

(続紙 1)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                              |    |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------|
| 京都大学                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 博士 (人間・環境学)                                                                                                  | 氏名 | 中野 雄史 |
| 論文題目                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Stochasitic Stability of Partially Expanding Maps<br>via Spectral Approaches<br>(スペクトル解析による部分拡大写像の確率安定性について) |    |       |
| (論文内容の要旨)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                              |    |       |
| <p>この論文では、カオス的ではあるが、構造安定性をもつ拡大的力学系を基調とし、それと、拡大的でも縮小的でもない中立的な力学系との歪積型となる力学系（部分拡大写像）に対して、微小な攪乱が作用したときの安定性（確率安定性）を、力学系の転移作用素のスペクトルの変化を考察することにより解明している。</p> <p>力学系の構造安定性は、力学系の定性的挙動が力学系の摂動に対して安定かどうかを問題とするのであるが、確率安定性の観点では、力学系自身に内在する摂動ではなく、外的な攪乱が作用したとき、力学系の挙動がどのような応答をするかを問題とする。基準となる力学系が構造安定である場合には、微小な攪乱が作用しても、力学系全体としての挙動はほとんど変わらないはずである。しかし、基準となる力学系がカオスと呼ばれるような不規則挙動を呈するものである場合には、なにをもって攪乱にたいして安定であるとするのかは明らかでない。また、構造安定性が破れている場合においては、解析はさらに厄介である。</p> <p>この論文の第1編では、急冷型の攪乱のもとでの、トーラス上の部分拡大的写像に対する転送作用素のスペクトルについて論じている。</p> <p>まず、理論の対象となる力学系と外的攪乱および攪乱を受ける力学系の挙動をとらえる、力学系の不変測度とそれに作用する転移作用素を構成する。</p> <p>部分拡大写像の構成</p> <p>構造安定な力学系の典型として、円周 <math>S^1</math> 上の拡大写像 <math>E: S^1 \rightarrow S^1</math> を、(<math>k</math> は2以上の自然数として) <math>k</math> 対1の可微分写像で、<math>E'(x) &gt; \lambda</math> が全ての <math>x \in S^1</math> について成り立つ <math>\lambda &gt; 1</math> が存在するようなものとする。(<math>S^1</math> での演算はその普遍被覆での演算から誘導されるものと理解する。)</p> <p>構造安定でない力学系の典型として、円周上の回転 <math>s \mapsto s + \tau \pmod{1}</math> を考える。回転角 <math>\tau</math> が上記の構造安定な力学系の変数 <math>x</math> に依存する関数 <math>\tau(x)</math> によって与えられるものとして、実2次元トーラス <math>T^2 = S^1 \times S^1</math> 上の写像 <math>(x, s) \mapsto (E(x), s + \tau(x))</math> を考える。二つの写像を組み合わせたものであるが、第1成分は第2変数に依存しないので、この構成は力学系の歪積と呼ばれる。</p> <p>外的攪乱の構成</p> <p>いわば乱数の生成機構として、確率測度 <math>P</math> をもつ確率空間 <math>\Omega</math> の、双方向に可測な変換 <math>\theta: \Omega \rightarrow \Omega</math> で、<math>P</math> 保存でエルゴード的なものを考える。関数空間 <math>C^\infty(T^2, T^2)</math> における <math>C^\infty</math> 距離をつかって、部分拡大写像の空間に Borel <math>\sigma</math>-加法族の構造を導入し、摂動に関する可測性の概念および外的攪乱の強度の概念を確立する。</p> |                                                                                                              |    |       |

乱数生成のプロセス  $\theta$  と、乱数に応答して変動する部分拡大写像の力学系がくみ合わさって、乱数生成力学系が部分拡大力学系に依存しないかたちの、歪積型の力学系を構成する。これが、外的攪乱の定式化である。

#### ランダム転移作用素の構成

力学系の挙動は、個々の初期値に対する軌道の解析よりも、状態空間上の密度関数、あるいは、粒子の分布する確率測度の変動としてとらえるべきである。そのため、状態の分布を表す測度空間と、その測度を測定する双対空間としての関数空間を設定し、その空間への力学系の作用を解析する。

通常力学系の解析には、双対空間として、滑らかな関数の空間を考え、力学系によってその関数を引き戻すことによる写像を考え、その双対として、測度の空間における転移作用素を構成する。

この論文で扱う外的攪乱を考慮するときには、拡大性を持たない第2成分があり、標準的な転移作用素の理論を適用することができない。そのため、第1成分に関しては、古典的な転移作用素を利用するが、第2成分に関しては、フーリエ変換を通じて、半古典解析などとよばれる、超局所解析の手法を援用する。ランダム転移作用素となるべき変換をフーリエ積分作用素の形で導入する。

#### スペクトル解析

古典的な転送作用素の解析では、線形作用素の第一固有値の固有関数が、力学系の不変測度に対応し、第2固有値が相関関数の減衰指数を与える。フーリエ積分作用素の固有値は、積分を通して与えられるものであり、リャプーノフ指数に相当する数値となる。それでも、本質的スペクトルと離散スペクトルの区別には活用できる。

超局所解析を通じて、無限個のスペクトルを、力学系の攪乱に対する安定性を示す本質的スペクトルと、不変測度に相当するスペクトル、相関関数の減衰速度を示すスペクトルとに分け、外的攪乱のレベルが一定の水準以下であれば、本質的スペクトルの部分は安定にとどまり、不変測度および相関関数の減衰速度のいずれも微小な変動にとどまることを示した。

ただし、そのような安定性は、もとの力学系の拡大性が部分的であるにしても、ある種の非退化性を条件とする。この条件については、回転速度分布の横断性や部分捕獲性などの幾何学的な概念で設定しており、ほとんど全ての場合について成立する普遍性を持つことも合わせて示されている。

第2編では、基調となる構造安定な力学系が可逆でない場合についての考察にあてられている。可逆でない場合でも、外的攪乱に対する安定性は、スペクトル解析をつうじて説明できるばあいがあり、従来の解析では不可能であった諸種の力学系に対処する手法を提案している。

また、拡大的力学系における、不変測度や相関関数の減衰速度の安定性や精密な評価の問題にもとりくんでいる。

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、力学系の外的攪乱に対する確率安定性の数学的研究に、従来の力学系理論やエルゴード理論では扱われていなかった、超局所解析の理論を導入してえられた研究成果をまとめたものである。双曲型でない力学系の典型としては、放物型周期点をもつものや、ホモクリニック接触をもつ力学系など様々であるが、いずれも解析が非常に難しい。拡大的性質が破れる状況として、発想を逆転して、拡大的性質を持つ力学系と、円周上の単純な回転移動を歪積型に組み合わせたものを考察の対象にとりあげている。回転移動の回転量が底空間の座標に依存し、その依存の仕方が横断的、あるいは部分捕獲的という、通有的な条件を満たすことを前提として、外的攪乱に対する安定性を示すことに成功した。

基調となる、円周の拡大的な  $k$  対 1 写像  $E: S^1 \rightarrow S^1$  はいわゆるカオス力学系であり、構造安定であるが、解の挙動は初期値に鋭敏に依存する力学系の典型である。これに対し、第 2 成分の力学系 (第 1 成分に依存する回転作用) は、いわば剛体運動であるが、第 1 座標の影響を受けて、徐々に初期値の影響を喪失してゆく。

申請者はこの現象に着目し、構造安定性が破れる力学系でも、微小な攪乱のもとでその挙動がおおむね保たれることを示した。

第 2 成分の力学系をファイバー力学系ということにする。ファイバー力学系として、円周の回転を想定したことにより、円周上の密度関数をフーリエ級数として表現することが可能となり、第 1 変数の関数を係数とするフーリエ級数のなす空間を、力学系の状態空間ととらえた。

部分拡大的力学系はこの空間に作用するものと見なすことが出来、外的攪乱としての急冷ランダム摂動は確率空間の双可測変換とこの力学系との歪積力学系として定式化することができた。

この論文で述べられている主な結果を記す。

第 1 編においては、部分捕獲性の条件を含む急冷ランダム摂動に関する条件を設定し、この条件のもとで、準古典ソボレフ空間上での転移作用素のスペクトル安定性が導かれることを示し、相関関数の減衰速度、SRB 速度などの統計的性質や統計量の外的攪乱に対する安定性が導かれることを示した。

第 2 編においては、攪乱の力学系が可逆でない場合についても、部分拡大的写像の確率安定性を、スペクトル解析の手法で解析を試みている。転送作用素の代わりに、グラフ変換の手法を導入し、それが、歪積力学系の転送作用素の役割を果たすことを示した。

これにより、攪乱のもとでも、唯一の絶対連続不変測度の存在が導かれることを示し、攪乱が限りなく小さくなる時、攪乱が介入しない部分拡大的力学系の不変測度に収束することも合わせて示した。

双曲型が破れる状況のうち、こうしたタイプの力学系は、標準的な力学系理論からみれば、特殊なものであるが、この状況は、シンプルであるが不安定なメカニズムを、複雑であるが構造安定な制御をおこなう形で構成される、一つのシステムが、外的な攪乱のもとで安定的に機能するメカニズムを示唆するものであり、応用面からみて意義深い結果と言える。

また、この研究途上で開発した、ソボレフ空間でのフーリエ積分作用素の解析手法は、ランダム転移作用素のリアプノフ指数の安定性の評価や、二重表象計算によるランダムな漸近展開公式の導出など、応用可能性の広いものである。

超局所解析の理論としても、準古典解析の理論としても、部分双曲力学系への新しい応用を拓いたものとして高く評価できる。

この論文の一部は Jens Wittsten との共同研究によるものである。申請者の中野雄史は、力学系および転移作用素に関するエルゴード理論を担当し、Jens Wittsten はソボレフ空間でのフーリエ積分作用素の二重表象計算などの超局所解析の理論を担当した。

力学系のエルゴード理論と、偏微分方程式論の超局所解析の理論の融合は、人間・環境学研究科において成立した、世界でもまれな展開であり、最近の国際研究集会でも、高く評価され、注目をあつめている。

また、本論文は、数理的現象に関連した数学的対象の生成と構造化のための普遍的な体系を探求し、合理的認識の枠組みを構築する、とうたう数理科学講座の趣旨にふさわしい研究成果である。

よって、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成27年3月26日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、調査委員の質問には的確に答えており、質疑応答を通じて理論の将来の発展性を確かめることもでき、合格と認めた。

なお、本論文は、京都大学学位規程第14条第2項に該当するものと判断し、公表に際しては、当該論文の全文に代えてその内容を要約したものとすることを認める。

要旨公表可能日：平成\_\_年\_\_月\_\_日以降