

フラクタル・クラスターの集合に対する マルチフラクタル統計

旦木秀和, 本田勝也 (名大工)

松下貢 (中大理工)

1 はじめに

自然界には、それぞれ異なるサイズを持つ多数のクラスターが集まってできているパターンが多く存在する。このようなパターンの例としては、Percolation cluster、自己アフィン表面の切断面、クラスタークラスター凝集体などが考えられる。

本研究の目的は、マルチフラクタルの手法を用いてこのようなパターンを解析することである。

今回は、自己アフィン表面の切断面に現れるパターンを対象とした。このパターンは、Midpoint displacement methods によって作成された、Hurst 指数 H で特徴づけられる Brownian surface を平均の高さの水平面で切断したときに現れる。(図 1 参照)

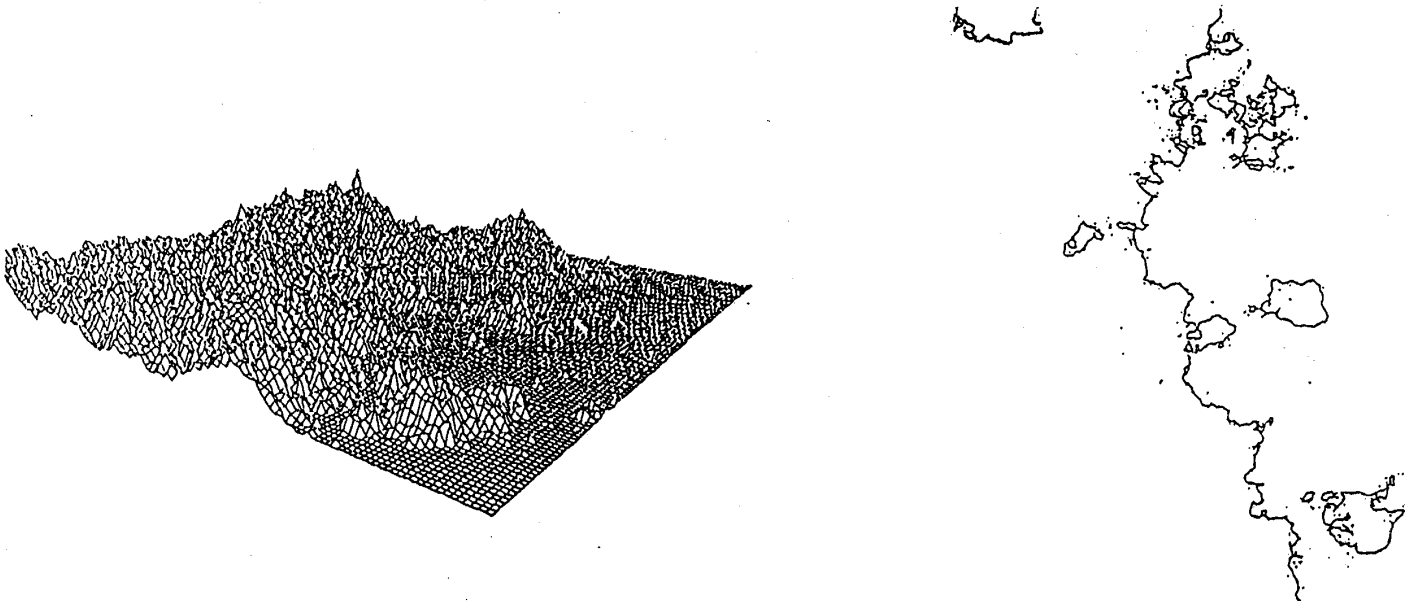


図 1: Brownian surface とその海岸線

この海岸線のフラクタル構造として次のような事実が知られている。

1. 島や湖を含めた全体の海岸線は self-similar で、フラクタル次元は D_w を持つ。すなわち、海岸線を長さ l のコンパスで切ったとき、その個数 $N(l)$ は、

$$N(l) \propto l^{-D_w}$$

で与えられる。

2. それぞれの一本の海岸線もまた self-similar で、 i 番目の島の海岸線はフラクタル次元 D_i を持つ。

$$N_i(l) \propto l^{-D_i}$$

ここで特に、最も長い海岸線のフラクタル次元を D_c とする。



3. 大きさが l 以上の島の累積個数 n も次の power law に従う。

$$\begin{aligned} n(\Lambda > l) &\propto l^{-\eta} \\ n(A > a) &\propto a^{-\eta/2} \end{aligned}$$

2 マルチフラクタル統計

全体の海岸線を count したときの個数 N と、 i 番目の島の一本の海岸線を count したときの個数 N_i は、

$$\begin{aligned} N(l) &\propto l^{-D_w} \\ N_i(l) &\propto l^{-D_i} \end{aligned}$$

となる。ここで、次のような分配関数 $Z_l(q)$ を定義すると、

$$\begin{aligned} Z_l(q) &\equiv \sum_i [N_i(l)]^q \\ &= \sum_i l^{-D_i q} \\ &= \int dD l^{-qD} \cdot n_l(D) \end{aligned}$$

とあらわされる。ここで、 $n_l(D)$ は、次元 D を持つ島の個数で、次のように仮定する

$$n_l(D) \sim \rho(D) \cdot l^{-f(D)}$$

すると、分配関数は、

$$\begin{aligned} Z_l(q) &= \int dD \rho(D) l^{-qD - f(D)} \\ &\sim l^{-qD_q - f(D_q)} \quad \left[\equiv l^{r(q)} \right] \end{aligned}$$

となる。ここで、 D_q は $df/dD|_{D=D_q} = -q$ より決められる。これより、

$$\begin{aligned}\tau(q) &= -qD_q - f(D_q) \\ \frac{d\tau}{dq} &= -D_q \\ f(D_q) &= -qD_q - \tau\end{aligned}$$

というように、フラクタル次元 D をもつ島の分布を $f(D)$ で特徴づけることができる。ここで、 $q=0, q=1$ の場合は、次のような簡単な説明ができる。

- $q=0$ の場合

$$\begin{aligned}Z_l(0) &= \sum_i 1 = n(\Lambda > l) \propto l^{-\eta} \\ \tau(0) &= -\eta \\ f(D_0) &= -\tau(0) = \eta\end{aligned}$$

- $q=1$ の場合

$$\begin{aligned}Z_l(1) &= \sum_i N_i(l) = N(l) \propto l^{-D_w} \\ \tau(1) &= -D_w\end{aligned}$$

3 Simulation による結果

以上の計算をいくつかの 1024×1024 の 2 次元格子上的 Brownian surface の海岸線のパターンでおこなったものを次ページ図 2 に示す。

これよりこのパターンにおいては、 $D_w = 1.49 \pm 0.02$ 、 $D_c = 1.27 \pm 0.03$ 、 $\frac{\eta}{2} = 0.77 \pm 0.07$ の結果を得た。このうち D_w 、 η については理論的に計算することができ、その結果 $D_w = \eta = 1.5$ とよく合っている。

また、この $\tau(q)$ において q があまり大きくない所からすでに直線性が非常によいことから、このパターンではそれぞれの島の次元は全て最大の cluster の次元 D_c に等しいことがわかる。さらに、 $f(D)$ は、2 点からなっていることがわかる。

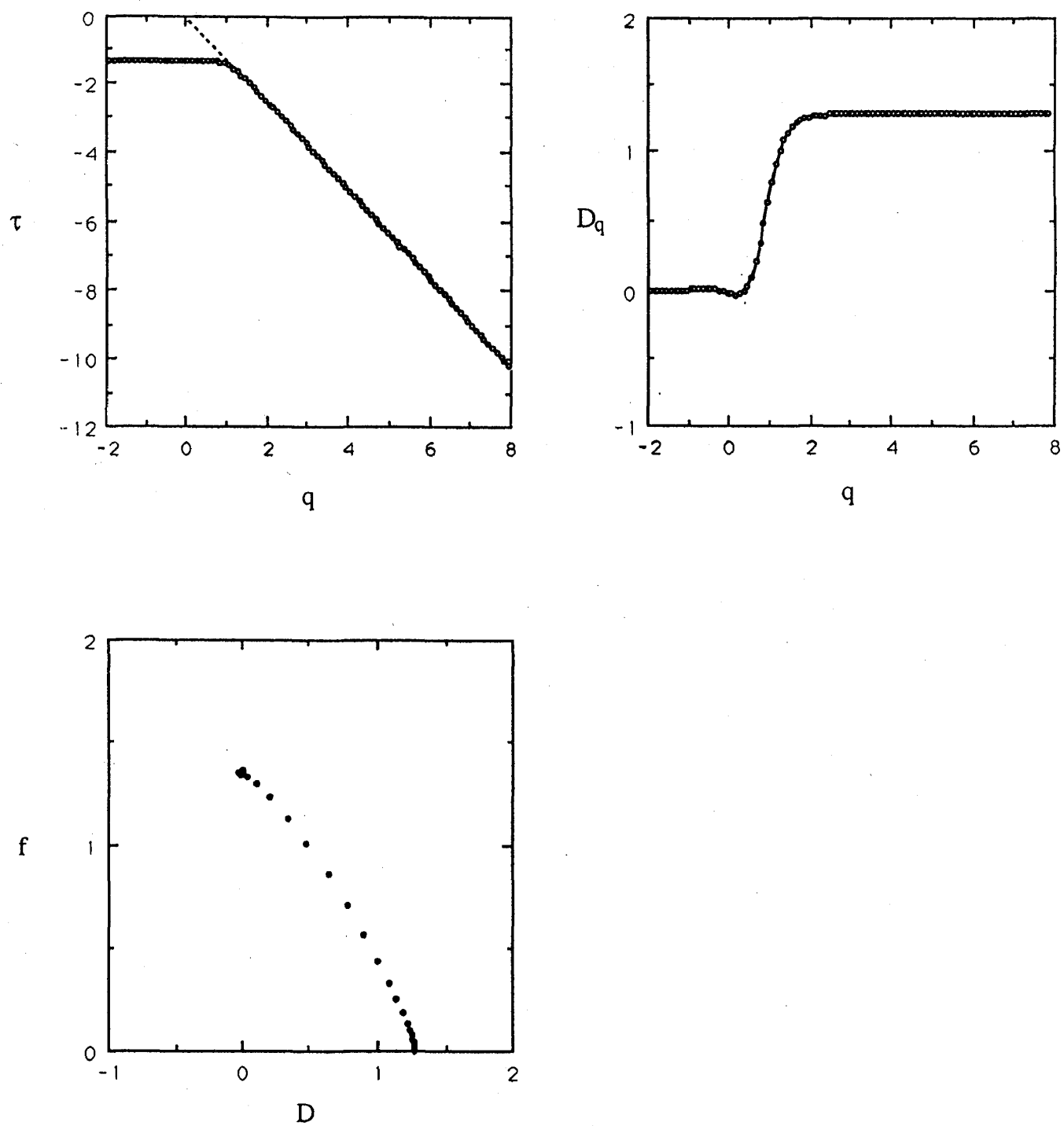


図 2: 1024 × 1024 の格子による結果

4 Generator による考察

次に、Generator によって作られるパターンについて同様に考えてみる。

下の図 3 のような、main の部分が m で a と b の島を持つ Generator を例に考える。

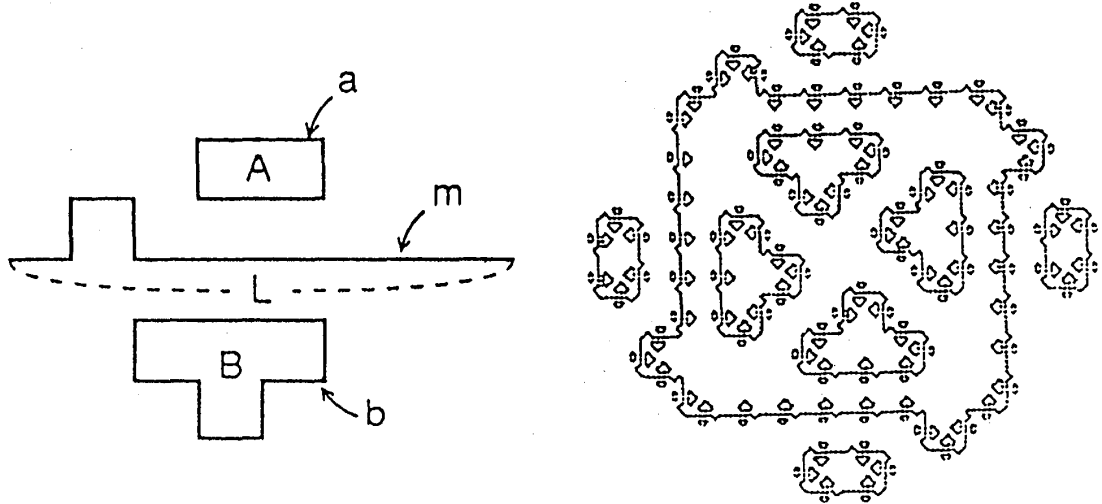


図 3: Generator とそれによってできるパターンの例

ここで $w = m + a + b$ として、全体の次元 D_w 、最大の島の次元 D_c は、

$$D_w = \frac{\log w}{\log L}$$

$$D_c = \frac{\log m}{\log L}$$

で与えられる。分配関数 $Z_l(q)$ は、 i ステップ後の単位長さを $l = L^{-i}$ として、

$$Z_l(q) = Z_{L^{-i}}(q)$$

$$= m^{iq} + (a^q + b^q) \frac{m^{iq} - w^i}{m^q - w}$$

となる。これは、 $l \rightarrow 0$ の極限では次のように定義される q_c によって

$$m^{iq_c} = w^i$$

$$q_c = \frac{\log w}{\log m} = \frac{D_w}{D_c} \quad (> 1)$$

$$Z_{L^{-i}}(q < q_c) = (a^q + b^q) \frac{w^i}{w - m^q}$$

$$\tau(q < q_c) = -\frac{\log w}{\log L}$$

$$= -D_w$$

$$Z_{L^{-i}}(q > q_c) = m^{iq} + (a^q + b^q) \frac{m^{iq}}{m^q - w}$$

$$\begin{aligned}\tau(q > q_c) &= -q \frac{\log m}{\log L} \\ &= -q D_c\end{aligned}$$

とあらわされ、図4のような形になる。

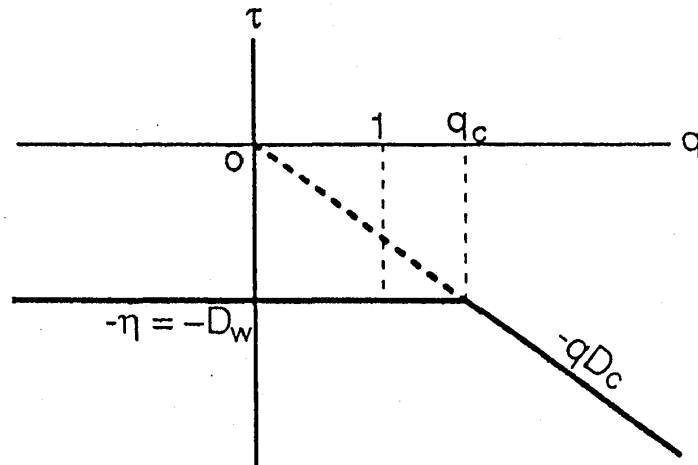


図4: Generator によるパターンでの $\tau(q)$

この結果より、このパターンも simulation の場合と同様にそれぞれの島の次元は全て D_c であることがわかる。これは Generator に島がいくつあっても、どんな形をしていても、できるパターンのそれぞれの海岸線は Generator の main の部分だけで決定されることによるものである。

またこれは Generator に randomness をいれても同様の結果となる。

5 結果

今回用いたパターンでは、それぞれの cluster の次元は全て D_c に等しいことがわかり、その D_c を求めることができた。また、その時の $f(D)$ は、 $D=0, f=D_w=\eta$ と $D=D_c, f=0$ の2点からなっている。

今後の課題としては、 $f(D)$ が2点以上、あるいは連続になった、異なる次元を持つ cluster が集まってできているパターンが存在するのかを考えてみたい。