

Cotriple cohomology について

京大 数理研 島田信夫

古典的なホモロジー代数 (Cartan - Eilenberg [5]) の拡張として, 一方では projective (injective) object の概念が一般化された (relative homological algebra [7], [11]), 他方では単作的 resolution を用いて任意の関数 (ただし値域は abelian) の derived functors を定義する方法が導入された (Dold-Puppe [6], Eilenberg-Moore [8], André [1], Beck [4], Tierney-Vogel [12], Iwai [10]). それによって, これまで対象のそれぞれに応じて考えられた各種の (コ) ホモロジー論の多くが, 統一的な観点でとらえられる様になった。

ここでは上記の方法を概括すると共に, functorial homology の典型としての cotriple homology について述べる。

§ 1. derived functors

以下 $\mathcal{A}$ を任意の category, $\mathcal{B}$ を abelian category, $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を任意の (covariant) functor とする (特に断らない限り)。

もし $\mathcal{A}$ における projective class $\mathcal{P}$ (以下の定義参照) が与えられたとき, 適当な条件のもとに T の left derived functor $L_n T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ($n \geq 0$) が定義される. この節および次節の議論はすべて dualize され得る.

$\mathcal{A}$ の objects のある class を $\mathcal{P}$ とする. $\mathcal{A}$ の morphism $f: A \rightarrow B$ は

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}, f): \mathcal{A}(\mathcal{P}, A) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{P}, B) \text{ が surjective for } \forall P \in \mathcal{P}$$

のとき $\mathcal{P}$ -epimorphism とよばれる. 任意の object $A \in \mathcal{A}$ に対して, $P \in \mathcal{P}$ と $\mathcal{P}$ -epimorphism $f: P \rightarrow A$ が存在するとき, $\mathcal{P}$ は projective class (in $\mathcal{A}$) とよばれる.

(1.1) abelian categories $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の間の additive functor $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ の (left) derived fe. $L_n T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ の普通の定義を繰り返して見よう.

$A \in \mathcal{A}$ の $\mathcal{P}$ -projective resolution $F_\bullet^+ = (F_\bullet \rightarrow A)$:

$$\rightarrow F_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

をとる. ここに $F_n \in \mathcal{P}$ ($n \geq 0$), かつ, アーベル群の augmented chain complex $\mathcal{A}(\mathcal{P}, F_\bullet^+)$ が acyclic である (for $\forall P \in \mathcal{P}$).

もう一つの $\mathcal{P}$ -proj. resolution $F'_\bullet \rightarrow A$ をとれば, $F_\bullet \simeq F'_\bullet$ (chain equivalence). 従って T の加法性から $TF_\bullet \simeq TF'_\bullet$ となり, resolution のとり方に依らずホモロジ - $L_n T(A) = H_n(TF_\bullet)$, $n \geq 0$, が同型を除いて定まる.

(1.2) 前項と同じ条件, ただし T が non-additive とする.
 この場合には勿論上の議論は成り立たない. Dold-Puppe [6] は
 simplicial object を用いてこの障害を除いた.

つまり, $\mathcal{A}$ における複体 (chain complex) の圏 $c(\mathcal{A})$ と単体的複体 (simplicial object) の圏 $s(\mathcal{A})$ の知られた equivalence

$$s(\mathcal{A}) \xrightleftharpoons[N]{N} c(\mathcal{A}), \quad KN \simeq \text{Id}, \quad NK \simeq \text{Id},$$

によって $X_* = K(F_*)$ をつくる.

このとき $F_* \simeq F'_*$ ならば $K(F_*) \simeq K(F'_*)$ (simplicial equivalence).

ところが任意の functor $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ の自然な拡張 $T^s: s(\mathcal{A}) \rightarrow s(\mathcal{B})$ は homotopy を保存する: $X_* \simeq Y_* \Rightarrow T^s(X_*) \simeq T^s(Y_*)$. 従ってまた $H_n(NT^s X_*) \simeq H_n(NT^s Y_*)$. これによって $L_n T(A) = H_n(NT^s K(F_*))$, $n \geq 0$, が定まる.

注意. 1) T が additive なら $NT^s = TN$, 従って (1.2) は (1.1) の拡張である. 2) 上述中で複体 $F_* = (F_n)_{n \geq 0}$ の次元をずらして $(S^n F)_i = 0$ ($0 \leq i \leq n-1$), $(S^n F)_i = F_{i-n}$ ($i \geq n$) なる複体 $(S^n F)_*$ を考え, $L_q T(A, n) = H_q(NT^s K(S^n F)_*)$ と定義したものは位相幾何への興味深い応用をもつ (n -level derived functors).

(1.3) 前項を hint として, さらに一般の category $\mathcal{A}$, および任意の functor $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ について derived functor を定義する (Iwai [10], Tierney-Vogel [12]).

$X_* \rightarrow A$ を augmented quasi-simplicial object in $\mathcal{A}$ とする (つまり必ずしも degeneracy operator を持たぬ simplicial object). $X_*^+ = (X_* \rightarrow A)$ は, $\varepsilon^i: X_n \in \mathcal{P}$ ($n \geq 0$), かつ, $\mathcal{P}$ -contractible ($\mathcal{A}(\mathcal{P}, X_*^+)$ が $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}$ につき homotopically trivial), 言い換えれば, $a^0, \dots, a^{n+1}: \mathcal{P} \rightarrow X_n$ ($n \geq -1, X_{-1} = A$) が与えられて, $\varepsilon^i a^j = \varepsilon^{j-1} a^i$ ($i < j$) をみたすとき, $a = a(a^0, \dots, a^{n+1}): \mathcal{P} \rightarrow X_{n+1}$ が存在して $\varepsilon^i a = a^i$ ($0 \leq i \leq n+1$) となるならば, $\mathcal{P}$ -proj. quasi-simplicial resolution of A とよばれる. ここで $\varepsilon^i = \varepsilon_n^i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ ($0 \leq i \leq n$) は X_*^+ の face operator.

補題. 二つの $\mathcal{P}$ -proj. q.-simpl. resol. $X_* \rightarrow A, Y_* \rightarrow A$ に対して, $X_* \simeq Y_*$.

証) $f_{-1} = \text{id}: A \rightarrow A$ として inductive に $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ を定める:
 $f_n = a(f_{n-1}, \varepsilon^0, \dots, f_{n-1}, \varepsilon^n)$. $f_* = (f_n): X_*^+ \rightarrow Y_*^+$. 別の q.-simpl. map $g_*: X_*^+ \rightarrow Y_*^+$ をとれば $f_* \simeq g_*$ (q.-simplicially homotopic) なることを示そう. そのため次の様な homotopy $h_n^i: X_n \rightarrow Y_{n+1}$ ($0 \leq i \leq n$) の存在を言う:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 h_n^0 &= f_n, & \varepsilon^{n+1} h_n^n &= g_n \\ \varepsilon^i h_n^j &= h_{n-1}^{j-1} \varepsilon^i & (i < j) \\ \varepsilon^{i+1} h_n^{i+1} &= \varepsilon^{i+1} h_n^i \\ \varepsilon^i h_n^j &= h_{n-1}^j \varepsilon^{i-1} & (i > j+1) \end{aligned}$$

そこでまず, $\Delta_n^0 = f_n, \Delta_n^1, \dots, \Delta_n^n, \Delta_n^{n+1} = g_n: X_n \rightarrow Y_n$ を帰納法で求める. Δ_k^j が ($k < n, 0 \leq j \leq k+1$) および

$(k=n, j>i)$ まで定まったとして,

$$\Delta_n^i = a(\Delta_{n-1}^{i-1}\varepsilon^0, \dots, \Delta_{n-1}^{i-1}\varepsilon^{i-1}, \varepsilon^i\Delta_n^{i+1}, \Delta_{n-1}^i\varepsilon^{i+1}, \dots, \Delta_{n-1}^i\varepsilon^n)$$

とおく. つぎに n に関して帰納的に h_n^σ を

$$h_n^\sigma = a(h_{n-1}^{\sigma-1}\varepsilon^0, \dots, h_{n-1}^{\sigma-1}\varepsilon^{j-1}, \Delta_n^\sigma, \Delta_n^{\sigma+1}, h_{n-1}^\sigma\varepsilon^{j+1}, \dots, h_{n-1}^\sigma\varepsilon^n)$$

で定める. 補題はこれから容易に従う.

これを用いて, $L_n T(A) = H_n(NT^s X_*)$ と定義する.

さて $\mathcal{A}$ が abelian の場合, 前項における $KF_* \rightarrow A$ は $\mathcal{P}$ -proj. quasi-simpl. resol. である. これは $X_* = KF_*$ とすると $\mathcal{A}(P, X_*)$ が Kan 条件を満たし, かつ $\mathcal{A}(P, NX_*^+) \cong \mathcal{A}(P, F_*^+)$ が acyclic なることから出る. 実際 $a^0, \dots, a^{n+1}: P \rightarrow X_n$, $\varepsilon^i a^j = \varepsilon^{j-1} a^i$ ($i < j$), が与えられたとき, Kan 条件から $b: P \rightarrow X_{n+1}$, $\varepsilon^i b = a^i$ ($i > 0$), が存在する. このとき $\varepsilon^i(a^0 - \varepsilon^0 b) = 0$ ($i \geq 0$). 従って $c: P \rightarrow F_{n+1}$ が存在して, $\varepsilon^0 c = a^0 - \varepsilon^0 b$, $\varepsilon^i c = 0$ ($i > 0$). すると $a = b + c: P \rightarrow X_{n+1}$ とおけば, $\varepsilon^i a = a^i$ ($i \geq 0$) となり, $X_*^+ = KF_* \rightarrow A$ が $\mathcal{P}$ -contractible なることが言えた. $F_n \in \mathcal{P}$ から $X_n \in \mathcal{P}$ は明らか.

従ってこの項(1.3)における derived fc. の定義は, 前項(1.2)における定義の拡張であることがわかる.

(1.4) 前項における quasi-simplicial resolution は, 単に derived functor を定義するという目的に対しては, 少し条件

が強過ぎるので、これを弱めることが望ましい。そのために次の簡単な remark が有用である。

任意の category $\mathcal{A}$ に対して, pre-additive category $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ が次の様にして定まる. $\text{Ob } \mathbb{Z}\mathcal{A} = \text{Ob } \mathcal{A}$, $\mathbb{Z}\mathcal{A}(A, B)$ は集合 $\mathcal{A}(A, B)$ から生成された自由アーベル群とする (必要ならば, $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ に zero object を追加してもよい). canonical inclusion $J: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{A}$ により $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ の subcategory と見做せる. 任意の函手 $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$: abelian) は additive extension $\bar{T}: \mathbb{Z}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ をもつ: $T = \bar{T}J$. もし $\mathcal{A}$ が additive なら canonical projection $\theta: \mathbb{Z}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ が存在して $\theta J = \text{Id}$. そうに T が additive なら $\bar{T} = T\theta$.

前に戻って $\mathcal{P}$ を projective class in $\mathcal{A}$ とする. $A \in \mathcal{A}$ に対して, augmented chain complex $X_\bullet \rightarrow A$ in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$:

$$\rightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} A, \quad d_i d_{i+1} = 0,$$

は, $X_n \in \mathcal{P}$ ($n \geq 0$) かつ $\mathcal{P}$ -acyclic ($\forall P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{A}(P, X_n) \xrightarrow{\bar{d}_n} \cdots \xrightarrow{\bar{d}_1} \mathbb{Z}\mathcal{A}(P, X_0) \xrightarrow{\bar{d}_0} \mathbb{Z}\mathcal{A}(P, A) \rightarrow 0$$

が exact) のとき, $\mathcal{P}$ -projective resolution (of A) とよばれる.

自明な注意として $\mathcal{P}$ -acyclicity は次のことと同値: 任意の $P \in \mathcal{P}$ に対して contracting homotopy

$$\begin{aligned} \bar{h}_n: \mathbb{Z}\mathcal{A}(P, X_n) &\rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{A}(P, X_{n+1}), \quad n \geq -1, \quad X_{-1} = A, \\ \bar{d}_{n+1} \bar{h}_n + \bar{h}_{n-1} \bar{d}_n &= \text{id}. \end{aligned}$$

が存在する.

こゝで comparison theorem 「 Γ の $\mathcal{P}$ -proj. resol. $X_\bullet \rightarrow A$, $Y_\bullet \rightarrow A$ があれば, $X_\bullet \simeq Y_\bullet$ (in $\mathcal{Z}\mathcal{A}$)」が容易に従う。それ故 derived fc. は $L_n T(A) = H_n(\overline{T}X_\bullet)$, $n \geq 0$, とおけばよい。

この定義が (1.3) におけるその拡張であることを示そう:
いま $X_\bullet \rightarrow A$ が (1.3) における $\mathcal{P}$ -projective ^{quasi-}simplicial resol. であるとする。 $X_0 \xrightarrow{\varepsilon} A$ は $\mathcal{P}$ -epimorphism であるから, $f: P \rightarrow A$ に対して $\varepsilon h_1(f) = f$ となる morphism $h_1(f): P \rightarrow X_0$ が存在する。以下帰納的に, $f: P \rightarrow X_n$ に対して $h_n(f) = a(f, h_{n-1}(\varepsilon^0 f), \dots, h_{n-1}(\varepsilon^n f))$ とおけば h_n を linear に拡張して contracting homotopy $\overline{h}_n: \mathcal{Z}\mathcal{A}(P, X_n) \rightarrow \mathcal{Z}\mathcal{A}(P, X_{n+1})$ が得られる。

以上でこの項における derived fc. の定義が前述中一番一般的であることがわかった ((1.1) $\subset$ (1.2) $\subset$ (1.3) $\subset$ (1.4))。

こゝで derived fc. の簡単に導き出せる性質を述べよう。

定理 1.1. $L_n T(P) = \begin{cases} T(P) & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}, P \in \mathcal{P}.$

証) $P_n = P$ ($n \geq -1$), $d_{2i} = \text{id}$, $d_{2i+1} = 0$, とおけば $P_\bullet \xrightarrow{d_0} P$ in $\mathcal{Z}\mathcal{A}$ は $\mathcal{P}$ -proj. resol. of P 。

定理 1.2. 函手の短完全列 $0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$ (in $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$) から derived fc. の長完全列が従う:

$$\rightarrow L_n T' \rightarrow L_n T \rightarrow L_n T'' \xrightarrow{\partial} L_{n-1} T' \rightarrow \dots \rightarrow L_0 T'' \rightarrow 0$$

証) $X_\bullet \rightarrow A$ を $\mathcal{P}$ -proj. resol. とする。複体の完全列 $0 \rightarrow \overline{T}'X_\bullet \rightarrow \overline{T}X_\bullet$

$\rightarrow \overline{\tau}'' X. \rightarrow 0$ (in B) から定理が得られる.]

§ 2. resolution の存在

$\mathcal{A}$ における (closed) projective class $\mathcal{P}$ が与えられたとき, 比較的弱い条件のもとに $\mathcal{P}$ -proj. resolution の存在が示される.

(2.1) $\mathcal{A}$ が pre-additive で, zero object および kernels をもつ場合.
これは classical な case で (1.1) の意味の $\mathcal{P}$ -proj. resol. の存在が容易にわかる. 従ってまた (1.2) の場合にも適用される.

(2.2) $\mathcal{A}$ が finite limits (finite product, equalizer) をもつ場合.
この場合 Tierney-Vogel [2] に従って, (1.3) における quasi-simpl. resol. の存在を示そう.

まず, $\mathcal{A}$ における morphism の列 $(f^0, \dots, f^n): A \rightrightarrows B$ に対して, その simplicial kernel $(k^0, \dots, k^{n+1}): K \rightrightarrows A$ を次の二条件をみたすものとして定義する:

$$(i) \quad f^i k^j = f^{j-1} k^i \quad (0 \leq i < j \leq n+1),$$

(ii) $(k^0, \dots, k^{n+1})$ は性質 (i) に従って universal (つまり, 他の任意の $(h^0, \dots, h^{n+1}): H \rightrightarrows A$ で条件 (i) をみたすものが与えられたとき, $h: H \rightarrow K$ が一意的に存在して $h^i = k^i \circ h$ となる).

補題. $\mathcal{A}$ が finite limits をもてば, simplicial kernel をもつ.

証) 与えられた $(f^0, \dots, f^n): A \rightrightarrows B$ に対して, 整数対 (i, j) ,

$0 \leq i < j \leq n+1$, の集合に辞書式順序を入れる:

$$(ij) < (kl) \iff i < k, \text{または } i = k \text{ かつ } j < l.$$

このとき射 $K_{ij} \xrightarrow{\gamma_{ij}} A^{n+2} = A \times \dots \times A$ を帰納的に定義する.

$p_j: A^{n+2} \rightarrow A$ ($0 \leq j \leq n+1$) を射影として, まず

$$\gamma_{01} = \text{equalizer}(f_{p_1}^0, f_{p_0}^0), \quad K_{01} \xrightarrow{\gamma_{01}} A^{n+2} \xrightleftharpoons[f_{p_0}^0]{f_{p_1}^0} B \quad \text{とおく.}$$

(kl) が (ij) の直後の元とするとき

$$\pi = \text{equalizer}(f_{p_l}^k \circ \gamma_{ij}, f_{p_k}^{l-1} \circ \gamma_{ij}), \quad K_{kl} \xrightarrow{\pi} K_{ij} \xrightarrow{\gamma_{ij}} A^{n+2} \xrightleftharpoons[f_{p_k}^{l-1}]{f_{p_l}^k} B$$

として, $\gamma_{kl} = \gamma_{ij} \circ \pi$ と定義する. このとき

$$K = K_{n,n+1} \xrightarrow{\gamma_{n,n+1}} A^{n+2} \xrightarrow{p_n} A, \quad k^0 = p_n \circ \gamma_{n,n+1} \text{ が求めるものである.}$$

(limit の概念を使えば上の証明は次の様になる: 抽象的に finite category $\mathcal{D} = \{x_0, \dots, x_{n+1}, y_{ij}; 0 \leq i < j \leq n+1\}$ を考える. 各 i, j ($i < j$) について morphism $g^{ij}: x_i \rightarrow y_{ij}$, $g^{ji}: x_j \rightarrow y_{ij}$ が対応し, 他の morphisms はすべて trivial なものとする. いま $\mathcal{A}$ へ $D: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ を, $D(x_i) = A$, $D(y_{ij}) = B$, $D(g^{ij}) = f^{j-1}$, $D(g^{ji}) = f^i$ により定義すれば, $K = \varprojlim_{\mathcal{D}} D$).

定理 2.1. $\mathcal{A}$ が finite limits をもてば, 任意の $A \in \mathcal{A}$ は $\mathcal{P}$ -proj. quasi-simpl. resolution をもつ.

証) $P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0^0} A$, $P_0 \in \mathcal{P}$, なる $\mathcal{P}$ -epim. をとる. ε_0^0 の simplicial kernel $(k_1^0, k_1') : K_1 \rightrightarrows P_0$ をとり, $P_1 \xrightarrow{\varepsilon_1^0} K_1$, $P_1 \in \mathcal{P}$, を $\mathcal{P}$ -epim. とする. $\varepsilon_1^i = k_1^i \circ e_1 : P_1 \rightarrow P_0$ ($i=0, 1$) と定義する. 以下 inductive に $(\varepsilon_{n-1}^0, \dots, \varepsilon_{n-1}^{n-1})$ の s. kernel K_n , P_n , e_n , ε_n^i , $K_{n+1}, \dots$ がとれる.

これによって augmented g -simpl. object $P_* \rightarrow A$ が得られる. いま $a^0, \dots, a^{n+1}: P \rightarrow P_n$ が $\varepsilon^i a^j = \varepsilon^{j-1} a^i$ ($i < j$) をみたせば, $b: P \rightarrow K_{n+1}$ が存在して $a^i = k_{n+1}^i \circ b$. $\tau = \tau^{\sim} a: P \rightarrow P_{n+1}$ が $b = e_{n+1} \circ a$ なるようにとれる.

(2.3) $\mathcal{A}$ に cotriple $G = (G, \varepsilon, \delta)$ があって $\mathcal{P} = \mathcal{P}_G$ の場合.

まず定義から始める. cotriple $G = (G, \varepsilon, \delta)$ in $\mathcal{A}$ とは, covariant functor $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, natural transformations $\varepsilon: G \rightarrow I_{\mathcal{A}}$, $\delta: G \rightarrow G^2 = G \circ G$ の組で,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & G^2 \\ \varepsilon G \downarrow & & \downarrow \delta G \\ G & & G^2 \xrightarrow{G\delta} G^3 \end{array} \quad \text{可換図式}$$

なるものである (functor coalgebra とよばれる). これと dual の概念は triple とよばれる.

cotriple は 普通, 函手の adjoint pair (S, U) , $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, $S: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, から導びかれる: $C \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{A}$ に対して, natural equivalence

$$\lambda: \mathcal{A}(S(C), A) \cong \mathcal{C}(C, U(A))$$

があるから, natural transformations

$$\varepsilon(A) = \lambda^{-1}(1_{U(A)}): SU(A) \rightarrow A \quad \text{in } \mathcal{A},$$

$$\gamma(C) = \lambda(1_{S(C)}): C \rightarrow US(C) \quad \text{in } \mathcal{C},$$

が得られ, $\varepsilon S \circ S \gamma = 1_S$, $U \varepsilon \circ \gamma U = 1_U$ を用いれば,

cotriple $(S\mathcal{U}, \varepsilon, S\eta\mathcal{U})$ in $\mathcal{A}$ を得る. 逆に, 任意の cotriple が, 適当な adj. pair of fcs. から induce されることも知られている.

$\mathcal{A}$ に cotriple $G = (G, \varepsilon, \delta)$ が与えられたとき, $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$G_n(A) = G^{n+1}(A), \quad (n \geq 0) \text{ とおけば,}$$

$$\varepsilon^i = \varepsilon_n^i = G^i \varepsilon G^{n-i}(A) : G_n(A) \rightarrow G_{n-1}(A), \quad 0 \leq i \leq n,$$

$$\text{および } \delta^i = \delta_n^i = G^i \delta G^{n-i}(A) : G_n(A) \rightarrow G_{n+1}(A), \quad 0 \leq i \leq n,$$

が定義されて, これらの間に次の関係が成り立つ:

$$\varepsilon^i \varepsilon^j = \varepsilon^{j-1} \varepsilon^i \quad (i < j)$$

$$\varepsilon^i \delta^j = \begin{cases} \delta^{j-1} \varepsilon^i & (i < j) \\ \text{id.} & (i = j, j+1) \\ \delta^j \varepsilon^{i-1} & (i > j+1) \end{cases}$$

$$\delta^i \delta^j = \delta^{j+1} \delta^i \quad (i \leq j).$$

これによって ε^i, δ^i をそれぞれ face operators, degeneracy oper. とし, augmented simplicial object $G_*(A) \xrightarrow{\varepsilon} A$ in $\mathcal{A}$ が得られる. いま $\mathcal{P}_G = \{G(A) \text{ およびその retracts}; A \in \mathcal{A}\}$ とおけば, $\mathcal{P}_G$ は projective class in $\mathcal{A}$ となる.

定理 2.2. cotriple (G, ε, δ) in $\mathcal{A}$ が与えられたとき, augmented chain complex $G_*(A) \rightarrow A$ in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ with $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon_n^i$ は, $\mathcal{P}_G$ -proj. resolution of A である.

証) contraction $h_n : \mathcal{A}(P, G_n(A)) \rightarrow \mathcal{A}(P, G_{n+1}(A)), (P \in \mathcal{P}_G)$, をつぎの様に定義する. まず P は $G(P)$ の retract であることを

注意しよう. いま $P \xrightarrow[\pi]{\lambda} G(B)$ があって $\pi\lambda = 1_P$ とする. このとき

$$\theta = G\pi \circ \delta \circ \lambda : P \xrightarrow{\lambda} G(B) \xrightarrow{\delta} G^2(B) \xrightarrow{G\pi} G(P) \quad \text{とおけば}$$

$$\varepsilon(P) \circ \theta = \varepsilon(P) \circ G\pi \circ \delta \circ \lambda = \pi \circ \varepsilon G \circ \delta \circ \lambda = \pi \circ \lambda = 1_P.$$

そこで, $f: P \rightarrow G_n(A)$ に対して, $h_n(f) = Gf \circ \theta \quad (n \geq -1)$, とお

$$\text{けば} \quad \varepsilon^0 h_n(f) = \varepsilon^0 \circ Gf \circ \theta = f \circ \varepsilon(P) \circ \theta = f,$$

$$\varepsilon^i h_n(f) = \varepsilon^i \circ Gf \circ \theta = G(\varepsilon^{i-1} f) \circ \theta = h_{n-1}(\varepsilon^{i-1} f) \quad (i \geq 1).$$

よって contracting homotopy $\bar{h}_n: ZQ(P, G_n(A)) \rightarrow ZQ(P, G_{n+1}(A))$

を得る.

$$\text{この場合 } L_n T(A) = H_n(\bar{T}G_*(A)) = H_n(NT^s G_*(A)), \quad n \geq 0, \text{ と}$$

とくに $H_n(A, T)_G$ と書き, T -係数 cotriple homology という (

もし T が contravariant なら $H^n(A, T)_G$ を cotriple cohomology).

この場合の特性は resolution が functorial に得られていることである. 従って次の様な見方が生ずる:

$$\rightarrow TG_n \rightarrow \cdots \rightarrow TG_0 \rightarrow T \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{B}^A$$

を T の resolution と考えることが出来る.

実際, functor category $\mathcal{B}^A$ に cotriple $(\tilde{G}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta})$ が, $\tilde{G}(T) = TG$, $\tilde{\varepsilon}(T) = T\varepsilon$, $\tilde{\delta}(T) = T\delta$ によって自然に導かれる, $\tilde{P} = \tilde{P}_G$ とおけば, これは $\mathcal{B}^A$ における projective class となる.

いま evaluation fc. $E_A: \mathcal{B}^A \rightarrow \mathcal{B}$, $E_A(T) = T(A)$, に対して,

$\tilde{P}$ -proj. resolution $C_\bullet \rightarrow T$ をとって, E_A の derived functor

$$\tilde{L}_n E_A(T) = H_n(E_A C_\bullet) = H_n(C_\bullet(A))$$

が定まる. 上の $TG_0 \rightarrow T$ は $\tilde{\mathcal{P}}$ -proj. resolution であることがわか

るから
$$\tilde{L}_n E_A(T) \approx H_n(E_A TG_0) = H_n(A, T)_G$$

である.

補題 上の場合, $C_0 \rightarrow T$ が $\tilde{\mathcal{P}}$ -acyclic $\iff C_0 G \rightarrow TG \rightarrow 0$

が split exact ($\exists s_n: C_n G \rightarrow C_{n+1} G (n \geq -1), d_{n+1} G \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n G = 1_{C_n G}$).

証) $\Rightarrow$ $h_n: B^A(P, C_n) \rightarrow B^A(P, C_{n+1})$ の存在から

$$s_n = \{ h_n(C_n \varepsilon - C_n \varepsilon \circ s_{n-1} \circ d_n G) G \} \circ C_n \delta \text{ とおけばよい.}$$

$$\Leftarrow h_n(f) = C_{n+1} \varepsilon \circ s_n \circ f G \circ \theta \text{ とすればよい.}$$

この補題における条件を少し弱めて, $C_0 G \rightarrow TG \rightarrow 0$ が, 単に, exact のとき, $C_0 \rightarrow T$ を weakly $\tilde{\mathcal{P}}$ -acyclic とよぶ.

定理 2.3. augmented chain complex $C_0 \rightarrow T$ in B^A が, $\tilde{\mathcal{P}}$ -proj. (i.e. $C_n \in \tilde{\mathcal{P}}, n \geq 0$), かつ, weakly $\tilde{\mathcal{P}}$ -acyclic のとき

$$H_n(C_0(A)) \approx H_n(A, T)_G.$$

証) $K_{p,q} = \bar{C}_p G_q(A) (p, q \geq 0), K = \Sigma K_{p,q}$ とおいて double complex の spectral seq. を考える.

$${}^I E_{p,q}^2 = H_p^I H_q^{\text{II}}(K) = \begin{cases} H_p(C_0(A)) & (q=0) \\ 0 & (q>0) \end{cases} \xRightarrow{p} H_n(K)$$

$${}^{\text{II}} E_{p,q}^2 = H_q^{\text{II}} H_p^I(K) = \begin{cases} H_q(\bar{T}G_0(A)) & (p=0) \\ 0 & (p>0) \end{cases} \xRightarrow{q} H_n(K)$$

両 spectr. seq. は collapse する. 従って

$$H_n(C_0(A)) \approx H_n(\bar{T}G_0(A)).$$

上の定理の証明中 ${}^I E_{pg}^I = H_g^{\text{II}}(K_{p,\bullet}) = C_p(A)$ for $g=0$, 0 for $g>0$,
 を使った。これの証明を補充する: $H_g^{\text{II}}(K_{p,\bullet}) = H_g(A, C_p)_{\mathbb{G}}$ であ
 り, $C_p \in \tilde{\mathcal{P}}$ である。一般に次のことが言える:

定理 2.4. $T \in \tilde{\mathcal{P}} \Rightarrow H_g(A, T)_{\mathbb{G}} = T(A)$ for $g=0$, 0 for $g>0$.

証) $T_n = T$ ($n \geq 0$), $d_{2i} = \text{id}$, $d_{2i+1} = 0$ とすれば $T \xrightarrow{d_0} T$ は
 T の $\tilde{\mathcal{P}}$ -proj. resolution in $\mathcal{B}^{\mathbb{A}}$ であるから, 明らかに

$$H_g(A, T)_{\mathbb{G}} \approx \tilde{L}_g E_A(T) = T(A) \text{ for } g=0, 0 \text{ for } g>0. \quad \square$$

§ 3. André homology

すでに見た様に derived fc. の定義において, initial fc.

$T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ 上で与えられている必要はない。 $\mathcal{P}$, 或いは
 $\mathcal{P}$ の objects から成る $\mathcal{A}$ の full subcategory $\hat{\mathcal{P}}$ 上で与えられてい
 ることは十分であった。そこで $\hat{\mathcal{P}}$ を一般化して, 単に $\mathcal{A}$ の full
 subcategory $\mathcal{M}$ を category of models とよぶ。

これに対して homology theory

$$H_n(\quad, \quad): \mathcal{A} \times \mathcal{B}^{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{B}, \quad n \geq 0,$$

を定義しよう。

(3.1) augmented chain complex $M_{\bullet} \rightarrow A$ in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ で, $M_n \in \mathcal{M}$,
 $n \geq 0$, かつ, $\mathbb{Z}\mathcal{A}(M, M_{\bullet}^+)$ が acyclic for $\forall M \in \mathcal{M}$. なるものを
 A の $\mathcal{M}$ -resolution とよぶ。

これが存在する場合, $T \in \mathcal{B}^{\mathcal{M}}$ に対して $H_n(\overline{T}M_{\bullet})$ は A の

$\mathcal{M}$ -resolution のとり方に依らない。これを $H_n(A, T)$ を定義する。

(3.2) $\mathcal{M}$ が small full subcategory of $\mathcal{A}$ で, $\mathcal{B}$ が small colimits, $\varinjlim$, をもち, かつこれが exact functor である (AB4) とする。

このとき制限函子 $R: \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{M}}$ は left adjoint $S: \mathcal{B}^{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ をもつ (同型を除いて S は一意の)。その具体的な形は

$$S(T)(A) = \sum_{M \twoheadrightarrow A} T(M), \quad T \in \mathcal{B}^{\mathcal{M}},$$

で与えられる。従って R はモノトニイ, S は exact, $G = SR$ は exact functor である。adjoint pair (S, R) から $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ における cotriple (G, ε, δ) , $G = SR$, が定まり, それに属する projective class $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{P}_G = \{ G(C) \text{ および それらの retracts; } C \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \}$ in $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ が定まる。

chain complex $(C_\bullet, \lambda)$ in $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ with $RC_0 \xrightarrow{\lambda} T$, $T \in \mathcal{B}^{\mathcal{M}}$, が与えられるたとえ, $C_n \in \tilde{\mathcal{M}}$ ($n \geq 0$) かつ $RC_\bullet \rightarrow T \rightarrow 0$ が exact in $\mathcal{B}^{\mathcal{M}}$ であるならば, $(C_\bullet, \lambda)$ を T の $\tilde{\mathcal{M}}$ -resolution とよぶ。

$H_n(C_\bullet(A))$ は T の $\tilde{\mathcal{M}}$ -resolution のとり方に依らず同型の意味で定まるので, これを $H_n(A, T)$ を定義する。

$T \in \mathcal{B}^{\mathcal{M}}$ の標準的な $\tilde{\mathcal{M}}$ -resolution がつぎの様にして得られる: $C_n = G^n S(T)$ ($n \geq 0$), $RC_0 = RS(T) \xrightarrow{\gamma} T$. ただし γ は

$$\gamma(M) : RS(T)(M) = \sum_{M' \twoheadrightarrow M} T(M') \xrightarrow{\sum T(\alpha)} T(M), \quad M \in \mathcal{M},$$

で与えられ, $d_n: G^n S(T) \rightarrow G^{n-1} S(T)$, $n \geq 1$, は

$$d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon_n^i, \quad \begin{cases} \varepsilon_n^i = G^i \varepsilon G^{n-1} S(T) & (0 \leq i \leq n-1) \\ \varepsilon_n^n = G^{n-1} S\gamma \end{cases}$$

で与えられる. これは André [1] に与えられた複体と同じものである.

実際 $G^n S(T)(A) = \sum_{M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots \xrightarrow{\alpha_1} M_0 \xrightarrow{\alpha_0} A} T(M_n).$

(3.3) 以上の様に, $(A, T) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}^m$ に対して, A の $\mathcal{A}$ -resolution を用いて定義した homology と, T の $\tilde{\mathcal{M}}$ -resolution を用いて定義した homology とは, 両 resolutions が存在する場合 (勿論 (3.2) における条件を仮定する) に一致することが証明できる. 従って homology $H_n(A, T)$ の定義として (3.1), (3.2) のどちらを用いてもよいことになる. これが André の homology である. これが §1 で述べたような derived functors を含んでいることは明らかであろう.

$H_n(A, T)$ の簡単な性質を挙げれば

$$\begin{cases} H_n(A, T) = 0 \quad (n > 0) \quad \text{for } A \in \mathcal{M}, \text{ or } T = RC \text{ if } C \in \tilde{\mathcal{M}} \\ H_0(M, T) = T(M), \quad H_0(A, RC) = C(A) \quad \text{for } C \in \tilde{\mathcal{M}} \end{cases}$$

係数関数の exact seq. $0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$ から long exact seq.

$$\begin{aligned} \rightarrow H_n(A, T') \rightarrow H_n(A, T) \rightarrow H_n(A, T'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, T') \rightarrow \\ \rightarrow H_{n-1}(A, T'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が従う. またこれらの性質によって $H_n(A, T)$ は characterize される.

§ 4. examples

(4.1) まず簡単な example として位相空間の singular homology について考える: $\mathcal{A} = \underline{\text{Top}}$ を位相空間と連続写像の category, その full subcategory $\mathcal{M} = \{\Delta_n; n \geq 0\}$ として standard n -simplex から成るものを考える. $T: \mathcal{M} \rightarrow \text{Ab}$: constant functor, $T(\Delta_n) = \mathcal{G} \ (n \geq 0)$: fixed abelian group, $T(f) = \text{Id}_{\mathcal{G}}$, $f \in \text{Mor } \mathcal{M}$, とする. $S_n \in \text{Ab}^{\mathcal{A}} \ (n \geq 0)$ を $S_n(X) = \sum_{\Delta_n \rightarrow X} T(\Delta_n)$ で定義するとき, 容易に $S_n \in \widehat{\mathcal{M}}$ がわかる. $S_n(X)$ は普通の $\mathcal{G}$ -係数 singular n -chain group. $d_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ も普通の様に定義する. standard simplex は trivial な singular homology group を与えるから $RS. \xrightarrow{\Delta} T \rightarrow 0$ は exact, 従って (S, Δ) は T の $\widehat{\mathcal{M}}$ -resolution である. 故に $H_n^{\text{sing}}(X, \mathcal{G}) \cong H_n(X, T)$.

(4.2) K を単位元と ϵ の可換環, $\mathcal{A}$ は associative K -algebras with unit の category とする. $1 \in \mathcal{A}$ とし, $(\mathcal{A}, 1)$ は algebra over $1: \Gamma \xrightarrow{\Delta} 1$ を object, $\Gamma \xrightarrow{\Delta} 1 \xleftarrow{\epsilon} \Gamma'$ を morphism とする $\mathcal{A}$ の subcategory とする. ${}_K\mathcal{M}$ は K -modules の category とするとして, forgetful functor $\Gamma: \mathcal{A} \rightarrow {}_K\mathcal{M}$ の left adjoint $S: {}_K\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ は tensor algebra functor で与えられる. この adjoint pair $S \dashv \Gamma$ から, また adj. pair

$$(\mathcal{A}, 1) \xrightleftharpoons[S]{U} ({}_K\mathcal{M}, U(1))$$

が自然に導かれる. 従って cotriple $G = (G, \epsilon, \delta)$, $G = S\Gamma$, in

$(A, 1)$ が定義される. いま W を $(1, 1)$ -bimodule とすれば, K -derivation functor $D_W: (A, 1) \rightarrow_K \mathcal{M}$, $D_W(\Gamma) = \text{Der}_K(\Gamma, W)$, を係数 functor とし, cotriple cohomology $H^n(\Gamma, D_W)_{\mathcal{G}}$ が定義される.

定理 4.1. (Barr-Beck [2])

$$H^n(\Gamma, D_W)_{\mathcal{G}} \approx \begin{cases} \text{Der}_K(\Gamma, W) & (n=0) \\ H^{n+1}(\Gamma, W) & (n \geq 1), \end{cases}$$

ただし $H^{n+1}(\Gamma, W)$ は Hochschild cohomology group である.

群の cohomology についても同様なことが言える.

(と単位元を保つ準同形写像)

(4.3) $\mathcal{A}$ を, 単位元を保つ可換環の category とする. $A \in \mathcal{A}$ に対し, ${}_A\mathcal{A}$ を A -algebra の category, $C \in {}_A\mathcal{A}$ のとき, ${}_A\mathcal{A}_C$ を A -algebra over C の category を表わす. adjoint pair $(F, U): {}_A\mathcal{A} \xrightleftharpoons[F]{U} \underline{\text{Set}}$ が, underlying set functor U と free A -algebra (polynomial algebra) functor F によって与えられ, これは自然に adjoint pair ${}_A\mathcal{A}_C \xrightleftharpoons[F]{U} (\underline{\text{Set}}, U(C))$ を induce する. そこで cotriple $\mathcal{G} = (G, \varepsilon, \delta)$, $G = FU$, $\text{in } {}_A\mathcal{A}_C$ が定義される.

$B \in {}_A\mathcal{A}_C$ とするとき, 同様にして cotriple $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{G}, \overline{\varepsilon}, \overline{\delta}) \text{ in } {}_B\mathcal{A}_C$ が得られる. このとき adjoint pair ${}_B\mathcal{A}_C \xrightleftharpoons[Y]{X} {}_A\mathcal{A}_C$ が, X は自然な inclusion functor, Y は, $Y(\Gamma) = (B \otimes_A \Gamma \rightarrow C)$ によって与えられる. Y は X の left adjoint であり, $\overline{G} = YGX$ が成り立つ.

いま W を C -module とすると、 A -derivation functor ${}_A D : {}_A \mathcal{A}_C \rightarrow {}_C \mathcal{M}$, ${}_A D(\Gamma) = \text{Der}_A(\Gamma, W)$, を係数とする cotriple cohomology $H^n(\Gamma, {}_A D)_G$ は André [1] において, $H^n(A, \Gamma, W)$ と表わされたものと同じである. 同様にして B -derivation functor ${}_B D : {}_B \mathcal{A}_C \rightarrow {}_C \mathcal{M}$, ${}_B D(\Gamma) = \text{Der}_B(\Gamma, W)$, や $H^n(\Gamma, {}_B D)_G = H^n(B, \Gamma, W)$ が考えられる. ここで ${}_A D = {}_B D Y$ なることに注意しよう.

定理 4.2 (André [1]). $B \in {}_A \mathcal{A}_C$, W を C -module とすれば完全系列

$$0 \rightarrow H^0(B, C, W) \rightarrow H^0(A, C, W) \rightarrow H^0(A, B, W) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow H^{n-1}(A, B, W) \rightarrow H^n(B, C, W) \rightarrow H^n(A, C, W) \rightarrow H^n(A, B, W) \rightarrow \cdots$$

が得られる.

References

- [1] M. André, Méthode Simpliciale en Algèbre Homologique et
Algèbre Commutative, Lecture Notes in Math. 32, Springer 1967.
- [2] M. Barr - J. Beck, Algebraic models and triples, Proc. La Jolla Conf. on Categori-
cal Algebra, Springer 1966.
- [3] ———, Homology and standard constructions, Seminar on Triples
and Categorical Homology Theory, Lect. Notes in Math. 80, 1969.
- [4] J. Beck, Triples, Algebras and Cohomology, Dissertation, Columbia U. 1967.
- [5] H. Cartan - S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton U. P. 1956.
- [6] A. Dold - D. Puppe, Homologie Nicht-Additiver Funktoren, Anwendungen,
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 11 (1961).
- [7] S. Eilenberg - J. C. Moore, Foundation of Relative Homological Algebra,
Memoirs, A. M. S. 55 (1965)
- [8] ———, Adjoint functors and triples, Illinois
J. Math. 9 (1965)
- [9] R. Godement, Topologie algébrique et Théorie des faisceaux,
Hermann, 1958.
- [10] A. Iwai, Simplicial cohomology and n -term extensions of algebras,
J. Math. Kyoto Univ. 9, No. 3 (1969)
- [11] S. MacLane, Homology, Springer and Academic P. 1963.
- [12] M. Tierney - W. Vogel, Simplicial derived functors, Category Theory,
Homology Theory and Their Applications I, Lect. Notes in Math. 86 (1969).
- [13] H. Shimada - H. Uehara, F. Brennerman, A. Iwai, Triple cohomology of algebras and
two term extensions, Publ. RIMS. 5 (1969).