

速い拡散（レヴィウォーク）における外場に対する応答

慶應義塾大学理工学研究科 秋元琢磨

Distributional Response to Bias in Superdiffusion (Lévy Walk)

Takuma Akimoto

Faculty of Science and Technology, Keio University

概要

本論文では、確率過程におけるエルゴード性の弱い破れをレヴィウォークモデルを用いて議論する。力学系では、エルゴード性はその不変測度を用いて定義されるが、その不変測度が規格化できない、所謂、無限測度である場合、通常のエルゴード性（時間平均が空間平均に収束する事）が破れ、弱い意味で（分布として）時間平均が空間平均に収束する。平均持続時間の平均値が発散し、速い拡散が生じるレヴィウォークモデルにおいて、長時間平均で定義されたドリフトが、本質的にランダムになり、その分布が一般化逆正弦分布に収束する事を Lamperti の定理を用いて示す。この結果は、レヴィウォークモデルにエルゴード性の弱い破れが現れる事を意味している。

1 Introduction

多くの確率過程 X_t では、確率変数 X_t の平均値 $\langle X \rangle$ が存在するならば¹、 X_t の時間平均は空間平均 $\langle X \rangle$ に収束する（エルゴード性）。これは、確率論では、大数の法則として知られている：

$$\Pr \left\{ \left| \frac{1}{t} \int_0^t X_v dt' - \langle X \rangle \right| > \epsilon \right\} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty. \quad (1)$$

しかしながら、時間平均と空間平均が一致するというエルゴード性は常に成立するとは限らない。実際、ランダムウォークやブラウン運動といったかなりシンプルでマルコフ性を持つような過程でもエルゴード性が破れる場合がある。例えば、有限の領域に閉じ込められていないブラウン運動において、その中の有限領域に滞在している時間（滞在時間の割合）は、一定値には収束しない [1]。これは、ブラウン粒子の有限領域への再帰時間の平均値が発散する事に起因している。換言すれば、空間全体における任意の近傍を経巡るのに無限の時間がかかってしまう。このような無限時間かかって空間を経巡る過程は、単に空間が無限に広がった場合だけではなく、トラップ時間の平均値が発散するような場合もある。Bouchaud は、スピングラスの状態がトラップされる事により有限時間ではすべての状態を経巡る事はできないため、エルゴード性が弱く破れている²と考えた [2]。

実際に、彼の考えたトラップモデルやその平均場近似である連続時間ランダムウォーク (CTRW) では、長時間平均量（例えば、平均 2 乗変位やその拡散係数）が本質的にランダムになり、通常のエルゴード性が破れている事が示されている [3,4]。しかしながら、長時間平均量は、弱い意味で（分布として）収束するため、エルゴード性が弱く破れているという。理論的には、こ

¹以下、 $\langle \cdot \rangle$ は空間（アンサンブル）平均を表す。

²原理的には経巡る事ができるので、“弱く”と言っている。実際、拡張されたエルゴード性（弱い意味で時間平均が空間平均に収束）は持っている。

これらのエルゴード性の弱い破れは、その背後にある更新過程におけるエルゴード性の弱い破れと関係している。更新過程は、連続した更新間の時間が独立同一分布に従うような点過程である。更新間の時間の平均値が有限ならば、時刻 t までの更新数 N_t の平均値は、平均値 $\langle \tau \rangle$ を用いて $\langle N_t \rangle \sim t/\langle \tau \rangle$ となる。さらに、時間平均量である更新割合 N_t/t は、 $1/\langle \tau \rangle$ に収束する [5]。しかしながら、更新間の時間の平均値が有限でない場合、更新割合 N_t/t は 0 に収束する。さらに、適当なスケーリング N_t/t^α ($0 < \alpha < 1$) に対しても、一定値に収束させる事はできない。しかし、 N_t/t^α が分布として収束するような α が存在する事が知られている [6]。

近年、細胞内輸送現象において、長時間平均量（拡散係数）の大きな揺らぎが注目を集めている。具体的には、生きている細胞内の mRNA の拡散 [7] や細胞膜上でのたんぱく質の拡散 [8] において、1 分子測定により得られた時系列を用いて定義される長時間平均で定義された平均 2 乗変位、

$$\overline{\delta^2}(\Delta; t) \equiv \frac{1}{t - \Delta} \int_0^{t-\Delta} (X_{t'+\Delta} - X_{t'})^2 dt', \quad (2)$$

が遅い拡散 [平均 2 乗変位が線形より遅く増大: $\overline{\delta^2}(\Delta; t) \sim D_\alpha t^\alpha$ ($\alpha < 1$)] を示すだけでなく、その拡散係数 D_α が実験毎そして分子によって大きく異なる事が発見された（エルゴード性の弱い破れ）。

CTRW では、ランダムウォーカーはランダムな時間トラップされ遅い拡散を示すが、ランダムな時間一定方向に（バリスティックに）動き続けながらランダムウォークを行うレヴィウォークでは、平均 2 乗変位が線形より大きく増大する [$\langle X_t^2 \rangle \propto t^\alpha$ ($\alpha > 1$)]。CTRW とのアナロジーよりレヴィウォークにおいても長時間平均量が分布として収束する（エルゴード性の弱い破れ）と予想されているが、これまでにそのような結果は得られていなかった。本論文では、レヴィウォークにおいて、通常のエルゴード性の破れが現れる事を示す。具体的には、レヴィウォークにバイアスを加えると、時間平均で定義されたドリフト、

$$\bar{\delta}(\Delta; t) \equiv \frac{1}{t - \Delta} \int_0^{t-\Delta} (X_{t'+\Delta} - X_{t'}) dt', \quad (3)$$

は、 $\bar{\delta}(\Delta; t) = \bar{V}\Delta$ となるが、その大きさ $\bar{V}$ は分布として収束（一般化逆正弦分布）する事を示す。

2 Model

本論文では、1 次元のレヴィウォークを考える。1 次元のレヴィウォークでは、通常のランダムウォークと同じように、ランダムウォーカーは右、左にランダムに向きを変えながら動く。通常のランダムウォークと異なる点は、毎ステップ右に動くか左に動くのかをランダムに決めるのではなく、一旦、どちらかの向きに動きだしたら、ランダムな時間一定速度（以下、速さは 1 とする）で動き続ける事である。この右向き及び左向きに動き続ける時間 τ_+, τ_- は、独立同一分布に従う確率変数であるとする。このようなレヴィウォークは、不均質な媒質中の光 [7] や動物の採餌行動に現れるモデル [8] である。

ここでは、一定方向へ動き続ける持続時間 τ の残存確率 $\mathcal{F}(\tau)$ は

$$\mathcal{F}(\tau) \equiv \int_\tau^\infty f(\tau') d\tau' \sim \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^\beta \quad \tau \rightarrow \infty \quad (4)$$

であるとする ($\beta > 0$)。ここで、 $f(\tau)$ は τ の確率密度関数である。ランダムウォーカーは、バリスティックな運動が終わったとき、確率 p で右向き、確率 $q = 1 - p$ で左向きにバリスティック

クな運動を始める。したがって、バイアス c は、 $c = p - q$ で表現される。 $c = 0$ のときは、バイアスのない拡散となる。

$c = 0$ のとき、 $\beta < 1$ では、持続時間の平均値が発散し、 $1 < \beta < 2$ では、その2次モーメントが発散する。この事により、平均2乗変位 (MSD) $\langle X_t^2 \rangle$ は、異常拡散 (MSD で時間に対して線形に増大しない) が生じる:

$$\langle X_t^2 \rangle \propto \begin{cases} t & (2 < \beta) \\ t^{3-\beta} & (1 < \beta < 2) \\ t^2 & (\beta < 1). \end{cases} \quad (5)$$

3 Results

本論文では、1次元のレヴィウォークを考えるため、時刻 t でのランダムウォーカーの位置 X_t は、次のように簡単に書ける。

$$X_t = T_t - (t - T_t) = 2T_t - t. \quad (6)$$

ここで、 T_t は、 $[0, t]$ の間で右向きに動いている時間である。したがって、(アンサンブル平均で定義された) MSD は、

$$\langle X_t^2 \rangle = 4\langle T_t^2 \rangle - 4\langle T_t \rangle t + t^2 \quad (7)$$

で与えられる。バイアスがなく ($c = 0$) $1 < \beta < 2$ の場合、[9] より、

$$\langle T_t \rangle \sim \frac{t}{2} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (8)$$

$$\langle T_t^2 \rangle - \langle T_t \rangle^2 \sim \frac{\tau_0^\beta}{(2-\beta)(3-\beta)\langle \tau \rangle} t^{3-\beta} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (9)$$

となるため、平均2乗変位は速い拡散を示す:

$$\langle X_t^2 \rangle \sim \frac{\tau_0^\beta}{(2-\beta)(3-\beta)\langle \tau \rangle} t^{3-\beta}. \quad (10)$$

$\beta < 1$ の場合、

$$\langle T_t \rangle \sim (1-\beta)t^2 \quad (11)$$

となり、MSD はバリスティック

$$\langle X_t^2 \rangle \sim (1-\beta)t^2 \quad (12)$$

になる。

本論文では、 $c \neq 0$ のときの長時間平均量 (3) を考える³。長時間平均で定義されたドリフト (TAD) は、

$$\bar{\delta}(\Delta; t) = \frac{1}{t-\Delta} \left\{ \int_{t-\Delta}^t X_{t'} dt' - \int_0^\Delta X_t' dt' \right\} \cong \frac{X_t}{t} \Delta = \left(\frac{2T_t}{t} - 1 \right) \Delta \quad (13)$$

³長時間平均で定義された平均2乗変位 (2) は、本質的に揺らぐことなく、 $\bar{\delta}^2(\Delta; t) \rightarrow D_\beta \Delta^2$ ($t \rightarrow \infty$) となる。したがって、見かけ上、エルゴード性は破れていない。

と近似できる⁴。したがって、 T_t/t の分布がわかれば、TADの振る舞いがわかる。Lampertiの定理[6]は、 T_t/t の分布を明らかにする。具体的には、レヴィウォークにおいて、右向きに動いている時間の割合に関して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(T_t/t \leq x) = G_{\alpha, \beta}(x) \quad (14)$$

が存在するのは、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle T_t/t \rangle = \alpha \quad (15)$$

と

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(1-x)F'(x)}{1-F(x)} = \beta \quad (16)$$

が存在する時に限る。ここで、 $F(x)$ は、モーメント母関数である。もし、これらの条件が満たされるならば、 $G(x) = G_{\alpha, \beta}(x)$ は、 $[0, 1]$ 上で定義され、 β と c が0でも1でもないならば、その確率密度関数は、

$$G'_{\alpha, \beta}(t) = \frac{a \sin \beta}{\pi} \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}}{a^2 t^{2\beta} + 2at^{\beta}(1-t)^{\beta} \cos \pi\beta + (1-t)^{2\beta}} \quad (17)$$

で与えられる。ここで、

$$a = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \quad (18)$$

今回のモデルの場合、式(14)は満たされており、 $\alpha = (c+1)/2$ となるので、上の条件を満たしている。ドリフトの大きさ $\bar{V} \equiv X_t/t$ は、 $2T_t/t - 1$ で与えられるので、Lampertiの定理より、その大きさは一定値には収束せず、本質的にランダムになる。 $t \rightarrow \infty$ の極限の下で、その確率は

$$\Pr\left\{\frac{2T_t}{t} - 1 \leq x\right\} = \Pr\left\{\frac{T_t}{t} \leq \frac{1+x}{2}\right\} = G_{\alpha, \beta}(x+1/2) \quad (19)$$

で与えられる。したがって、ドリフトの大きさ $\bar{V}$ は分布として収束している。図1に示しているように、数値計算の結果と理論はよく一致している。また、ドリフトの大きさ $\bar{V}$ のアンサンブル平均は、

$$\langle \bar{V} \rangle = c \quad (20)$$

となり、外場の強さに比例する。

4 Conclusion

本研究では、レヴィウォークにおいて時間平均量（ドリフト）が本質的にランダムになる事をLampertiの定理を用いて示した。その長時間平均量は、一定値には収束しないが、その分布は一般化逆正弦分布に収束するため、エルゴード性は弱く破れている。長時間平均量（ドリフト）自体は、確率変数としてランダムになるが、そのアンサンブル平均をとれば、外場に対して線形応答を示す。レヴィウォークは、速い拡散を示すシンプルなモデルであり、自然現象で見られる速い拡散においても時間平均量のランダム性（エルゴード性の弱い破れ）が観測されると期待できる。

⁴決定論的拡散モデル（力学系）では、厳密に成立する[7]。

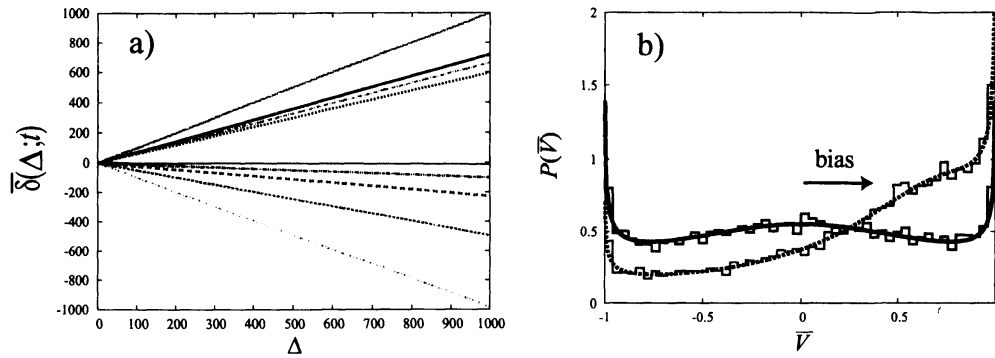


図 1: a) 時間平均で定義されたドリフト $\bar{\delta}(\Delta; t)$ の振る舞い. b) $\bar{V}$ の確率密度関数. バイアスがないときは、対象な分布になるが、バイアスが加わると非対称になる [7].

- [1] D. A. Darling and M. Kac, Trans. Am. Math. Soc. **84**, 444 (1957).
- [2] J. Bouchaud, J. Phys. I (France) **2**, 1705 (1992).
- [3] Y. He, S. Burov, R. Metzler, and E. Barkai, Phys. Rev. Lett. **101**, 058101 (2008).
- [4] T. Miyaguchi and T. Akimoto, Phys. Rev. E **83**, 031926 (2011).
- [5] D. R. Cox, *Renewal theory* (Methuen, London, 1962).
- [6] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2nd ed., Vol. 2 (Wiley, New York, 1971).
- [7] P. Barthélemy, J. Bertolotti, and D. S. Wiersma, Nature, **453**, 495 (2008).
- [8] O. Bénichou, C. Loverdo, M. Moreau, and R. Voituriez, Rev. Mod. Phys. **83**, 81 (2011).
- [7] I. Golding and E. C. Cox, Phys. Rev. Lett. **96**, 098102 (2006).
- [8] A. V. Weigel, B. Simonb, M. M. Tamkunc, and D. Krapf, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **108**, 6438 (2011).
- [9] C. Godrèche and J. M. Luck, J. Stat. Phys. **104**, 489 (2001).
- [10] J. Lamperti, Trans. Am. Math. Soc. **88**, 380 (1958).
- [11] T. Akimoto, Phs. Rev. Lett. **108**, 164101 (2012).