわけがない。例えば, 妊娠期間などを考えねばならないから, δu という項を加えるのはおかしいというわけである。そこで, Volterra は批判に答える形で, “履歴項” (= “時間遅れを含む項”) のあるモデル

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{u_t}{u} = a - bv \\ \frac{v_t}{v} = -p + \int_{-\infty}^t R(t-s)u(s)ds \end{cases}$$

も扱った。(1.2)の下の方程式は, 過去の履歴が現在にも影響していることを意味する。導き方は, 大ざっぱに言って, 次のようである。

predator の生令構成は時間に無関係に一定であるとする。



左の図は, 年令が $(\xi, \xi+\Delta\xi)$ にある predator の比率が $\phi(\xi)\Delta\xi$ であることを意味。

年令が $t-\tau$ 以上の predator の割合 $= \int_{t-\tau}^{\infty} \phi(\xi)d\xi \equiv f(t-\tau)$.

時間 t において生存している predator の個体数 $= v(t)$.

過去の時間 τ ($< t$) においても生存していた predator の個体数 (年令が $t-\tau$ 以上のもの) $= f(t-\tau)v(\tau)$

$(\tau, \tau+\Delta\tau)$ の間に摂取した prey の個体数 $= r f(t-\tau) v(\tau) u(\tau) \Delta\tau$

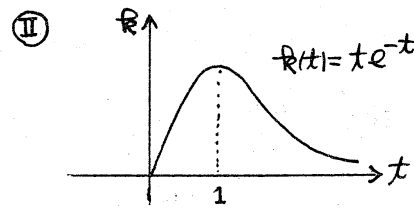
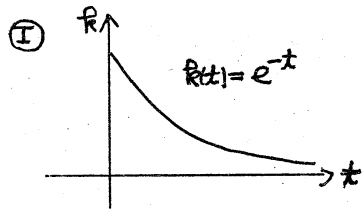
$(\tau, \tau+\Delta\tau)$ の間の predator の増殖 $= r \Phi(t-\tau) f(t-\tau) v(\tau) u(\tau) \Delta\tau$

$\varphi(t-\tau)$ をかけるのは、妊娠期間などを考慮するわけである。
相互作用による predator の増殖数は、積分することにより、

$$r \int_{-\infty}^t \varphi(t-\tau) f(t-\tau) u(\tau) d\tau \cdot v(t)$$

で表される。 $k(t) = r \varphi(t) f(t)$ とおけばよい。

以後、我々は、核関数の例として、次のような関数



を考えることにする。①のタイプの場合、過去の影響は指数関数的に減少し、②のタイプの場合は、過去の影響は、ある一定時刻前が最大となる。

(1.2) のように、積分項による遅れ時間を含む問題は、常微分方程式の問題としては、Cushing [1] によって精力的に研究されていることに注意しておこう。

さて、(1.2) のモデルに拡散効果を加えて考えてみよう。

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし、境界 $\partial\Omega$ は十分に滑らかとする。
 Ω の中で、prey $u = u(x, t)$, predator $v = v(x, t)$ が次の関係をみたしているものとする。

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_t = \mu \Delta u + u(a - bu - cv), & \Omega \times [0, \infty) \\ v_t = \nu \Delta v + v(pu + \int_0^t k(t-s)u(s)ds - r), & \Omega \times [0, \infty) \end{cases}$$

但し, $\mu, \nu > 0$, $a, b, c > 0$, $p \geq 0$, $r > 0$, $\theta(x)$ は滑らかな $L^1(0, \infty)$ 関数. $\partial\Omega$ 上では, Neumann 条件

$$(1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \partial\Omega \times [0, \infty)$$

を置く. 初期条件

$$(1.5) \quad u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \quad \Omega$$

を与えることにより, 初期値境界値問題 (1.3)-(1.5) を考えよう. この種の問題に対しては, 研究が非常に少く, 単一種モデルを扱った Schiaffino の研究 [4], prey-predator モデルの安定性を扱った Pozio の研究 [2] ぐらいしかない. 遅れ時間が一定の場合に, Hopf bifurcation を扱った, 吉田清氏の研究 [8] にも注意しておこう.

我々は, (1.3)-(1.5) に関して, 特に, 次のことを問題としたい.

問題

1. 有界な大域解が存在するか?
2. 有界な大域解が存在するとすれば, $t \rightarrow \infty$ での挙動はどのようなになるか?
3. 特に, 履歴項が存在することによって, 解の挙動は如何なる影響を受けるか?

これらの問題を以下の §§ で考えて行こう.

§2. 安定性.

§1 の方程式 (1.3), (1.4) の “平衡点” の候補を考えてみよう.

う. 一般に, $u(t) \rightarrow u_\infty$ ($t \rightarrow \infty$) なるは.

$$\int_0^t k(t-s)u(s)ds \rightarrow \int_0^\infty k(t)dt \cdot u_\infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

であるから, (u, v) -平面の第一象限にあるものとして.

$$E_1: \quad u_\infty = \frac{a}{b}, \quad v_\infty = 0.$$

$$E_2: \quad u_\infty = \frac{r}{p+\alpha}, \quad v_\infty = \frac{a(p+\alpha)-br}{(p+\alpha)c}, \quad \text{但し } \alpha = \int_0^\infty k(t)dt.$$

が考えられる. これらの平衡点 E_1, E_2 の安定性を調べるために, 通常 (u_∞, v_∞) の近傍で線型化を施し, 線型方程式の解の挙動を調べることが多い.

$$u_1 = u - u_\infty, \quad v_1 = v - v_\infty$$

とおいて, (1.3)-(1.5) を u_1, v_1 に関する問題に変えよう. 改めて, u_1, v_1 を u, v によって表し,

$$U = U(x, t) = {}^t(u(x, t), v(x, t))$$

とあくと, 次の形の問題

$$(2.1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = D\Delta U + (B + B_1(t))U + \int_0^t C(t-s)U(s)ds + F(U) + H(x), \quad x \in \Omega, t \geq 0$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

$$(2.3) \quad U(x, 0) = U_0(x) = {}^t(u_0 - u_\infty, v_0 - v_\infty), \quad x \in \Omega.$$

となる. 但し, $\forall$ 実数の範囲で考え,

$$D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad B: 2 \times 2 \text{ 定数行列.}$$

$$B_1(t): 2 \times 2 \text{ 行列.} \quad B_1(t) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

$$C(t): 2 \times 2 \text{ 行列.}$$

$$F(v): 2 \times 1 \text{ ベクトル.} \quad F(0) = 0, \text{ かつ } v \text{ に関する 2 次以上の項から成る. (例えば, } uv, v \int_0^t k(t-s)u(s)ds \text{ など)}$$

$$H(t): 2 \times 1 \text{ ベクトル.} \quad H(t) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

この問題 (2.1)–(2.3) の $U=0$ の安定性を調べる。線型部分を調べるのが重要であるが、積分項が含まれるため、出来合の理論を使うことができない。

安定性に関する理論を構築しよう。(2.1)の線型部分。

$$(2.4) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = D \Delta U + BU + \int_0^t C(t-s)U(s)ds, \quad x \in \Omega, t \geq 0$$

を考え、初期値 U_0 に対して、(2.4), (2.2), (2.3) の解 $U(t)$ を対応させる。この対応を $R(t)$ とおく：

$$(2.5) \quad U(t) = R(t)U_0$$

さて、 $C(t)$ に対し、

$$(A.1) \quad \int_0^\infty \|C(t)\| dt < \infty, \quad \int_0^\infty t \|C(t)\| dt < \infty, \quad \| \cdot \| = \text{行列ノルム}$$

を仮定する。 $C(t)$ に対する Laplace 変換

$$C^*(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t) dt$$

が、 $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ に対して定義できる。

更に、次を仮定する。

(A.2) 任意の $\mathbb{R} \lambda \geq 0$ に対して

$$\begin{cases} (\lambda I - D\Delta - B - C^*(\lambda))U = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{if and only if } U = 0$$

注意 仮定 (A.2) は、固有値問題

$$(2.6) \quad -\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の固有値を $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ とおくと、次と同値である。

$$\det(\lambda I + \lambda_i D - B - C^*(\lambda)) \neq 0, \quad \text{for } \forall \mathbb{R} \lambda \geq 0, i=0,1,2,\dots$$

(2.5) で定義した作用素 $R(t)$ に対して次の定理が成立する。

(cf. Yamada [7]).

定理 2.1. (i) 仮定 (A.1), (A.2) の下で、任意の $p \geq 1$ に対して、ある正数 M_p, M が存在して、次の評価が成り立つ。

$$\int_0^\infty \|R(t)u_0\|^p dt \leq M_p \|u_0\|^p, \quad \forall u_0 \in \{L^2(\Omega)\}^2$$

$$(t+t_0)\|R(t)u_0\| \leq M \|u_0\|, \quad \forall t \geq 0, \forall u_0 \in \{L^2(\Omega)\}^2$$

但し、 $\|\cdot\| = \{L^2(\Omega)\}^2$ ノルム。

(ii)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = D\Delta U + BU + \int_0^t C(t-s)U(s)ds + F(t), & \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \times [0, \infty) \\ U(x, 0) = u_0(x), & \Omega \end{cases}$$

の解は

$$U(t) = R(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)F(s)ds$$

によって表現される。

定理 2.1 を用いると, (2.1)–(2.3) に対する $U=0$ の安定性を主張する次の定理が得られる (cf. Yamada [7]).

定理 2.2. 仮定 (A.1), (A.2) の下で, 滑らかな初期値 U_0 に対して,

$$\|U_0\|, \|\text{grad } U_0\|, \int_0^\infty |B_1(x)| dx, \int_0^\infty |H(x)| dx$$

が, 十分小さいならば, (2.1)–(2.3) は有界な大域解 U を一意にもち, しかも,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t) = 0 \quad \text{uniformly for } x \in \overline{\Omega}$$

が成立する.

注意 単独の方程式に対しても, 定理 2.1, 2.2 と同様の結果が成立する.

§3. 周期解の分岐

§2 において, 初期値境界値問題 (2.1)–(2.3) に対して, 仮定 (A.1), (A.2) の下で, $U=0$ は局所的漸近安定であることを示した. それでは, 仮定 (A.2) が成立しなくなるとどうであろうか. (2.1) において, $B_1(x) \equiv 0$, $H(x) \equiv 0$ とおき, $B, C(x), F$ が, パラメーター μ に依存するものとしよう.

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = D\Delta U + B(r)U + \int_{-\infty}^t C(t-s; r)U(s)ds + F(U; r), & \Omega \times (-\infty, \infty) \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \times (-\infty, \infty) \end{cases}$$

を考える。例えば、(1.3)における積分範囲を $(0, t)$ から、 $(-\infty, t)$ に置き換えれば、(この置換は本質的でない!)、(3.1)の形の方程式が得られる。

(A.2)が成立しなくなる。次の場合を仮定しよう。

(B.1) 固有値問題 ($\Re \lambda \geq 0$ で考える)。

$$\begin{cases} (\lambda I - D\Delta - B(r) - C^*(\lambda; r))U = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は、 $r=r_0$ のときに、単純固有値 $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) をもち、その他の固有値は、 $\pm i\omega_0$ の整数倍にない。

この仮定 (B.1) は、固有値問題 (2.6) のある単純固有値 λ_N を用いて、

$$P(\lambda; r) \equiv \det A(\lambda; r) = 0, \quad \text{但し } A(\lambda; r) = \lambda I + \lambda_N D - B(r) - C^*(\lambda; r)$$

が、 $r=r_0$ のときに、純虚数の根 $\pm i\omega_0$ をもつことを意味する。 $r=r_0$ のときに、 $i\omega_0$ となる根 ($P(\lambda; r)=0$ の根) を、 $\lambda(r)$ で表そう。

$$A(i\omega_0; r_0)\Phi = 0, \quad {}^*A(-i\omega_0; r)\Psi = 0 \quad (\Phi, \Psi = \text{転置})$$

をみたす $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^2$ をとり、 $(\Phi, \Psi) = 1$ となるように規格化しておく。(B.1)の他に、更に、

$$(B.2) \quad \operatorname{Re} \lambda'(r_0) \neq 0, \quad \text{かつ}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} (C^*(\lambda; r) \Phi, \Psi) \right|_{\substack{\lambda = i\omega_0 \\ r = r_0}} \neq 1$$

を仮定する。このとき, Hopf-bifurcation に関する Sattlinger [3] の議論を応用して, 次の結果を示すことができる。

定理 3.1. 仮定 (B.1), (B.2) の下で, (3.1) は パラメータ $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ (ε_0 は ある正数) によって

$$U(x, t; \varepsilon) = \varepsilon V(x, \omega t; \varepsilon) \quad (\neq 0)$$

$$\omega = \omega(\varepsilon), \quad r = r(\varepsilon)$$

の形で表される周期解をもつ。但し, $\omega(0) = \omega_0$, $r(0) = r_0$, かつ, $V(x, t; \varepsilon)$ は 周期 2π の関数。

このシンポジウムで講演された, 吉田氏の結果 [8] も 参照していただきたい。

§ 4. 単一種モデル

§ 2.3 の結果を, 議論を簡単にするため, 単一種モデルに適用してみよう。拡散項のある成長方程式に, 履歴項を付加えた。次のような問題を考える。

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u(a - b u - \int_0^t k(t-s)u(s)ds), & \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \text{ (smooth, } \neq 0) & \Omega \end{cases}$$

但し, $a > 0$, $b \geq 0$, $k \geq 0$.

$$k \geq 0: \text{smooth}, \quad \int_0^\infty k(t)dt \equiv \alpha < \infty, \quad \int_0^\infty t k(t)dt < \infty.$$

(4.1) の "平衡点" の候補として

$$u_\infty = \frac{a}{b + \alpha}$$

がある. $u = u_\infty$ の近傍で線型化を施し, (A.2) を確かめよう.

(A.2) は

$$(4.2) \quad \lambda + u_\infty(b + k^*(\lambda)) \notin \sigma(\Delta) = \{-\lambda_i: i=0, 1, 2, \dots\} \\ \text{for } \operatorname{Re} \lambda \geq 0$$

(λ_i は (2.6) の固有値) と同値である.

核関数 k として §1 で挙げた例に依って説明してみよう.

4.1. ① のタイプ^oの核関数. $k(t) = \frac{\alpha}{\Gamma} e^{-\frac{t}{\Gamma}}$ を考えてみよう.
 $k^*(\lambda) = \frac{\alpha}{1 + \lambda\Gamma}$ となり, (4.2) は常に成立する. 一般に, k が
 このように, 非負, 単調非増加な凸関数ならば, (4.2) は常に
 成立することがわかり, 定理 2.2 より $u = u_\infty$ は局所的漸近
 安定であることが示される. 実は, Lyapunov 関数

$$(4.3) \quad \int_\Omega \left\{ u(x, t) - u_\infty - u_\infty \log \frac{u(x, t)}{u_\infty} \right\} dx$$

を用いれば, より強い次の定理を示せる (cf. Yamada [6]).

定理 4.1. $(-1)^j k^{(j)}(t) \geq 0$ ($j=0,1,2$) とする. ($b=0$ のときは $u_\infty \int_0^\infty t k(t) dt < 1$ も仮定する.) このとき, 任意の滑らかな初期値 $u_0 \geq 0$ に対して, (4.1) は有界な大域解 $u(x,t)$ をもち,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = u_\infty \quad \text{uniformly for } x \in \overline{\Omega}$$

となる.

注意 遅れを含む項 $\int_0^t k(t-s)u(s)ds$ を遅れのないう項 αu で置換えても, 定理 4.1 同様, $u = u_\infty$ の大域的漸近安定性がある. この意味で, k が非負, 単調非増加な凸関数の場合は, 遅れ時間の影響があまり本質的でないことがわかる.

4.2. ②のタイプの核関数 $k(t) = \frac{\alpha}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}}$ について考えてみよう. この場合, $k^*(\lambda) = \frac{\alpha}{(1+\lambda T)^2}$ であるから, (4.2) は Hurwitz の判定条件を用いて,

$$2e^2 u_\infty^2 T^2 + (5b u_\infty - a)T + 2 > 0$$

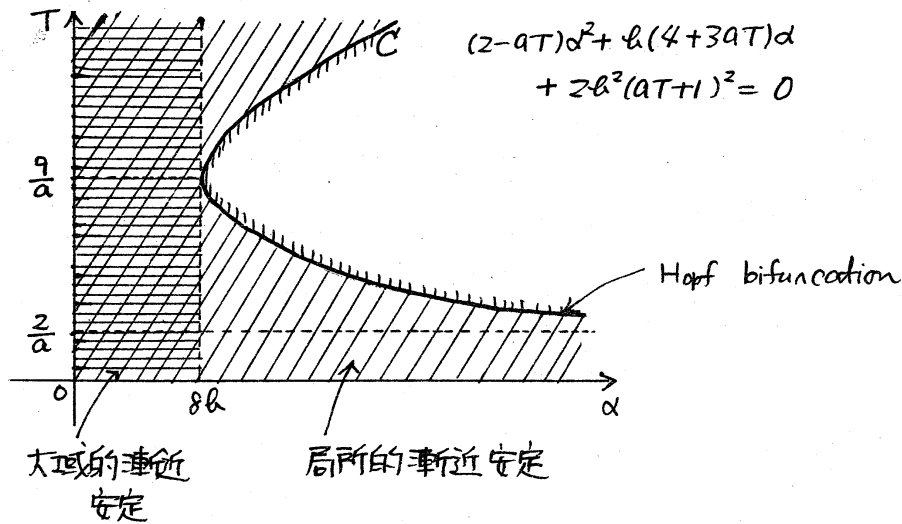
の形に言換えることができる. $u_\infty = \frac{a}{b+a}$ を用いれば, これは,

$$(4.4) \quad (2-aT)\alpha^2 + 4(4+3aT)\alpha + 2b^2(aT+1)^2 > 0$$

と同値になる. 定理 2.2 より, (4.4) が成立していれば, $u = u_\infty$ は局所的漸近安定であるが, Lyapunov 関数 (4.3) を使って, 大域的漸近安定性に関する結果も導ける (cf. Yamada [6]).

定理 4.2. $\alpha < 8b$ ならば $u = u_\infty$ は大域的漸近安定である。

α, T をパラメータとみて、他の定数を固定しておくと、以上の状況は次の図のようになる。



それでは、(4.4)の左辺 = 0 となる場合はどうであろうか？

この場合は、(4.2)において、

$$(4.5) \quad \alpha + \frac{a}{b + \alpha} (b + b^*(\alpha)) = 0$$

が、純虚数の根をもつことに対応している。 T を固定して、 α が、上の図の曲線 C を左から右へ横切るとき、(4.5)の純虚数根も、虚軸を左から右へ横切ることがわかる。仮定 (B.1), (B.2) を確かめることができ、定理 3.1 より、安定性の条件が破れると、周期解の分岐することがわかる。

このように、例えば、核関数 k が大きくなり、過去の影響

が大きくなってくると, "平衡点" の安定性は失われ, その近傍に, 周期解が分岐してくる.

§5. prey-predator モデル.

§1 で挙げた問題 (1.3)–(1.5) に §2.3 の結果を適用してみよう.

考察が簡単なのは, $a(p+d) - br < 0$ の場合である. この時は, $(u_\infty, v_\infty) = (\frac{c}{a}, 0)$ が, 大域的漸近安定となる. すなわち, predator は, 初期値 (u_0, v_0) をどのようにとっても, 絶滅してゆくわけである.

しかし, $a(p+d) \geq br$ の場合, §4 程, 事情は簡単でない.

$$u_\infty = \frac{r}{p+d}, \quad v_\infty = \frac{a(p+d) - br}{(p+d)c}$$

とおく. 仮定 (A.2) が成立する場合を求めて, 定理 2.2 を適用してみよう.

$$\textcircled{I} \quad k(x) = \frac{\alpha}{T} e^{-\frac{x}{T}}, \quad \textcircled{II} \quad k(x) = \frac{\alpha}{T^2} x e^{-\frac{x}{T}}$$

いずれの核関数にしても, $T > 0$ が十分小さいならば, (u_∞, v_∞) は, 局所的漸近安定となることがわかる.

②のタイプの核関数の場合は, かなり複雑になるから, ①のタイプの核関数について詳しく調べてみよう.

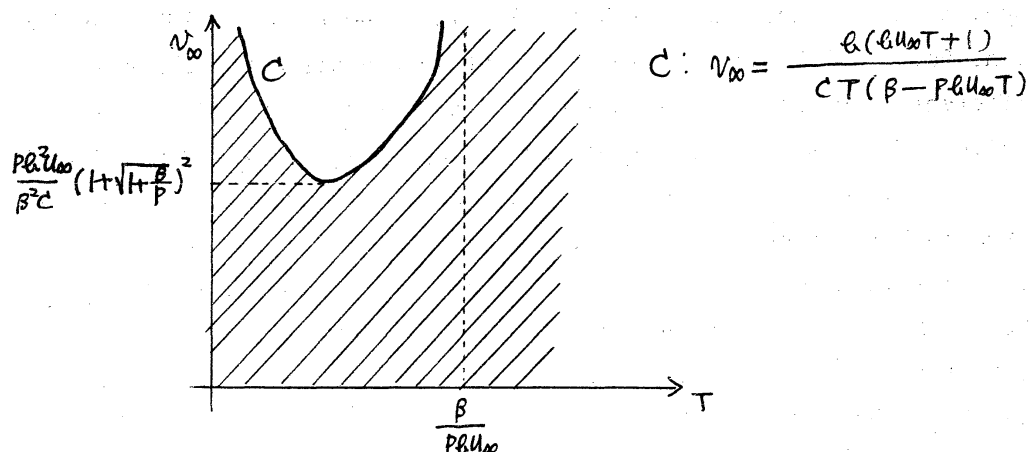
$$k^*(\lambda) = \frac{\alpha}{1 + \lambda T} \quad \text{であるから, 仮定 (A.2) と同値な条件は,}$$

Hurwitz の判定条件を用いて、書き下してみよう。

$$(5.1) \quad b(bu_{\infty}T+1) > cV_{\infty}T(\beta - pbu_{\infty}T)$$

となる。 a, T をパラメータとみて、他の定数は固定しておく。これは、 V_{∞}, T をパラメータとみるのと同じである。

(5.1) が成立する状況を図示すると、下図のようになる。



(T, V_{∞}) が、上図の斜線にあるとき、 (u_{∞}, V_{∞}) は局所的漸近安定である。しかし、曲線 C 上においては、固有値問題

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda - u\Delta + bu_{\infty} & cV_{\infty} \\ -V_{\infty}(p + k^*(\lambda)) & \lambda - u\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が、純虚数の固有値をもち、しかし、

$$P(\lambda; V_{\infty}) \equiv \det \begin{pmatrix} \lambda + bu_{\infty} & cV_{\infty} \\ -V_{\infty}(p + k^*(\lambda)) & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

曲線

の根は、 V_{∞} が C を越えて大きくなってゆくとき、虚軸を左から右へ横切ってゆくことがわかる。よって、定理 3.1 の仮

定がすべて満たされることがわかり、 (u_∞, v_∞) の近傍に、周期解が分岐してくることがわかる。

参考文献

- [1] J. M. Cushing: Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics, Lecture Notes in Biomathematics 20, 1977, Springer.
- [2] M. A. Pozio: Behaviour of solutions of some abstract functional differential equations and application to predator-prey dynamics, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 4 (1980), 917-938.
- [3] D. H. Sattinger: Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes in Mathematics 309, 1973, Springer.
- [4] A. Schiaffino: On a diffusion Volterra equation, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 3 (1979), 595-600.
- [5] V. Volterra: Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, 1931.
- [6] Y. Yamada: On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations (preprint).
- [7] Y. Yamada: Stability for some Volterra diffusion systems (in preparation).
- [8] K. Yoshida: Existence of periodic solutions for semilinear diffusion equations with time delay arising in ecology (preprint).